

Интерпретация графов в некоммутативных теориях степеней Фреше*

Е. А. ПАЛЮТИН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: palyutin@math.nsc.ru

УДК 510.67+512.57

Ключевые слова: стабильная теория, аксиоматизируемый класс, класс графов, фильтр Фреше.

Аннотация

Основным результатом работы является теорема о том, что если аксиоматизируемый класс структур K замкнут относительно приведённых степеней по фильтру Фреше и имеет стабильную некоммутативную теорию, то в классе K можно проинтерпретировать класс всех графов.

Abstract

E. A. Palyutin, Interpretation of graphs in noncommutative theories of Frechet-powers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 145–167.

The basic result of the work is the theorem that if an axiomatizable class K of structures is closed under reduced powers by the Frechet filter and it has a stable non-commutative theory, then the class of all graphs is interpretable in the class K .

Памяти моего друга Юрия Шишмарёва посвящается

1. Введение

Понятие коммутативной теории (не обязательно полной) появилось в [4, 10] и включает в себя теории класса модулей над ассоциативными кольцами [14], а также многообразий, квазимногообразий и хорновых классов с немаксимальным спектром [3, 7, 9, 11]. Коммутативные теории имеют довольно хорошую структурную теорию. Главная теорема данной статьи показывает, что аксиоматизируемый класс, который замкнут относительно фильтра Фреше (в частности, является многообразием, квазимногообразием или хорновым классом), имеет стабильную теорию и не имеет максимальной структурной сложности

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00336-а), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-344.2008.1), а также гранта аналитической ведомственной целевой программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

(например, допускает размерностную интерпретацию класса всех графов), обязан иметь коммутативную теорию.

Размерностная интерпретация графов, определённая в данной статье, похожа на свойство DOP, введённое С. Шелахом при изучении структуры моделей теорий с немаксимальным спектром. При доказательстве основных полезных свойств теорий без DOP С. Шелах использовал дополнительное свойство суперстабильности теории, которым всегда обладают теории с немаксимальным спектром. Отметим, что в определении коммутативных теорий условие суперстабильности не предполагается. При условии суперстабильности условие коммутативности для аксиоматизируемых классов, замкнутых относительно Фреше степеней, фактически совпадает со свойством отсутствия DOP. Учитывая этот факт, можно сказать, что структурная теория коммутативных суперстабильных теорий, по существу, была завершена в конце 80-х годов прошлого столетия (см. [1, 3, 7—9, 11]).

2. Основные определения и соглашения

Как обычно, все рассматриваемые теоретико-модельные понятия будут относиться к некоторой фиксированной в контексте рассмотрения полной теории T языка L и C будет её монстр-моделью, т. е. достаточно насыщенной моделью этой теории, содержащей в качестве элементарных подструктур все рассматриваемые в контексте данной статьи модели теории T . К этой модели будут относиться также элементы, кортежи, множества и т. п. Понятие истинности формул также будет относиться к этой структуре C , хотя структура C при этом обычно указываться не будет. В дальнейшем под формулой будем понимать формулу языка L . Мощность множества предложений языка L будем обозначать через $|L|$.

Жирными буквами конца латинского алфавита $\mathbf{u}, \dots, \mathbf{z}$ обозначаются кортежи переменных, а жирными буквами начала алфавита $\mathbf{a}, \dots, \mathbf{e}$ — кортежи элементов из структуры C . Для множества R и кортежа $\mathbf{s}$ вместо $\mathbf{s} \in R^n$ будем писать просто $\mathbf{s} \in R$. Длина кортежа $\mathbf{w}$ обозначается через $l(\mathbf{w})$.

Мы будем рассматривать формулы с параметрами из структуры C , т. е. формулы с подстановкой элементов структуры C вместо некоторых их свободных переменных. При этом про формулу Φ с параметрами из C будем говорить, что она является формулой над множеством $X \subseteq C$ (над кортежем $\mathbf{a}$), если все её параметры принадлежат множеству X (кортежу $\mathbf{a}$). Если $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ — формула, $\mathbf{a} \in C$ и $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{y})$, то запись $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ будет обозначать результат подстановки в формулу Φ элементов кортежа $\mathbf{a}$ вместо соответствующих переменных из кортежа $\mathbf{y}$. При этом запись $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ будет обозначать также, что все параметры этой формулы принадлежат кортежу $\mathbf{a}$ и все свободные переменные этой формулы принадлежат кортежу $\mathbf{x}$. Запись $\Phi(\mathbf{x})$ означает, что все свободные переменные этой формулы принадлежат кортежу $\mathbf{x}$, однако такая запись не содержит информации о параметрах. Если параметры формулы $\Phi(\mathbf{x})$ принадлежат

множеству A , мы говорим, что формула $\Phi(\mathbf{x})$ является формулой над A . Если Φ — формула без параметров, то говорим, что Φ — формула над $\emptyset$. Если α, β — множества формул над множеством A , то запись $\alpha \vdash \beta$ будет обозначать, что в исчислении предикатов имеет место выводимость $D(A) \cup \alpha \vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \beta$, где $D(A)$ — множество всех формул с параметрами из A без свободных переменных, истинных в монстр-модели C .

Определение. Для формул Φ и Ψ формулу $(\exists \mathbf{x} \Phi \wedge \forall \mathbf{x} (\Phi \rightarrow \Psi))$ будем называть результатом *P-операции*, применённой к формулам Φ и Ψ .

Следующее понятие под названием «*h-формула*» появилось в [2].

Определение. Формула Φ языка L называется *P-формулой*, если она принадлежит наименьшему классу, содержащему все атомарные формулы и замкнутому относительно конъюнкции и *P-операции*. Формулы, эквивалентные в исчислении предикатов *P-формулам*, также будем называть *P-формулами*.

В данной статье под базисными формулами мы будем понимать только P-формулы. (В других статьях автора в качестве базисных рассматривались также примитивные формулы.)

Заметим, что для *P-формулы* Φ формулы $\exists \mathbf{x} \Phi$ и $\forall \mathbf{x} \Phi$ эквивалентны соответственно *P-формулам* $(\exists \mathbf{x} \Phi \wedge \forall \mathbf{x} (\Phi \rightarrow \Phi))$ и $(\exists \mathbf{x} x = x \wedge \forall \mathbf{x} (x = x \rightarrow \Phi))$. Поэтому можно считать, что класс *P-формул* замкнут относительно навешивания кванторов.

Если $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ — формула языка L , то через $\Phi(C, \mathbf{a})$ обозначается множество $\{\mathbf{b} \mid C \models \Phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})\}$. Пусть $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — базисная формула языка L , $\mathbf{a}$ — кортеж элементов и $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{y})$. Множество вида $\Phi(C, \mathbf{a})$ называется *базисным множеством*. Если $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — кортежи элементов и $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{b}) = l(\mathbf{y})$, то множества $\Phi(C, \mathbf{a})$ и $\Phi(C, \mathbf{b})$ называются *базисными копиями*.

Будем говорить, что формула $\Phi(\mathbf{x}^1; \mathbf{x}^2)$ (с параметрами из C) определяет эквивалентность в C , если она определяет в C эквивалентность на множестве X , где $X = \exists \mathbf{x}^1 \Phi(\mathbf{x}^1; C) = \exists \mathbf{x}^2 \Phi(C; \mathbf{x}^2)$. При этом будем допускать случай $X = \emptyset$.

Эквивалентность α на некотором множестве X n -ок элементов из C , определённая в C с помощью некоторой базисной формулы $\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, называется *базисной эквивалентностью*. Область определения X такой эквивалентности α определяется в C базисной формулой $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и обозначается через $\text{dom } \alpha$. Часто мы будем отождествлять α с Φ и писать $\alpha(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ вместо $\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$. Отметим, что свойство «быть базисной эквивалентностью» относится не только к формуле Φ , но и к записи $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, группирующей переменные формулы Φ .

Эквивалентность α называется *Δ -базисной*, если существует такое множество E базисных эквивалентностей, что $\alpha = \bigcap \{\beta \mid \beta \in E\}$.

Определение.

1. Формула $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ без параметров называется *$\mathbf{x}$ -нормальной*, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$, $l(\mathbf{a}) = l(\mathbf{b}) = l(\mathbf{y})$, выполнено или $\Phi(C; \mathbf{a}) = \Phi(C; \mathbf{b})$, или $(\Phi(C; \mathbf{a}) \cap \Phi(C; \mathbf{b})) = \emptyset$. Формула $\Phi(\mathbf{x})$ без параметров называется *нормальной*, если она является $\mathbf{x}'$ -нормальной для любого кортежа $\mathbf{x}'$, все элементы которого принадлежат кортежу $\mathbf{x}$.

2. Теория T называется P -нормальной (или базисно нормальной), если для любых базисных копий X, Y выполнено $X = Y$ или $X \cap Y = \emptyset$.

