

Об использовании нестационарного уравнения Тапперта в качестве условия прозрачной границы

М. Ю. ТРОФИМОВ

*Тихоокеанский океанологический
институт ДВО РАН им. В. И. Ильичёва*
e-mail: trofimov@poi.dvo.ru

П. С. ПЕТРОВ

*Тихоокеанский океанологический
институт ДВО РАН им. В. И. Ильичёва*
e-mail: petrov@poi.dvo.ru

УДК 519.633.6+517.95+534.2

Ключевые слова: волновое уравнение, условия прозрачной границы, нормальные моды.

Аннотация

В статье получен нестационарный аналог параболического уравнения Тапперта. Предложен новый подход к выводу операторной асимптотики Тапперта, основанный на некоммутативном анализе. Полученное нестационарное уравнение предлагается использовать в качестве условия прозрачной границы для волнового уравнения в подводной акустике. Условие прозрачной границы такого вида имеет низкую вычислительную стоимость и обеспечивает систематический учёт изменений скорости звука. Это подтверждено различными численными экспериментами, включающими распространение нормальных мод и волновых полей от точечного источника.

Abstract

M. Yu. Trofimov, P. S. Petrov, On the application of nonstationary form of the Tappert equation as an artificial boundary condition, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 191–206.

In this paper, a nonstationary analog of the range refraction parabolic equation is derived. A new approach to the derivation of Tappert's operator asymptotic formula with the use of noncommutative analysis is presented. The obtained nonstationary equation is proposed as an artificial boundary condition for the wave equation in underwater acoustics. This form of artificial boundary condition has low computational cost and systematically takes into account variations of sound speed. This is confirmed by various numerical experiments, including propagation of normal modes and wave fields produced by point source.

1. Введение

В настоящей работе мы рассматриваем в ограниченной области, а именно в двумерном волноводе

$$\Omega = \{(x, y) \mid a < y < b\},$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 2, с. 191–206.

© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

распространение волн, удовлетворяющих волновому уравнению

$$Lu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Численное моделирование распространения волн в таком волноводе естественным образом приводит к проблеме ограничения области, в которой будут проводиться вычисления, по продольной переменной x с помощью искусственной границы, установленной таким образом, чтобы она не влияла на движение волн во внутренней части области.

Существует два основных подхода к решению этой проблемы. Первый состоит в установке поглощающего слоя на интересующей нас границе, (см., например, [2]), при втором ставится условие прозрачной (или искусственной) границы для смешанной задачи для волнового уравнения (1) во внутренней части области. Это условие должно описывать только те волны, распространяющиеся в силу (1), которые движутся наружу из рассматриваемой области. Исторически одним из первых условий такого типа было условие излучения Зоммерфельда. Проблема постановки прозрачных граничных условий рассматривается в работах многих специалистов по прикладной математике (см., например, обзор [1]). В классической работе [3] был предложен метод факторизации дифференциального оператора на два псевдодифференциальных. Эти псевдодифференциальные операторы соответствуют волнам, распространяющимся вправо и влево:

$$L = L^+ \cdot L^-, \quad L^\pm = \frac{\partial}{\partial x} \pm D, \quad D = \sqrt{\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}. \quad (2)$$

Таким образом, идеальное условие прозрачной границы может быть поставлено с помощью уравнения $L^- u = 0$, следовательно, является нелокальным по времени и пространственным переменным. Приближение положительной ветви квадратного корня дифференциальными операторами (с помощью рядов Тейлора или Паде) позволяет получить приближённые, но локальные варианты условий прозрачной границы. Хотя эти условия не обеспечивают полного поглощения, с их помощью амплитуда волны, отражённой от границы, может быть существенно уменьшена. В рамках этого подхода каждое повышение точности условий прозрачной границы требует дополнительной работы с приближением псевдодифференциального оператора и последующей дискретизацией полученных условий. Следующий важный шаг в направлении повышения точности вычислений с условиями прозрачной границы был сделан Р. Хигдоном в [8, 9]. Он показал, что условия Майды—Энгквиста высших порядков могут быть получены простым перемножением дифференциальных операторов первого порядка.