Определение. Теория T называется P -неприводимой (или базисно неприводимой), если для любого конечного множества P -формул $\Phi_0(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ и любого кортежа элементов $\mathbf{a} \in C$ из включения

$$\Phi_0(C; \mathbf{a}) \subseteq \bigcup \{\Phi_1(C; \mathbf{a}), \dots, \Phi_n(C; \mathbf{a})\}$$

следует включение

$$\Phi_0(C; \mathbf{a}) \subseteq \Phi_i(C; \mathbf{a})$$

для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ясно, что по компактности в предыдущем определении можно убрать условие конечности.

Под *типом* понимается произвольное совместное множество формул с параметрами из монстр-модели C . Для типа t запись $t(\mathbf{x}; A)$ означает, что тип t состоит из формул вида $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$, где $\mathbf{a} \in A$. Будем говорить, что тип t порождается подтипом $q \subseteq t$, если выполнено $q \vdash t$.

Для типа $t(\mathbf{x}; A)$ через $t(C; A)$ обозначим множество реализаций типа $t(\mathbf{x}; A)$ в C .

Будем говорить, что множество X делит множество Y , если $(X \cap Y) \neq \emptyset$ и $(Y \setminus X) \neq \emptyset$. Это понятие мы будем применять к формулам $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ и типам $t(\mathbf{x}; A)$, имея в виду множества $\Phi(C; \mathbf{a})$ и $t(C; A)$.

Если $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — базисная формула над $\emptyset$, то через $\mathbf{x}\Phi$ обозначаем формулу

$$\exists \mathbf{y} (\Phi(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) \wedge \Phi(\mathbf{x}^2, \mathbf{y})).$$

Если теория T базисно нормальна, то формула $(\mathbf{x}\Phi)(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ определяет в C эквивалентность, областью определения которой является множество $\exists \mathbf{y} \Phi(C, \mathbf{y})$, а её классами будут все непустые множества вида $\Phi(C, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — набор элементов из C . Отсюда вытекает, что любое непустое базисное множество X является классом некоторой эквивалентности α , определяемой базисной формулой без параметров, которую мы будем называть *носителем множества X* . Непустые базисные множества X и Y тогда и только тогда будут базисными копиями, когда существует их общий носитель α .

Множество X называется Δ -базисным, если существует такое семейство S базисных множеств, что $X = \bigcap \{Y \mid Y \in S\}$. При этом пересечение носителей $Y \in S$ будем называть *носителем множества X* . Если $X' = \bigcap \{Y' \mid Y \in S\}$ и Y' — базисные копии множеств Y , то X' называется Δ -базисной копией множества X .

Определение. Будем говорить, что множество Z независимо (или свободно) над A в множестве X , если $Z \subseteq X$, для любой базисной формулы $\Phi(x; \mathbf{y})$ над A , для любого кортежа $\mathbf{d} \in Z$, $l(\mathbf{d}) = l(\mathbf{y})$, и любого элемента $b \in Z$, не принадлежащего кортежу $\mathbf{d}$, из условия $b \in \Phi(C; \mathbf{d})$ следует $X \subseteq \Phi(C; \mathbf{b})$. Если $X = t(C)$, то будем говорить, что множество Z независимо (или свободно)

в типе $t(\mathbf{x})$. Для модели M , $X \subseteq M$, через $\dim_A(X, M)$ обозначим максимум мощностей независимых в X над A подмножеств модели M .

Определение. Будем говорить, что $\{X_1\}$ *независимо (или свободно) над A в множестве X* , если $X_1 \subseteq X$ и для любой базисной формулы $\Phi(x)$ над A из условия $X_1 \cap \Phi(C) \neq \emptyset$ следует $X \subseteq \alpha(X_1)$, где α — носитель множества $\Phi(C)$. В дальнейшем, когда ясно, о чем идёт речь, будем вместо « $\{X_1\}$ независимо (или свободно) над A в множестве X » говорить просто « X_1 независимо (или свободно) над A в множестве X ».

Отметим, что такие понятия, как неразличимость множества элементов, независимость множеств элементов и т. п., естественно распространяются на множества Δ -базисных множеств. Например, для неразличимости можно использовать определение через расширение любой перестановки семейства Δ -базисных множеств до автоморфизма монстр-модели C .

Под *графом* Γ , как обычно, понимается произвольное множество упорядоченных пар. Объединение проекций Γ на первую и вторую координату называется множеством *вершин графа* Γ . Если эти проекции не пересекаются, то граф G называется *двудольным* и проекции называются *долями* данного двудольного графа Γ .

Определение. Будем говорить, что класс графов (двудольных графов) K *размерностно интерпретируется в теории T* , если существуют Δ -базисные множества X, U (Δ -базисные множества X, Y, U) и тип $t(x, y, z)$ над некоторым множеством A , такие что для любого графа $\Gamma \in K$ существуют модель M_Γ теории T и инъективное отображение f множества вершин графа Γ в неразличимое над A множество копий множества X (соответственно долей графа Γ в неразличимые множества копий множеств X и Y), такое что условие $\langle a, b \rangle \in \Gamma$ равносильно условию

$$\begin{aligned} &\text{в } t(C, fa, fb) \text{ есть свободная копия } V \text{ множества } U \\ &\text{и } \dim_A(V, M_\Gamma) > (|L| + |\Gamma|)^+. \end{aligned}$$

При этом будем говорить, что f является *t -интерпретацией графа Γ в M_Γ* .

Как уже давно принято в теории моделей, при изучении теории T доказательства проводятся в теории T^{eq} , модели которой содержат классы формульных эквивалентностей в моделях теории T в качестве новых элементов.

Определение. Для теории T через T^{req} обозначается обеднение теории T^{eq} до языка, содержащего классы эквивалентностей, определимых только P -формулами.

Доказательства основных свойств этой теории содержатся в [8, 11]. Отметим, что в этих работах данная теория обозначалась через T^{eh} .

В дальнейшем, когда это необходимо, мы будем проводить доказательства в теории T^{req} , не напоминая отдельно об этом.

3. Два главных примера

В этом разделе мы приведём два типичных в нашей ситуации примера интерпретации графов. В дальнейшем мы рассмотрим общую схему, которая распадётся на две части, соответствующие этим двум примерам.

Пример 1. Пусть язык теории T_1 состоит из двух 2-местных символов α, β . Аксиомы теории T_1 утверждают следующее:

- 1) α и β определяют эквивалентности с бесконечным числом классов эквивалентности;
- 2) α и β перестановочны, т. е. композиции $(\alpha \circ \beta)$ и $(\beta \circ \alpha)$ совпадают;
- 3) объединение $(\alpha \vee \beta)$ в решётке эквивалентностей на C является единичной эквивалентностью, т. е. совпадает с C^2 ;
- 4) пересечение $(\alpha \wedge \beta)$ является эквивалентностью с бесконечными классами эквивалентности.

Нетрудно показать, что любые две счётные T_1 -модели изоморфны. Следовательно, теория T_1 полна. Ясно также, что класс T_1 -моделей замкнут относительно объединения возрастающих цепей. По теореме Линдстрёма теория T_1 модельно полна. Легко показывается также, что эта теория ω -стабильна. Таким образом, теория T_1 по многим параметрам довольно проста. Однако класс её несчётных моделей не имеет сколько-нибудь приемлемой классификации с точностью до изоморфизма. В самом деле, сейчас мы покажем, как в этой теории можно проинтерпретировать класс всех двудольных графов. Как известно, любую структуру конечного языка можно однородно проинтерпретировать (причём элементарным образом) в некотором двудольном графе. Таким образом, задача классификации несчётных T_1 -моделей, по существу, равносильна классификации всех структур.

Опишем интерпретацию двудольных графов в T_1 -моделях. Возьмём произвольный двудольный граф Γ с долями B_1 и B_2 . Пусть $\aleph$ — некоторый несчётный кардинал, больший мощности $|\omega \cup (B_1 \cup B_2)|^+$. По компактности существует T_1 -модель A , у которой множества α -классов, β -классов и каждый $(\alpha \wedge \beta)$ -класс имеют мощности, не меньшие $\aleph$.

В качестве типа $t(x, y, z)$ берём формулу, выражающую отношение $x \in (y \cap z)$ для α -класса y и β -класса z . Рассмотрим некоторое инъективное отображение $f: B_1 \cup B_2 \rightarrow A^{\text{req}}$, при котором $f(B_1)$ и $f(B_2)$ являются соответственно множествами α -классов и β -классов.

Возьмём подструктуру $A_0 \subseteq A$, получающуюся из структуры A уменьшением $(\alpha \wedge \beta)$ -классов вида $(fa \cap fb)$, где $\langle a, b \rangle \notin \Gamma$, до некоторого счётного множества. Ясно, что структура A_0 будет T_1 -моделью, а отображение f — t -интерпретацией Γ в A_0 .

Пример 2. Пусть язык теории T_2 состоит из 2-местного символа α и 4-местного символа μ . Аксиомы теории T_2 утверждают следующее:

- 1) α определяет эквивалентность с бесконечным числом классов эквивалентности и каждый её класс бесконечен;

- 2) μ определяет на α -классах структуру аффинной элементарной абелевой 2-группы, т. е.

$$C \models \mu(a, b, c, d) \Leftrightarrow \alpha d = (\alpha a + \alpha b - \alpha c),$$

где $+$ и $-$ — сумма и разность в элементарной абелевой 2-группе.

Как и для теории T_1 , нетрудно показать, что теория T_2 ω -категорична, полна, модельно полна и ω -стабильна. В классе её несчётных моделей интерпретируется класс всех графов. Покажем это.

Возьмём произвольный граф Γ с множеством вершин B . Пусть $\aleph$ — некоторый несчётный кардинал, больший мощности $|B|^+$. По компактности существует T_2 -модель A , у которой множество α -классов и каждый α -класс имеют мощности, не меньшие $\aleph$. Пусть X_0 — некоторый α -класс.

В качестве типа $t(x, y, z)$ берём формулу, выражающую условие $x \in (y + z - X_0)$. Пусть $f: B \rightarrow A^{\text{eq}}$ — инъективное отображение, при котором $f(B)$ является независимым относительно $\{X_0\}$ множеством α -классов.

Возьмём подструктуру $A_0 \subseteq A$, получающуюся из структуры A уменьшением α -классов вида $(fa + fb - X_0)$, где $\langle a, b \rangle \notin \Gamma$, до некоторого счётного множества. Ясно, что структура A_0 будет T_2 -моделью, а отображение f — t -интерпретацией Γ в A_0 .

4. Коммутативные теории

Для удобства читателя мы приведём определения некоторых понятий, введённых в других работах (см. [4, 5, 10]). Отметим, что некоторые из них будут немного отличаться от первоначально введённых.

Пусть α — эквивалентность, X — некоторое множество. Будем говорить, что множество X α -замкнуто, если для любого $a \in (X \cap \text{dom } \alpha)$ выполнено $\alpha a \subseteq X$. Через $\alpha \upharpoonright X$ обозначается ограничение $(\alpha \cap X^2)$ эквивалентности α на множество X . Через X/α обозначаем множество $\{(\alpha \upharpoonright X)\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in X\}$.

Определение. Для множеств X и Y кортежей длины n пишем $X \approx Y$, если для любой базисной формулы $\Phi(\mathbf{x})$ над $\emptyset$, $l(\mathbf{x}) = n$, условия $(X \cap \Phi(C)) = \emptyset$ и $(Y \cap \Phi(C)) = \emptyset$ равносильны.

Определение.

1. Пара $X = \langle X^*, \alpha \rangle$, где X^* — Δ -базисное множество, α — базисная эквивалентность и выполнено условие $X^* \subseteq \text{dom } \alpha$, называется *обобщённо базисным множеством*. Вместо записи $X = \langle X^*, \alpha \rangle$ будем использовать также запись $X = X^*/\alpha$. При этом X^* называется *основой*, а α — *образующей эквивалентностью обобщённо базисного множества X* или просто образующей обобщённо базисного множества X . Носитель множества X^* будет называться *носителем обобщённо базисного множества X* .

2. Обобщённо базисные множества X_1, X_2 называются обобщённо базисными копиями, если у них общая образующая эквивалентность, а их основы X_1^*, X_2^* являются копиями.
3. Для обобщённо базисных копий $X = X^*/\alpha$ и $Y = Y^*/\alpha$ пишем $X \approx Y$, если для любой базисной формулы $\Phi(\mathbf{x})$, для которой множество $\Phi(C)$ является $(\alpha \upharpoonright X^*)$ -замкнутым, условие $(X^* \cap \Phi(C)) = \emptyset$ равносильно условию $(Y^* \cap \Phi(C)) = \emptyset$.
4. Пусть X, Y — обобщённо базисные множества, имеющие общую образующую эквивалентность. Если выполнено условие $X^* \subseteq Y^*$, то будем говорить, что X — (обобщённо базисное) подмножество обобщённо базисного множества Y , и использовать обозначение $X \subseteq Y$.

Отметим, что мы работаем в T^{req} , поэтому обобщённо базисные множества, по существу, являются Δ -базисными множествами. Мы, однако, будем использовать понятие обобщённо базисного множества, когда нам будет важна его образующая эквивалентность.

Определение. Формула $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ называется $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ -рефлексивной, если $l(\mathbf{x}) = l(\mathbf{y})$ и выполнено

$$\vdash (\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \rightarrow (\exists \mathbf{z} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) \wedge \exists \mathbf{z} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))).$$

Определение. Пусть X, Y — обобщённо базисные копии, α — их образующая эквивалентность.

1. Будем говорить, что X связано с Y с помощью формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$, если существует кортеж $\mathbf{c}$ и выполнены следующие условия:
 - а) для любых $\mathbf{a}^1 \in X^*$ и $\mathbf{b}^1 \in Y^*$ существуют такие $\mathbf{a}^2 \in X^*$ и $\mathbf{b}^2 \in Y^*$, что в C истинны $\Phi(\mathbf{a}^1; \mathbf{b}^2; \mathbf{c})$ и $\Phi(\mathbf{a}^2; \mathbf{b}^1; \mathbf{c})$;
 - б) для любого $\mathbf{a} \in X^*$ множество $\Phi(\mathbf{a}; C; \mathbf{c})$ является $(\alpha \upharpoonright Y^*)$ -замкнутым и не содержит Y^* ;
 - в) для любого $\mathbf{b} \in Y^*$ множество $\Phi(C; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ является $(\alpha \upharpoonright X^*)$ -замкнутым и не содержит X^* .
2. Будем говорить, что X является базисно связанным с Y , если $|X| = |Y| = 1$ или существует такая $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ -рефлексивная базисная формула $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$, что X связано с Y с помощью формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$.

Если формула $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{c})$ из предыдущего определения определяет биективное отображение X на Y , то будем говорить, что множество X инъективно связано с Y с помощью формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$.

Определение. Обобщённо базисное множество X называется аддитивным, если некоторая базисная формула Φ (с параметрами) задаёт абелеву группу на X .

Определение. Пусть $X, Y, X \subseteq Y$, — Δ -базисные множества, $X \neq \emptyset$.

1. Говорим, что множество X аддитивно в Y , если существует такая базисная эквивалентность α , что $Y \subseteq \text{dom } \alpha$, $X = (Y \cap \alpha\mathbf{a})$ для $\mathbf{a} \in X$ и обобщённо базисное множество Y/α является аддитивным.

2. Говорим, что множество X Δ -аддитивно в Y , если существует такая убывающая цепь $\{X_i \mid i < \lambda\}$ Δ -базисных множеств, что $X_0 = Y$, $X = \bigcap \{X_i \mid i < \lambda\}$ и X_i аддитивно в $\bigcap \{X_j \mid j < i\}$ для любого $i < \lambda$. Цепь $\{X_i \mid i < \lambda\}$ будем называть Δ -аддитивной последовательностью для X в Y . Если λ конечно, то будем говорить, что множество X мультиаддитивно в Y .
3. Пусть λ — ординал, $\lambda \geq 1$, X — Δ -базисное множество. Последовательность $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ базисных эквивалентностей называется *однородно Δ -аддитивной последовательностью в X* , если $X \subseteq \text{dom } \alpha_i$, $i < \lambda$, и для любого ординала $i < \lambda$ существует базисная формула $\Phi_i(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}; \mathbf{w})$, являющаяся термом Мальцева (см. [5]) на обобщённо базисном множестве $(X \cap \bigcap \{\alpha_j \mathbf{a} \mid j < i\})/\alpha_i$ для любого $\mathbf{a} \in X$. Указанную выше базисную формулу Φ_i будем называть *i -свидетелем Δ -аддитивности S в X* . В случае конечного λ такую последовательность будем называть *однородно мультиаддитивной*.
4. Пусть X, Y — Δ -базисные множества и $Y \subseteq X$. Множество Y называется *однородно Δ -аддитивным (мультиаддитивным) в X* , если существует однородно Δ -аддитивная (мультиаддитивная) последовательность $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ в X , для которой эквивалентность $\bigcap S$ является носителем Y . При этом последовательность S будем называть *однородно Δ -аддитивной (мультиаддитивной) последовательностью для Y в X* .
5. Пусть X_0, X_1, Y_0, Y_1 — Δ -базисные множества и $Y_i \subseteq X_i$, $i \leq 1$. Будем говорить, что Y_0, Y_1 однородно Δ -аддитивны (мультиаддитивны) в X_0, X_1 , если существует последовательность базисных эквивалентностей $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$, являющаяся однородно Δ -аддитивной (мультиаддитивной) последовательностью для Y_0, Y_1 соответственно в X_0, X_1 , причём для каждого $i < \lambda$ существует общий i -свидетель Δ -аддитивности S в X_0 и X_1 .

Определение. Пару $\langle X, Y \rangle$ Δ -базисных множеств будем называть *Δ -аддитивной парой*, если $X \approx Y$ и существуют Δ -базисное множество Z и однородно Δ -аддитивная последовательность S в Z , такие что $(X \cup Y) \subseteq Z$ и $\bigcap S$ является общим носителем X и Y .

Определение. Пару Δ -базисных множеств $\langle X, Y \rangle$ будем называть наследственно базисно связанной, если для любого обобщённо базисного множества $X_1 = \langle X_1^*, \alpha \rangle$, $X_1^* \subseteq X$, найдётся такая его обобщённо базисная копия $Y_1 = \langle Y_1^*, \alpha \rangle$, $Y_1^* \subseteq Y$, что X_1 и Y_1 являются базисно связанными.