Условия типа Хигдона имеют вид

$$\left[\prod_{j=1}^J \left(\frac{\partial}{\partial t} + C_j \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0. \quad (3)$$

Заметим, что волны с фазовыми скоростями C_j точно удовлетворяют этому условию, и, таким образом, оно особенно эффективно, когда каким-либо образом можно получить дополнительную информацию о модовой структуре решения (1) и соответствующим образом выбрать коэффициенты C_j . К сожалению, когда априорная информация о модовой структуре решения отсутствует, условия типа Хигдона обеспечивают меньшую прозрачность границы. В этом случае точность вычислений может быть увеличена путём повышения порядка условий (3), что ведёт к значительному увеличению сложности вычислений. В [6, 7] был предложен удобный алгоритм численной реализации условий типа Хигдона произвольно высокого порядка.

Существенным недостатком условий вида (3) является их неприменимость для случая, когда на границе скорость распространения волн зависит от продольной переменной x : $c = c(x)$. По нашему мнению, эти условия также учитывают зависимость скорости c от поперечной переменной y не вполне естественным образом. В [4] было предложено условие прозрачной границы нового типа, частично избавленное от этих недостатков, хотя и не обеспечивающее такой точности, как условия Хигдона высоких порядков, реализованные с помощью алгоритма Дживоли и др., в случае постоянной скорости c . Эта работа посвящена более детальному исследованию условий прозрачной границы, предложенных в [4].

В упомянутой работе [4] мы вывели нестационарную форму параболического уравнения Тапперта и затем использовали его в качестве условия прозрачной границы для волнового уравнения (1). Стационарная форма этого уравнения для задач распространения звуковых волн в океанском волноводе с произвольной зависимостью индекса рефракции от глубины была предложена Ф. Таппертом в [11]. Мы также подразумеваем подводную акустику как основную область приложения наших результатов, поэтому будем пользоваться соответствующей терминологией (скорость звука, акустическая волна), хотя рассмотренные ниже модели, вообще говоря, могут описывать волны произвольной природы. С точки зрения акустики наиболее интересным является случай, когда скорость звука зависит от глубины y . В оригинальной работе Ф. Тапперта аналог используемой нами формулы был приведён без вывода, а в её справедливости можно было убедиться непосредственной проверкой. Мы предлагаем новый способ получения этого уравнения, основанный на простейших идеях некоммутативного анализа. Также в статье содержится подробное доказательство корректности смешанной задачи для уравнения (1) и наших условий прозрачной границы. Завершает работу серия численных экспериментов с различными их формами. Для краткости мы будем называть условие прозрачной границы в форме нестационарного уравнения Тапперта просто условием Тапперта.

2. Вывод условия Тапперта для прозрачной границы

В этом разделе мы коротко обсудим метод, применённый нами для вывода нестационарной формы уравнения Тапперта. Мы предполагаем, что в уравнении (1) скорость звука $c = c(y)$ зависит только от глубины и эта зависимость достаточно гладкая. Таким образом, идеальное условие прозрачной границы может быть получено из (2) как $L^-u = 0$, или же

$$u_x = \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}} u = \sqrt{A + \varepsilon B} u. \quad (4)$$

Далее мы строим аппроксимацию положительного квадратного корня в обычном предположении малости угла между направлением распространения волн и осью x . Это означает, что оператор $(\partial^2/\partial y^2) = \varepsilon B$ можно рассматривать как малый, имеющий порядок $O(\varepsilon)$. С другой стороны, оператор $(1/c^2)(\partial^2/\partial t^2) = A$ мы считаем имеющим порядок $O(1)$. Теперь мы используем общую формулу из некоммутативного анализа (см. [10] для уточнения деталей)

$$f(A + \varepsilon B) = f(A) + \varepsilon B \frac{f(A) - f(A)}{A - A} + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