Определение. Тройку Δ -базисных копий $\langle X_0, Y, X_1 \rangle$ назовём *базисным треугольником*, если существуют Δ -базисные эквивалентности α, β , для которых X_0, Y, X_1 являются $(\alpha \wedge \beta)$ -классами и выполнены условия $\alpha Y = \alpha X_0$, $\beta Y = \beta X_1$ и $X_0 \approx Y \approx X_1$.

Определение. Базисный треугольник $\langle X_0, Y, X_1 \rangle$ называется альтернативно базисно связанным, если для любого обобщённо базисного множества Y' ,

$(Y')^* \subseteq Y$, найдётся такой $i \leq 1$ и такая копия X' обобщённо базисного множества Y' , что $(X')^* \subseteq X_i$ и Y' , X' являются базисно связанными.

Определение. Теория T называется *базисно коммутативной*, если выполняются следующие условия:

- 1) T базисно нормальна;
- 2) любая Δ -аддитивная пара $\langle X, Y \rangle$ является наследственно базисно связанной;
- 3) любой базисный треугольник является альтернативно базисно связанным.

5. Теории степеней Фреше

Как известно, *фильтром Фреше* на бесконечном множестве I называется семейство

$$F_I = \{X \mid X \subseteq I, \text{ множество } I \setminus X \text{ конечно}\}.$$

Степенью Фреше структуры A называется приведённая степень A^ω / F_ω , где ω — множество натуральных чисел, обозначение A^F .

В этом разделе мы приведём необходимые для нас свойства теорий степеней Фреше. Доказательства этих свойств можно найти в [6].

Предложение 1. Пусть K — произвольный класс структур языка L . Тогда теория $T = \text{Th}\{A^F \mid A \in K\}$ степеней Фреше структур класса K имеет следующие свойства:

- 1) теория T P -неприводима;
- 2) теория T допускает элиминацию кванторов до P -формул, т. е. каждая формула языка L эквивалентна булевой комбинации P -формул;
- 3) теория T тогда и только тогда стабильна, когда она P -нормальна.

6. λ -позитивные оболочки

В этом разделе мы предполагаем, что теория T полная, P -нормальная, P -неприводимая и допускает элиминацию кванторов до P -формул. В частности, как отмечено выше, такими свойствами обладает стабильная теория T степени Фреше A^F некоторой структуры A . Некоторые достаточно простые утверждения этого раздела содержатся в [6]. Мы приводим их только для удобства читателя. В дальнейшем λ — кардинал, больший $|L|^+$.

Определение.

1. Множество t , состоящее из базисных формул над A со свободными переменными из кортежа $\mathbf{x}$ и их отрицаний, называется *базисным типом над A от $\mathbf{x}$* .

2. Если t — тип, то через t^+ обозначается множество всех базисных формул, выводимых из типа t ; оно называется *позитивной частью типа t* . Через t^- будет обозначаться множество всех отрицаний базисных формул, выводимых из типа t .
3. Совместный тип t от переменных $\mathbf{x}$ называется *базисно полным над A от $\mathbf{x}$* , если имеет место $t \vdash \Phi$ или $t \vdash \neg\Phi$ для любой базисной формулы $\Phi(\mathbf{x})$ над A . Базисно полный базисный тип t над A от $\mathbf{x}$, замкнутый относительно выводимости базисных формул над A от $\mathbf{x}$ и их отрицаний, называется *максимальным базисным* типом над A от $\mathbf{x}$. Ясно, что максимальность базисного типа t означает, что среди совместных базисных типов над A от $\mathbf{x}$ нет собственного расширения типа t .
4. Если для базисного типа t над A от переменных $\mathbf{x}$ существует тип $q \subseteq t^-$ мощности меньше λ и выполнено $(q \cup t^+) \vdash t$, то тип t называется *λ -позитивным типом над A от переменных $\mathbf{x}$* . При этом тип q будем называть *λ -основой (над A от $\mathbf{x}$) λ -позитивного типа t (над A от $\mathbf{x}$)*. Если $\lambda = 1$, то λ -позитивный тип t называется *позитивным типом*. Максимальный λ -позитивный базисный тип называется *λ -максимальным*.
5. *Базисным типом кортежа $\mathbf{a}$ над множеством A* называется множество всех базисных формул $\Phi(\mathbf{x})$ над A и их отрицаний, истинных на кортеже $\mathbf{a}$.
6. Кортеж $\mathbf{a}$ называется *λ -позитивно изолированным над множеством A* , если его базисный тип t над A является λ -позитивным. При этом будем говорить, что тип t *λ -изолирует кортеж $\mathbf{a}$ над A* .

Замечание 1. Из принципа максимума (леммы Цорна) и теоремы компактности вытекает, что если базисный тип p над A от переменных $\mathbf{x}$ порождается своим подтипом $q \subseteq p$, то существует максимальный базисный тип r над A от $\mathbf{x}$, который порождается подтипом $q \cup r^+$ и для которого $p \subseteq r$. Отсюда получаем, что для любого λ -позитивного типа p над A от переменных $\mathbf{x}$ существует максимальный базисный тип над A от $\mathbf{x}$, содержащий тип p и являющийся λ -позитивным над A от $\mathbf{x}$.

Предложение 2. Пусть X — Δ -базисное множество, Z независимо в X над A и выполнены следующие условия: $|A| < |Z|$, $|L| < |Z|$ и $|Z|$ — регулярный кардинал. Если для множества B выполнено условие $|B| < |Z|$, то существует подмножество $Z' \subseteq Z$, для которого $|Z'| = |Z|$, и Z' независимо в X над $(A \cup B)$.

Доказательство. Будем говорить, что формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменных $x_1, \dots, x_n$ в X , если ни для какого $i \in \{1, \dots, n\}$ и ни для каких $a_j, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$, не имеет места включение

$$X \subseteq \Phi(a_1, \dots, a_{i-1}, C, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Так как для любой базисной формулы $\Phi(x)$ над любым множеством множество $\Phi(C)$ является классом эквивалентности, определимой базисной формулой без параметров, то это множество либо содержит множество X , либо содержит не

более одного элемента из множества Z . Заметим, что при условии $|L| < |Z|$ множество формул с параметрами из множества мощности, меньшей чем $|Z|$, также имеет мощность, меньшую $|Z|$. Используя эти факты и регулярность кардинала $|Z|$, можно построить последовательность $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < |Z| \rangle$ элементов множества Z , для которой выполнено следующее условие:

для любой P -формулы $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ над $(A \cup B)$, существенно зависящей в X от переменных $x_1, \dots, x_n$, и любых ординалов $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < |Z|$ выполнено $C \models \neg \Phi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n})$.

В силу элиминации кванторов до P -формул это условие означает, что последовательность S является неразличимой последовательностью. Так как теория T стабильна, то множество Z' , состоящее из элементов последовательности S , является неразличимым множеством над $(A \cup B)$. Ясно, что тогда Z' будет независимым множеством в X над $(A \cup B)$. $\square$

Предложение 3. Пусть Z — свободное над A множество в Δ -базисном множестве X . Пусть базисная формула $\Phi(x, y)$ над A определяет биективное отображение X на множество Y . Тогда образ U множества Z при этом отображении будет свободным в Y над A .

Доказательство. Обозначим отображение, о котором говорится в условии теоремы, через f . Предположим, что множество $f(Z)$ не является свободным в Y над A . Это означает, что для некоторой базисной формулы $\Psi(x; y_1, \dots, y_n)$ над A и некоторых $d_1, \dots, d_n \in Z$ множество $\Psi(C; f(d_1), \dots, f(d_n))$ делит множество Y и содержит некоторый элемент $f(b)$ для $b \in Z$ и $f(b) \notin \{f(d_1), \dots, f(d_n)\}$. Тогда для базисной формулы

$$\begin{aligned} \Theta(x; d_1, \dots, d_n) = \\ = \exists y_1 \dots \exists y_n \exists z (\Phi(d_1, y_1) \wedge \dots \wedge \Phi(d_n, y_n) \wedge \Psi(z; y_1, \dots, y_n) \wedge \Phi(x, z)) \end{aligned}$$

множество $\Theta(C; d_1, \dots, d_n)$ будет делить множество X и содержать элемент $b \in Z$, отличный от $d_1, \dots, d_n$. Это противоречит свободе множества Z в X над A . $\square$

Определение.

1. Последовательность $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$, где μ — некоторый ординал, называется λ -позитивной конструкцией над A , если для любого $\alpha < \mu$ элемент a_α является λ -позитивно изолированным над множеством $S_\alpha = (A \cup \{a_\beta \mid \beta < \alpha\})$. При этом последовательность S называется λ -позитивной конструкцией над A множества $B = \bigcup \{S_\alpha \mid \alpha < \mu\}$.
2. Множество B называется λ -позитивно конструируемым (или просто λ -конструируемым) над A , если существует λ -позитивная конструкция $\langle a_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ над A , для которой $B = (\{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \cup A)$.

Предложение 4. Пусть теория T P -нормальна и t — позитивный тип. Тогда тип t эквивалентен своему ограничению $t \upharpoonright B$ на некоторое множество B мощности не больше $|L|$.

Доказательство. В силу P -нормальности теории T все базисные формулы вида $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in A$, входящие в тип t для конкретной базисной формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, являются эквивалентными. $\square$

Определение. Множество A называется λ -компактным, если любой λ -позитивный тип над A реализуется в A .

Замечание 2. Заметим, что если X более чем одноэлементное Δ -базисное множество, определяемое над множеством D , $|A| < \lambda$, то для любого λ -компактного множества M с условием $(D \cup A) \subseteq M$ мы имеем $\dim_A(X, M) \geq \lambda$. Это следует из базисной неприводимости и предложения 4, так как $\lambda > |L|$ и в M реализуется любой λ -позитивный тип над M .

Из предложения 4 получаем следующее утверждение.

Предложение 5. Если A — λ^+ -насыщенная модель, то A λ -компактна.

Определение. Пусть $A \subseteq B$. Множество B называется λ -позитивной оболочкой множества A , если множество B λ -компактно и является λ -конструируемым над A .

Предложение 6. Если множество B является максимальным в C (по включению) λ -конструируемым над A , то B λ -компактно.

Доказательство. Пусть $t(x)$ — произвольный λ -позитивный тип над B . По замечанию 1 существует максимальный λ -позитивный тип $p(x)$ над B , расширяющий тип $t(x)$. Пусть элемент a реализует тип $p(x)$. Из максимальной B вытекает, что $a \in B$. $\square$

Предложение 7. Если B — λ^+ -насыщенная модель, $A \subseteq B$, то существует множество $D \subseteq B$, являющееся λ -позитивной оболочкой множества A .

Доказательство. Ясно, что в качестве D можно взять максимальное λ -конструируемое над A подмножество множества B . $\square$

Предложение 8. Пусть B — λ^+ -насыщенная модель теории T , $A \subseteq B$. Тогда λ -позитивная оболочка A^* множества A в B является элементарной подмоделью структуры B .

Доказательство. По известному критерию элементарной эквивалентности и элиминации кванторов в теории T до P -формул требуется показать, что для любых P -формул $\Phi(x; \mathbf{y}), \Psi_1(x; \mathbf{y}), \dots, \Psi_n(x; \mathbf{y})$ и любого кортежа $\mathbf{a} \in A^*$ из истинности формулы

$$\exists x (\Phi(x; \mathbf{b}) \wedge \neg \Psi_1(x; \mathbf{b}) \wedge \dots \wedge \neg \Psi_n(x; \mathbf{b}))$$

в B следует истинность в B формулы

$$(\Phi(a; \mathbf{b}) \wedge \neg \Psi_1(a; \mathbf{b}) \wedge \dots \wedge \neg \Psi_n(a; \mathbf{b}))$$

для некоторого элемента $a \in A^*$. По замечанию 1 существует максимальный λ -позитивный тип $t(x)$ над $(\mathbf{a} \cup \mathbf{b})$, содержащий множество $\{\Phi(x; \mathbf{b}), \neg \Psi_1(x; \mathbf{b}), \dots, \neg \Psi_n(x; \mathbf{b})\}$. По определению λ -позитивной оболочки найдётся элемент $a \in A^*$, реализующий тип $t(x)$. $\square$

Теорема 1. Пусть M_0 — λ -позитивно конструируемое над E множество, $|E| \leq \lambda$, $|L| < \lambda$ и X — Δ -базисное множество, определяемое с помощью параметров из E . Пусть M получено добавлением к M_0 всех элементов, определяемых в C с помощью P -формул над M_0 . Тогда $\dim_E(X, M) \leq \lambda$.

Доказательство. Утверждение теоремы будем доказывать индукцией по длине γ λ -позитивной конструкции $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ множества M_0 над E . Для $\alpha < \gamma$ возьмём множества

$$S_\alpha^* = (S_\alpha \cup \{a \mid a \text{ определимо с помощью некоторой } P\text{-формулы над } S_\alpha\}).$$

Предположим, что $\dim_E(X, M) > \lambda$ и γ — минимальный ординал среди всех контрпримеров к теореме (при различных X). Из минимальности ординала γ вытекает, что для любого $\alpha < \gamma$ теорема верна с заменой M на S_α^* . Пусть $Z \subseteq M$ — свободное в X над E множество и $|Z| > \lambda$.

Случай 1: γ — непредельный ординал.

В силу условий $|L| \leq \lambda$, $|E| \leq \lambda$, $|Z| > \lambda$ и минимальности γ , найдётся такая базисная формула $\Phi_0(x, y; \mathbf{z})$, что выполнено условие $|G| > \lambda$, где

$$G = \{b \mid \Phi_0(C, a_{\gamma-1}; \mathbf{d}_b) = \{b\} \text{ для некоторых } b \in Z \text{ и } \mathbf{d}_b \in S_{\gamma-1}\}.$$

Определим следующую эквивалентность ε :

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{d}' \rangle \in \varepsilon \iff \exists x \exists y (\Phi_0(x, y; \mathbf{d}) \wedge \Phi_0(x, y; \mathbf{d}')).$$

В силу предложения 2 существует подмножество $Z' \subseteq Z$, свободное в X над $(E \cup A \cup \{a_{\gamma-1}\})$, для которого $|Z'| > \lambda$. Тогда по предложению 3 множество

$$H = \{\varepsilon \mathbf{d} \mid b \in \Phi_0(C, a_{\gamma-1}; \mathbf{d}), b \in Z'\}$$

будет независимым над A . Так как для различных $d_1, d_2 \in Z'$ множества $\Phi_0(d_1, a_{\gamma-1}; C)$ и $\Phi_0(d_2, a_{\gamma-1}; C)$ не пересекаются, то $|H| = |Z'| > \lambda$. Это противоречит минимальности ординала γ .

Случай 2: γ — предельный ординал.

Возьмём некоторый ординал $\delta < \gamma$, для которого $\dim_E(X, S_\delta) = \lambda$, и пусть $Z \subseteq (X \cap S_\delta)$ — свободное в X над E множество, для которого $|Z| = \lambda$.

Индукцией по ординалу $\mu \in (\gamma \setminus \delta)$ докажем следующее утверждение:

если некоторая P -формула $\Phi(x)$ над S_μ делит множество X , то существует формула $\Psi(x)$ над S_δ , которая делит множество X и для которой выполняется $(X \cap \Phi(C)) \subseteq (X \cap \Psi(C))$. ($\Diamond_\mu$)

В случае когда μ — предельный ординал, индукционный шаг тривиален. Пусть условие ($\Diamond_{\mu_0}$) выполнено. Покажем, что справедливо ($\Diamond_{\mu_0+1}$). Пусть P -формула $\Phi(x, \mathbf{d}; a_{\mu_0})$, где $\mathbf{d} \in S_{\mu_0}$, делит множество X . Рассмотрим λ -позитивный тип $q(z)$, изолирующий элемент a_{μ_0} над множеством S_{μ_0} .

Случай 2а: для некоторого $a \in S_\delta$ имеет место $a \in \Phi(C, \mathbf{d}; a_{\mu_0})$.

В этом случае в качестве $\Psi(x)$ можно взять формулу $(x\Phi)(x, a)$.

В дальнейшем будем предполагать, что случай 2а не имеет места. Так как тип $q(z)$ полон над S_{μ_0} и $S_\delta \subseteq S_{\mu_0}$, то для любой реализации b типа $q(z)$ мы имеем $(\Phi(C, \mathbf{d}; b) \cap S_\delta) = \emptyset$.

СЛУЧАЙ 2б: существует некоторая P -формула $\Theta(z) \in q^+(z)$, для которой множество Y делит множество X , где $Y = \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C)\}$.

Множество Y определяется P -формулой над S_{μ_0} , и по индукционному предположению найдётся такая P -формула $\Xi(x)$ над S_δ , которая делит множество X и для которой выполняется включение $(Y \cap X) \subseteq \Xi(C)$. Из включения $\Phi(C, \mathbf{d}; a_{\mu_0}) \subseteq X$ мы получаем утверждение $(\diamond_{\mu_0+1})$.

СЛУЧАЙ 2в: отрицание случаев 2а и 2б.

Возьмём множество P -формул Q над S_{μ_0} , имеющее мощность $\kappa < \lambda$, такое что тип q порождается множеством $(q^+ \cup \{\neg\Theta \mid \Theta \in Q\})$. По условию этого случая мы имеем включение

$$Z \subseteq \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C), \Theta(z) \in Q\},$$

а также для каждого $a \in Z$ справедливо включение

$$(q^+(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \bigcup \{\Theta(C) \mid \Theta(z) \in Q\}.$$

По компактности и неприводимости для некоторых P -формул $\Delta(z) \in q^+(C)$ и $\Theta(z) \in Q$ выполнено условие

$$(\Delta(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta(C).$$

В силу условий на мощности $|Z| \geq \lambda$ и $|Q| < \lambda$ найдётся такая формула $\Theta_0 \in Q$, что для некоторых P -формул $\Delta_1(z), \Delta_2(z) \in q^+(C)$ и различных $a_1, a_2 \in Z$ выполнены включения

$$(\Delta_i(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Тогда для $\Delta_0(z) = (\Delta_1(z) \wedge \Delta_2(z))$ выполняется включение

$$(\Delta_0(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Так как такое включение записывается с помощью P -формулы $\Gamma(x)$, то P -эквивалентность $x\Gamma$ будет делить множество X и один из её классов будет содержать более одного элемента из множества S_δ . Это противоречит свободе множества Z в множестве X .