Это асимптотическое равенство верно в достаточно широком классе символов f . Мы применим эту формулу к квадратному корню в (4) и получим операторное разложение

$$(A + \varepsilon B)^{1/2} = A^{1/2} + \varepsilon C + O(\varepsilon^2), \quad (6)$$

где оператор C находится как

$$\begin{aligned} C &= B \frac{A^{1/2} - A^{3/2}}{A - A} = B \frac{1}{A^{1/2} + A^{3/2}} = \\ &= B \int_0^\infty e^{-sA^{1/2}} e^{-sA^{3/2}} ds = \int_0^\infty e^{-sA^{1/2}} B e^{-sA^{1/2}} ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Мы подставляем аппроксимацию (6) вместо квадратного корня в уравнение (6). Опуская технические детали, мы получаем отсюда аналог уравнения Тапперта с зависимостью от времени для волн, распространяющихся вправо и влево:

$$u_x \pm \frac{1}{c} u_t \mp \frac{1}{4} \left(c_{yy} - \frac{c_y^2}{c} \right) \int_0^\infty u(t-s, x, y) ds \mp \frac{1}{2} \int_0^\infty (c u_y(t-s, x, y))_y ds = 0. \quad (8)$$

Предполагая, что $u = u(s, x, y)$ и все производные обращаются в нуль при $s < 0$, мы перепишем уравнение (8) в виде

$$u_x \pm \frac{1}{c} u_t \mp \frac{1}{4} \left(c_{yy} - \frac{c_y^2}{c} \right) \int_0^t u(s, x, y) ds \mp \frac{1}{2} \int_0^t (cu_y(s, x, y))_y ds = 0. \quad (9)$$

Это уравнение подходит для использования в вычислениях в качестве условия прозрачной границы. В дальнейшем мы будем называть его интегральной формой условия Тапперта для прозрачной границы. Дифференцируя его по t , получим дифференциальную форму этого условия:

$$u_{xt} \pm \frac{1}{c} u_{tt} \mp \frac{1}{4} \left(c_{yy} - \frac{c_y^2}{c} \right) u \mp \frac{1}{2} (cu_y)_y = 0. \quad (10)$$

Далее мы сравним эти формы условия прозрачной границы в численных экспериментах. Заметим, что в случае постоянной c условие (10) совпадает с классическим условием Майды—Энгквиста второго порядка [3].

3. Корректность смешанной задачи для волнового уравнения с условием прозрачной границы типа Тапперта

Проблема проверки корректности смешанной задачи для гиперболических уравнений с граничными условиями произвольной формы полностью решена. Наиболее общее, полное и детальное рассмотрение её мы обнаружили в диссертации В. М. Гордиенко и связанных с нею его работах (см., например, [5]). Схема исследования корректности смешанной задачи для волнового уравнения такова.

1. В каждой точке границы замораживаются коэффициенты в волновом уравнении и граничном условии, после чего отделяются главные члены соответствующих дифференциальных операторов, члены с младшими производными опускаются (корректность является локальным свойством и определяется главными символами операторов).
2. С помощью подходящей замены координат осуществляется переход к волновому уравнению простейшего вида $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ и соответствующему граничному условию.
3. Предположим, что $f(\tau, \xi, \eta)$, где τ, ξ, η — переменные, двойственные t, x, y соответственно, — главный символ оператора в граничном условии после этого перехода. Смешанная задача будет корректной тогда и только тогда, когда в каждой точке границы полином (относительно z) $f(z^2 + 1, -2z, z^2 - 1)$ имеет ненулевой старший коэффициент и все его корни имеют отрицательную вещественную часть.