Теперь, используя утверждения $(\diamond_\mu)$ для всех $\mu < (\gamma \setminus \delta)$, придём к противоречию с предположением $\dim_E(X, M) > \lambda$. Напомним, что $Z \subseteq M$ — свободное в X над E множество и $|Z| > \lambda$. Для каждого $a \in Z$ пусть α_a — ординал, для которого $a_{\alpha_a} = a$. Можно считать, что для любого $a \in Z$ справедливо условие $\alpha_a \geq \delta$. В силу утверждения $(\diamond_\mu)$ для каждого $a \in Z$ существуют базисная формула $\Phi_a(x, \mathbf{y})$ и параметры $\mathbf{d} \in S_\delta$, такие что выполнено условие $a \in \Phi_a(C, \mathbf{d}_a)$ и $\Phi_a(C, \mathbf{d}_a)$ делит X . В силу условий $|L| \leq \lambda$ и $|Z| > \lambda$ можно считать, что вид формулы $\Phi_a(x, \mathbf{y})$ не зависит от a , обозначим её через $\Phi(x, \mathbf{y})$. Рассмотрим эквивалентность $\eta = x\Phi$. Так как её классы делят множество X ,

а множество Z свободно в X , то каждый её класс содержит не более одного элемента множества Z . По утверждению $(\diamond_\mu)$ для всех $\mu < (\gamma \setminus \delta)$ классы эквивалентности η , содержащие элементы множества Z , базисно определимы над множеством S_δ . Так как эти классы содержат элементы независимого в X множества, то множество $\eta(Z)/\eta$ будет независимым подмножеством обобщённо базисного множества $\eta(X)/\eta$. Тогда условие $|\eta(Z)/\eta| > \lambda$ будет противоречить минимальности ординала γ . $\square$

Замечание 3. Из предыдущей теоремы вытекает, что если к условиям теоремы добавить, что M_0 — λ -позитивная оболочка множества E и $|X| > 1$, то получим, что $M = M_0$ и справедливо равенство $\dim_E(X, M) = \lambda$. Это следует из того, что в M реализуется любой λ -позитивный тип над E .

Следующая теорема содержится в [6].

Теорема 2 [6]. Пусть B — λ -позитивно конструируемая над $(D \cup A)$ модель теории T , $|A| \geq \lambda$, $t(x)$ — тип над $(D \cup A)$, A — множество, независимое в типе $t(x)$. Пусть выполняется следующее условие:

если некоторая P -формула $\Phi(x)$ над $(D \cup A)$ делит тип $t(x)$, то существует формула $\Psi(x)$ над A , которая делит тип $t(x)$ и для которой выполняется $t(x) \vdash (\Phi(x) \rightarrow \Psi(x))$.

Тогда множество A является максимальным независимым в типе $t(x)$ подмножеством множества $t(B)$.

Для доказательства основной теоремы данной статьи нам потребуется другой вариант этой теоремы. Отметим, что доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 3. Пусть M — некоторая λ -компактная модель теории T , X — Δ -базисное множество, A — максимальное подмножество модели M , являющееся независимым в X , $|A| \geq \lambda$. Пусть для множества D выполняется следующее условие:

если некоторая P -формула $\Phi(x)$ над $(D \cup M)$ делит множество X , то существует формула $\Psi(x)$ над M , которая делит множество X и для которой выполняется соотношение $(X \cap \Phi(C)) \subseteq (X \cap \Psi(C))$. (*)

Тогда для любого λ -конструируемого над $(D \cup M)$ множества B множество A остаётся максимальным независимым в X подмножеством множества B .

Доказательство. Пусть $S = \langle a_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$ — λ -позитивная конструкция над $(D \cup A)$ для структуры B .

Индукцией по $\alpha < \mu$ покажем, что имеет место утверждение $(*)_\alpha$, которое получается из условия $(*)$ заменой D на $(D \cup S_\alpha)$.

При $\alpha = 0$ это условие $(*)$. Пусть для всех $\beta < \alpha$ утверждение $(*)_\beta$ имеет место. Для предельного α шаг индукции очевиден. Будем считать что ординал $\alpha - 1$ существует. Пусть P -формула $\Phi(x, \mathbf{d}; a_{\alpha-1})$ делит множество X , где

$\Phi(x, \mathbf{y}; z)$ — формула без параметров и $\mathbf{d} \in (S_{\alpha-1})$. Рассмотрим λ -позитивный тип $q(z)$, изолирующий элемент $a_{\alpha-1}$ над $S_{\alpha-1}$.

СЛУЧАЙ 1: для некоторого $a \in M$ выполняется $a \in \Phi(C, \mathbf{d}; a_{\alpha-1})$.

В этом случае в качестве $\Psi(x)$ можно взять формулу $(x\Phi)(x, a)$.

В дальнейшем будем предполагать, что случай 1 не имеет места. Так как тип $q(z)$ полон над $S_{\alpha-1}$ и $M \subseteq S_{\alpha-1}$, то для любой реализации b типа $q(z)$ мы имеем $(\Phi(C, \mathbf{d}; b) \cap M) = \emptyset$.

СЛУЧАЙ 2: существует некоторая P -формула $\Theta(z) \in q^+(z)$, для которой множество Y делит множество X , где $Y = \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C)\}$.

Множество Y определяется P -формулой над $S_{\alpha-1}$, и по предположению индукции найдётся P -формула $\Xi(x)$ над M , которая делит множество X и для которой выполняется включение $(X \cap Y) \subseteq \Xi(C)$. Из включения $\Phi(C, \mathbf{d}; a_{\alpha-1}) \subseteq Y$ мы получаем утверждение $(*)_\alpha$.

СЛУЧАЙ 3: отрицание случаев 1 и 2.

Возьмём множество P -формул Q над $S_{\alpha-1}$, имеющее мощность $\varkappa < \lambda$, такое что тип q порождается множеством $(q^+ \cup \{\neg\Theta \mid \Theta \in Q\})$. По условию случая 3 мы имеем включение

$$A \subseteq \bigcup \{\Phi(C, \mathbf{d}; b) \mid b \in \Theta(C), \Theta(z) \in Q\},$$

а также для каждого $a \in A$ выполняется включение

$$(q^+(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \bigcup \{\Theta(C) \mid \Theta(z) \in Q\}.$$

Вследствие компактности и неприводимости для некоторых P -формул $\Delta(z) \in q^+(C)$ и $\Theta(z) \in Q$ выполнено условие

$$(\Delta(C) \cap \Phi(a, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta(C).$$

В силу условий на мощности $|A| \geq \lambda$ и $|Q| < \lambda$ найдётся такая формула $\Theta_0 \in Q$, что для некоторых P -формул $\Delta_1(z), \Delta_2(z) \in q^+(C)$ и различных $a_1, a_2 \in A$ выполнены включения

$$(\Delta_i(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Тогда для $\Delta_0(z) = (\Delta_1(z) \wedge \Delta_2(z))$ выполняется включение

$$(\Delta_0(C) \cap \Phi(a_i, \mathbf{d}; C)) \subseteq \Theta_0(C), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Так как такое включение записывается с помощью P -формулы $\Gamma(x)$, то P -эквивалентность $x\Gamma$ будет делить множество X и один из её классов будет содержать более одного элемента из множества A . Это противоречит независимости множества A в X .

Теперь докажем утверждение теоремы, используя утверждения $(*)_\alpha$ для всех $\alpha < \mu$. Предположим, что утверждение теоремы ложно, т. е. для некоторого $\alpha < \mu$ элемент a_α принадлежит множеству X , $a_\alpha \notin A$ и множество $(A \cup \{a_\alpha\})$ независимо в X . Пусть λ -позитивный тип $q(x)$ λ -изолирует элемент a_α над множеством S_α .

СЛУЧАЙ а): позитивный тип $q^+(x)$ делит множество X .

По компактности получаем, что некоторая P -формула $\Phi(x) \in q^+(x)$ делит множество X . По утверждению $(*)_\alpha$ найдётся P -формула $\Psi(x)$ над M , которая делит множество X и для которой выполнено условие $(X \cap \Phi(C)) \subseteq (X \cap \Psi(C))$. Так как множество $(A \cup \{a_\alpha\})$ независимо в X , то элемент a_α свободен в $(X \cap \Phi(C))$. Так как модель M λ -компактна и выполнено условие $\lambda > |L|$, можно найти внутри M свободное в $(X \cap \Phi(C))$ множество A_1 с условием $|A_1| = \lambda$. Так как тип $q(x)$ полон над M и является λ -позитивным и элемент a_α не принадлежит модели M , то множество A_1 покрывается семейством P -множеств мощности меньше λ , каждое из которых делит множество $(X \cap \Phi(C))$. Следовательно, одно из множеств этого семейства содержит более одного элемента из множества A_1 . Это противоречит независимости множества A_1 в $(X \cap \Phi(C))$.