Эта схема эквивалентна проверке равномерного условия Крейса, также известного как условие Лопатинского, однако нам она представляется более ясной и простой. Так как (10) следует из (9), достаточно только доказать, что (10) обеспечивает корректность смешанной задачи для волнового уравнения. Далее мы следуем шагам описанной схемы.

Берём волновое уравнение (1) с граничным условием (10).

1. В каждой точке границы волновое уравнение с замороженными коэффициентами будет выглядеть как

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} - u_{yy}) = 0$$

с некоторым постоянным c , а главная часть оператора из граничного условия имеет вид

$$u_{xt} - \frac{1}{c}u_{tt} + \frac{c}{2}u_{yy}.$$

2. Заменой переменной $T = ct$ мы переходим к уравнению

$$u_{TT} - (u_{xx} - u_{yy}) = 0,$$

а оператор граничного условия приобретает вид

$$cu_{xT} - cu_{TT} + \frac{c}{2}u_{yy}.$$

3. Подставив z в его главный символ

$$f(\tau, \xi, \eta) = c\tau\xi - c\tau^2 + \frac{c}{2}\eta^2,$$

получим полином

$$F(z) = (z^2 + 1, -2z, z^2 - 1) = -\frac{c}{2}(z + 1)^4$$

с единственным корнем $z = -1$ и старшим коэффициентом $-c/2$. Таким образом, мы можем заключить, что смешанная задача для волнового уравнения (1) с граничным условием (10) корректна.

4. Конечноразностная дискретизация условия Тапперта для прозрачной границы

В наших численных экспериментах мы использовали стандартную явную разностную схему второго порядка точности для волнового уравнения на однородной сетке $\{t^i, x_j, y_l\}$

$$\frac{1}{c_{j,l}^2}D_t^+ D_t^- u_{j,l}^i = D_x^+ D_x^- u_{j,l}^i + D_y^+ D_y^- u_{j,l}^i, \quad (11)$$

где $u_{j,l}^i = u(t^i, x_j, y_l)$ ($t^i = i\tau$, $x_j = jh - h/2$, $y_l = lh$, $i = 0, 1, \dots$, $j = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots$), а разностные операторы определены обычным образом:

$$D_x^+ u_{j,l}^i = \frac{u_{j+1,l}^i - u_{j,l}^i}{h}, \quad D_x^- u_{j,l}^i = \frac{u_{j,l}^i - u_{j-1,l}^i}{h}, \quad D_x^0 u_{j,l}^i = \frac{u_{j+1,l}^i - u_{j-1,l}^i}{2h}$$

(D_t^+ , D_t^- , D_t^0 , D_y^+ , D_y^- , D_y^0 определяются аналогично).

Как и ранее, будем предполагать, что u и все её производные равны нулю при $t < 0$. В этом предположении условие Тапперта для прозрачной границы в интегральной форме (9) на левой границы $x = 0$ представляется в дискретной форме как

$$\begin{aligned} & \frac{D_x^+(u_{1,j}^i + u_{1,j}^{i+1})}{2} - \frac{D_t^+(u_{1,j}^i + u_{2,j}^i)}{2c_{3/2,j}} + \frac{\tau}{8} \left(c_{yy} - \frac{c_y^2}{c} \right)_{3/2,j} \cdot \sum_{m=2}^i (u_{1,j}^m + u_{2,j}^{m+1}) + \\ & + \frac{\tau}{8} (c_y)_{3/2,j} \sum_{m=2}^i D_y^+ D_y^- (u_{1,j}^m + u_{2,j}^{m+1}) + \frac{\tau c_{3/2,j}}{4} \sum_{m=2}^i D_y^+ D_y^- (u_{1,j}^m + u_{2,j}^{m+1}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $(\cdot)_{3/2,j}$ — значение (\cdot) в точке $x = 0$, $y = jl$. Заметим, что на практике функция c часто задаётся некоторой интерполяционной формулой, так что нет необходимости вычислять её производные разностными методами. Заметим также, что дискретизация (12) имеет второй порядок точности, как и схема для волнового уравнения.