СЛУЧАЙ б): отрицание случая а).

Так как тип $q(x)$ является λ -позитивным, $a_\alpha \notin A$, то множество A покрывается семейством P -множеств мощности меньше λ , каждое из которых делит множество X . Следовательно, одно из множеств этого семейства содержит более одного элемента из множества A . Это противоречит независимости множества A в множестве X . $\square$

7. Интерпретация графов

Теорема 4. Пусть теория T степени Фреше A^F некоторой структуры A стабильна и не является P -коммутативной. Тогда в T интерпретируется класс всех графов или класс всех двудольных графов.

Доказательство. Из стабильности теории T по предложению 1 получаем P -нормальность теории T . С учётом элиминации кванторов до P -формул в теории степени Фреше получаем, что отношение $A \approx B$ равносильно отношению $A \equiv B$.

СЛУЧАЙ 1: не выполняется условие 3) определения коммутативной теории.

Пусть базисный треугольник $\langle X_0, Y, X_1 \rangle$ не является альтернативно связанным, т. е. для некоторого обобщённо базисного множества Y' , $(Y')^* \subseteq Y$, ни для какого $i \leq 1$ и ни для какой копии X' обобщённо базисного множества Y' не выполняются условия, что $(X')^* \subseteq X_i$ и Y' , X' являются базисно связанными.

Так как мы работаем в T^{req} , то можно считать, что Y' является Δ -базисным множеством. Рассмотрим эквивалентности α, β из определения базисного треугольника $\langle X_0, Y, X_1 \rangle$ и классы $U_1 = \alpha X_1$, $V_1 = \beta X_1$, $U_2 = \alpha X_2$, $V_2 = \beta X_2$. Из условия данного случая вытекает, что все эти классы попарно различны. Ясно также, что эти классы лежат в одном $(\alpha \vee \beta)$ -классе D , который состоит из бесконечного числа как α -классов, так и β -классов. Мы будем также считать, что Δ -базисные эквивалентности α и β минимальны в том смысле, что не существует строго меньших Δ -базисных эквивалентностей α' и β' , для которых

существует базисный треугольник, обладающий перечисленными выше свойствами с заменой эквивалентностей α, β соответственно на эквивалентности α', β' .

Пусть дан двудольный граф Γ с долями A и B .

В $(\alpha \vee \beta)$ -классе D возьмём α -класс r и β -класс s . В классе s возьмём независимое множество A' , а в классе r независимое над A' множество B' , такие что существуют биективные отображения A на A' и B на B' ; образы элементов $a \in A$ и $b \in B$ при этих отображениях будем обозначать соответственно через $a' \in A'$ и $b' \in B'$. Для $a \in A$ и $b \in B$ через a^* и b^* будем обозначать соответственно $\alpha a'$ и $\beta b'$.

Пусть $\delta = (\alpha \wedge \beta)$. Рассмотрим множество $W_\Gamma = \{(a^* \cap b^*) \mid \langle a, b \rangle \in \Gamma\}$. Пусть $\lambda = \max\{|L|^+, |(A \cup B)|^+\}$.

Оставшуюся часть доказательства случая 1 теоремы 4 оформим в виде отдельной леммы.

Лемма 1. Пусть M — λ -позитивная оболочка множества $(A' \cup B')$. Для каждого $G \in W_\Gamma$ возьмём копию $X_G \subseteq G$ Δ -базисного множества X' с носителем γ и подмножество $R_G \subseteq X_G$, такие что выполнены следующие условия:

- 1) копия X_G свободна в G ;
- 2) $(M \cap X_G) \neq \emptyset$;
- 3) $|R_G| = \lambda^+$;
- 4) множество $\bigcup \{R_G \mid G \in W_\Gamma\}$ свободно над M .

Пусть M_Γ — λ -позитивная оболочка множества $E = (M \cup \bigcup \{R_G \mid G \in W_\Gamma\})$. Тогда условие $\langle a, b \rangle \in \Gamma$ равносильно следующему условию:

размерность некоторой копии множества X' , свободной в $(a^* \cap b^*)$, больше λ .

Доказательство. Сначала покажем, что для любой пары $\langle a, b \rangle \notin \Gamma$ любая свободная в $(a^* \cap b^*)$ копия U множества Y' , имеющая непустое пересечение с моделью M_Γ , имеет непустое пересечение с моделью M . Для этого достаточно показать, что выполняется условие теоремы 3, где A — множество, являющееся максимальным в M свободным подмножеством множества $(a^* \cap b^*)$, а $D = E$. Пусть $\Phi(x; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ — базисная формула, для которой $\mathbf{d} \in \bigcup \{R_G \mid G \in W_\Gamma\}$, $\mathbf{b} \in M$ и множество $\gamma(\Phi(C; \mathbf{d}; \mathbf{b}))$ делит множество $(a^* \cap b^*)$. По компактности можно считать (подправив формулу Φ , не изменяя параметров), что множество $\Phi(C; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ замкнуто относительно эквивалентности γ , причём при любых параметрах $\mathbf{d}, \mathbf{b}$. Доказательство проведём индукцией по длине кортежа $\mathbf{d}$. Если этот кортеж пуст, то доказывать нечего. Пусть кортеж $\mathbf{d} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ не пуст, состоит из попарно различных элементов и $d_1 \in R_G$ для некоторого $G \in W_G$. Пусть $\mathbf{d}' = \langle d_2, \dots, d_n \rangle$.

СЛУЧАЙ 1a: множество

$$K = \{a \mid a \in \Phi(C, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{ для некоторого } b \in X_G\}$$

делит множество $(a^* \cap b^*)$.

По условию 2) существует элемент $a_1 \in (M \cap X_G)$. По компактности найдётся такая базисная эквивалентность ε , что $\delta \subseteq \varepsilon$ и множество

$$R = \{a \mid C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{ для некоторого } b \in \varepsilon(a_1)\}$$

делит множество $(a^* \cap b^*)$. Так как множество K определяется базисной формулой с параметрами $\mathbf{d}'$, $\mathbf{b}$, a_1 , $a_1 \in M$, и выполнено включение $K \subseteq R$, то условие (*) теоремы 3 выполняется по предположению индукции.

СЛУЧАЙ 16: множество K не делит множества $(a^* \cap b^*)$, т. е. выполняется включение $(a^* \cap b^*) \subseteq K$.

Из того, что элементы $d_1, \dots, d_n$ попарно различны и множество $\{d_1, \dots, d_n\}$ свободно над M , получаем, что для любого $b \in X_G$ найдётся элемент $a \in (a^* \cap b^*)$, для которого выполнено $C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b})$. Из того, что множество $(A' \cup B')$ свободно, из условия 4), а также из базисной нормальности теории T получаем, что для некоторой эквивалентности $\theta \in \{\alpha, \beta\}$ и любой копии U множества X' , лежащей в θ -классе $\theta(a^* \cap b^*)$, найдутся такие параметры $\mathbf{d}'_0, \mathbf{b}_0$, что формула $\Phi(x, y, \mathbf{d}'_0; \mathbf{b}_0)$ будет определять биективное отображение U/ϱ на $(a^* \cap b^*)/\sigma$, где $\varrho = y\Phi$, $\sigma = x\Phi$. Ясно, что тогда все копии множества X' , лежащие в θ -классе $\theta(a^* \cap b^*)$, будут базисно связанными. Это противоречит выбору базисного треугольника $\langle X_0, Y, X_1 \rangle$ и множества X' . $\square$

Теперь в силу теоремы 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой пары $\langle a, b \rangle \notin \Gamma$ все максимальные в M свободные множества в свободных в $(a^* \cap b^*)$ копиях множества Y' остаются максимальными в λ -позитивной оболочке M_Γ . В силу теоремы 3 достаточно показать, что для любой пары $\langle a, b \rangle \notin \Gamma$ выполняется условие этой теоремы для случая, когда A является максимальным в M свободным подмножеством в свободной в $(a^* \cap b^*)$ копии U множества Y' , а в качестве D берётся множество E . Из теоремы 1 и замечания 3 получаем, что $|A| = \lambda$.

Пусть $\Phi(x; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ — базисная формула, $\mathbf{d} \in \bigcup \{R_G \mid G \in W_\Gamma\}$, $\mathbf{b} \in M$ и множество $\Phi(C; \mathbf{d}; \mathbf{b})$ делит множество U .

Далее мы проведём рассуждения, похожие на те, которые были изложены в начале доказательства данной теоремы.

Доказательство проведём индукцией по длине кортежа $\mathbf{d}$. Если этот кортеж пуст, то доказывать нечего. Пусть кортеж $\mathbf{d} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ не пуст, состоит из попарно различных элементов и $d_1 \in R_G$ для некоторого $G \in W_G$. Пусть $\mathbf{d}' = \langle d_2, \dots, d_n \rangle$.

СЛУЧАЙ а): множество

$$K = \{a \mid a \in \Phi(C, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{ для некоторого } b \in X_G\}$$

делит множество U .

По условию 2) существует некоторый элемент $a_1 \in (M \cap X_G)$. По компактности найдётся такая базисная эквивалентность ε , что выполнено $\delta \subseteq \varepsilon$ и множество

$$R = \{a \mid C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b}) \text{ для некоторого } b \in \varepsilon(a_1)\}$$

делит множество U . Так как множество K определяется базисной формулой с параметрами $\mathbf{d}', \mathbf{b}, a_1, a_1 \in M$, и справедливо включение $K \subseteq R$, то условие $(*)$ теоремы 3 выполняется по предположению индукции.

Случай б): множество K не делит множества U , т. е. справедливо включение $U \subseteq K$.

Из того, что элементы $d_1, \dots, d_n$ попарно различны и множество $\{d_1, \dots, d_n\}$ свободно над M , получаем, что для любого $b \in X_G$ найдётся элемент $a \in U$, для которого выполнено $C \models \Phi(a, b, \mathbf{d}'; \mathbf{b})$. Из того, что множество $(A' \cup B')$ свободно и копия U свободна в $(a^* \cap b^*)$, условия 4), а также базисной нормальности теории T получаем, что для некоторой эквивалентности $\theta \in \{\alpha, \beta\}$ в любом δ -классе Q , лежащем в θ -классе $\theta(a^* \cap b^*)$, найдётся такая копия V множества X' и такие параметры $\mathbf{d}'_0, \mathbf{b}_0$, что формула $\Phi(x, y, \mathbf{d}'_0; \mathbf{b}_0)$ будет определять биективное отображение X_G/ϱ на V/σ , где $\varrho = y\Phi$, $\sigma = x\Phi$. Ясно, что тогда для любых двух θ -эквивалентных δ -классов V_1, V_2 и любой копии U_1 множества X' , лежащей в V_1 , найдётся такая копия U_2 множества X' , лежащая в V_2 , что U_1 и U_2 будут базисно связанными. Это противоречит выбору базисного треугольника $\langle X_0, Y, X_1 \rangle$ и множества X' .

СЛУЧАЙ 2: не выполняется условие 2) определения коммутативной теории.

Пусть $\langle X, Y \rangle$ — Δ -аддитивная пара Δ -базисных множеств, которая не является наследственно базисно связанной, т. е. некоторое обобщённо базисное множество $X_1, X_1^* \subseteq X$, с образующей α не является базисно связанным ни с какой своей обобщённо базисной копией $Y_1, Y_1^* \subseteq Y$, с образующей α .

Взяв необходимые пересечения X и Y с базисными множествами, а также факторы (мы работаем в T^{req}), можно считать, что X_1 — Δ -базисное множество и $\{X_1\}$ свободно в X . По определению одноэлементные множества являются базисно связанными. Условие одноэлементности записывается с помощью P -формулы. По компактности из свободы X_1 в X и условия $X \approx Y$ вытекает, что X_1 более чем одноэлементно.

По определению Δ -аддитивной пары существуют Δ -базисное множество Z и однородно Δ -аддитивная последовательность $S = \langle \alpha_i \mid i < \lambda \rangle$ в Z , такие что $(X \cup Y) \subseteq Z$ и $\bigcap S$ является общим носителем X и Y . Можно считать, что пара $\langle X, Y \rangle$ свободна в Z .

Из теоремы компактности следует, что можно считать, что Δ -базисное множество Z минимально в том смысле, что для любой копии U множества X с условиями $U \approx X$ и $U \subseteq \alpha_0 X$ множество X_1 будет базисно связанным с некоторой своей копией $U_1 \subseteq U$. Из компактности также следует, что базисная связь, указанная выше, не зависит от выбора U (осуществляется одной и той же P -формулой). Так как мы работаем в T^{req} , то можно считать, что эти связи инъективны.

Ещё раз уменьшив Z , можно считать, что X покрывается копиями множества X_1 и $\{X\}$ свободно в $(\alpha_0(X) \cup \alpha_0(Y))$. Можно также считать, что предыдущие свойства имеют место с заменой X на Y . Учитывая все предыду-

щие свойства, рефлексивность формул при определении базисной связанности и базисной нормальности, получаем следующие свойства:

- а) для любых копий U, V множества X , лежащих в множестве $\alpha_0(X)$, любая копия Q множества X_1 , лежащая в множестве U , инъективно связана с некоторой копией W множества X_1 , лежащей в множестве V ;
- б) свойство а) с заменой X на Y .

Из свойств а), б), исходного свойства базисной несвязанности X_1 ни с какой своей копией из множества Y и рефлексивности формул при определении базисной связанности и базисной нормальности получаем следующие свойства:

- в) никакая копия множества X_1 из множества $\alpha_0(X)$ не связана с копией множества X_1 из множества $\alpha_0(Y)$;
- г) свойство в) с заменой X на Y .

Пусть дан граф Γ с множеством вершин B . Возьмём базисно независимое в Z множество B' копий множества X , являющихся $\approx$ -эквивалентными множеству X , для которого $|B'| = |B|$. Так как множество Z/α_0 аддитивно, то на нём базисно определимо аффинное сложение $w = x + y - z$. Зафиксируем некоторый α_0 -класс U_0 и рассмотрим на множестве Z/α_0 операцию $w = x + y - U_0$. Эту операцию будем обозначать через $+$. Она задаёт на P/α_0 структуру абелевой группы, и α_0 -класс U_0 будет нулём этой группы.

Пусть $\lambda = \max\{|L|^+, |B|^+\}$.

По условию $|B'| = |B|$ существует биективное отображение B на B' , образ элемента $b \in B$ при этом отображении будем обозначать через $b' \in B'$.

Рассмотрим множество $W_\Gamma = \{(a' + b') \mid \langle a, b \rangle \in \Gamma\}$.

Оставшуюся часть доказательства случая 2 теоремы 4 оформим в виде леммы, аналогичной лемме 1.

Лемма 2. Пусть M — λ -позитивная оболочка множества $(B' \cup \{U_0\})$. Для каждого $G \in W_\Gamma$ возьмём копию $X_G \subseteq G$ Δ -базисного множества X_1 и подмножество $R_G \subseteq X_G$, такие что выполнены следующие условия:

- 1) копия X_G свободна в G ;
- 2) $(M \cap X_G) \neq \emptyset$;
- 3) $|R_G| = \lambda^+$;
- 4) множество $\bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\}$ свободно над M .

Пусть M_Γ — λ -позитивная оболочка множества $E = (M \cup \bigcup\{R_G \mid G \in W_\Gamma\})$. Тогда условие $\langle a, b \rangle \in \Gamma$ равносильно следующему:

размерность некоторой копии множества X_1 , свободной в $(a' + b')$, больше λ .

Доказательство этой леммы практически повторяет доказательство леммы 1 с использованием всех свойств, установленных в начале доказательства случая 2. $\square$

Литература

- [1] Заффе Ю., Палютин Е. А., Старченко С. С. Модели суперстабильных хорновых теорий // Алгебра и логика. — 1985. — Т. 24, № 3. — С. 278—326.
- [2] Палютин Е. А. Категоричные хорновы классы. 1 // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 5. — С. 582—614.
- [3] Палютин Е. А. Нормальность хорновых теорий с немаксимальным спектром // Алгебра и логика. — 1985. — Т. 24, № 5. — С. 551—587.
- [4] Палютин Е. А. Элиминация кванторов для коммутативных теорий // Докл. РАН. — 1998. — Т. 363, № 3. — С. 301—303.
- [5] Палютин Е. А. Примитивно связанные теории // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, № 2. — С. 145—169.
- [6] Палютин Е. А. Стабильные теории Фреше-степеней // Сиб. электрон. мат. изв. — 2008. — Т. 5. — С. 699—607.
- [7] Палютин Е. А., Старченко С. С. Спектры хорновых классов // Докл. РАН. — 1986. — Т. 290, № 6. — С. 1298—1300.
- [8] Палютин Е. А., Старченко С. С. Хорновы теории с немаксимальным спектром // Тр. Ин-та мат. СО АН СССР. — 1988. — Т. 8. — С. 108—162.
- [9] Palyutin E. A. Quasivarieties with nonmaximum spectrum // Abstracts of 6th Int. Congress of Log. Method. Phil. Sci. — Moscow, 1987. — P. 121—122.
- [10] Palyutin E. A. Additive theories // S. Buss, P. Hajek, P. Pudlak, eds., Logic Colloquium '98. Proc. of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Prague, Czech Republic, August 9—15, 1998. — Natick: A. K. Peters, 2000. — (Lect. Notes Logic; Vol. 13). — P. 352—356.
- [11] Palyutin E. A., Starchenko S. S. Horn theories with non-maximal spectrum // Amer. Math. Soc. Transl. (2). — 1999. — Vol. 195. — P. 225—284.
- [12] Pillay A. Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 89, no. 4. — P. 666—672.
- [13] Shelah S. Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models. — Amsterdam: North-Holland, 1990.
- [14] Ziegler M. Model theory of modules // Ann. Pure Appl. Logic. — 1984. — Vol. 26. — P. 149—213.