Условие Тапперта для прозрачной границы в дифференциальной форме (10) дискретизируется при $x = 0$ как

$$\begin{aligned} & D_t^0 D_x^+ u_{1,j}^i - \frac{1}{2c_{3/2,j}} D_t^+ D_t^- (u_{1,j}^i + u_{2,j}^i) + \frac{c_{3/2,j}}{4} D_y^+ D_y^- (u_{1,j}^{i-1} + u_{2,j}^{i+1}) + \\ & + \frac{(c_y)_{3/2,j}}{4} D_y^0 (u_{1,j}^{i-1} + u_{2,j}^{i+1}) + \frac{1}{8} \left(c_{yy} - \frac{c_y^2}{c} \right)_{3/2,j} (u_{1,j}^{i-1} + u_{2,j}^{i+1}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для дискретизации условий типа Хигдона используется метод, описанный в [7]. Дискретизация условия Майды—Энгквиста второго порядка описана в [3]. Дискретная форма условия Тапперта для прозрачной границы (12) показывает, что интегралы в уравнении (9) просто накапливаются на каждом шаге по времени. Таким образом, сложность вычислений с новым граничным условием лишь немного отличается от сложности в случае условия типа Хигдона первого порядка. Это утверждение находит подтверждение в экспериментах (см. ниже).

5. Численные эксперименты

Мы провели две серии численных экспериментов. Безразмерная область для первой из них показана на рис. 1. Она представляет собой прямоугольник $\{x, y \mid 0 < x < l_x = 10, 0 < y < L_y = 10\}$.

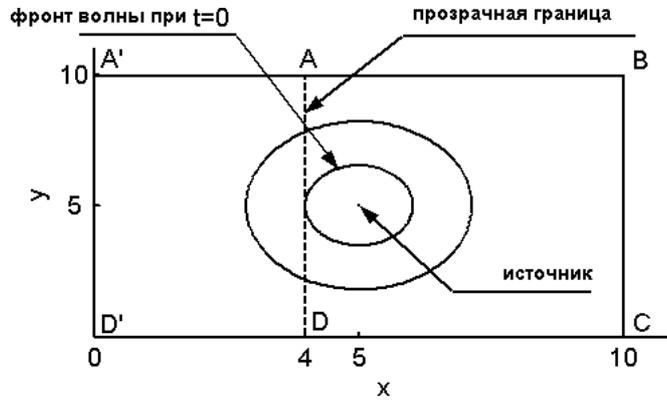


Рис. 1. Область вычислений для первой серии экспериментов

По всему периметру расширенной области $A'B'CD'$ мы ставим условие жёсткой границы, однако волны не достигают границ за время вычислений. На границе AD уменьшенной области $ABCD$ ставятся условия прозрачной границы. Таким образом, решая смешанную задачу для волнового уравнения последовательно на уменьшенной и расширенной областях, мы можем оценить ошибки, выбрав для них меры

$$E(t_i) = \frac{\sum_j \sum_k |u_{j,k}^i - u_E(t_i, x_j, y_k)|}{\sum_j \sum_k |u_E(t_i, x_j, y_k)|} \quad (14)$$

и

$$e(t_i) = \max_j \max_k |u_{j,k}^i - u_E(t_i, x_j, y_k)|, \quad (15)$$

где u и u_E — решения смешанной задачи на уменьшенной и расширенной областях соответственно. В качестве начального условия было взято поле от точечного источника короткого действия в однородной среде, расположенного в центре расширенной области.

Представленные здесь численные решения были получены на сетке с пространственным шагом $\sigma = 0,1$ и достаточно малым шагом по времени τ (зависимым от максимальной скорости звука), обеспечивающим сходимость схемы.

В этих экспериментах мы сравниваем условие Тапперта для прозрачной границы в интегральной (9) и дифференциальной (10) формах с условием второго порядка Майды—Энгквиста из [3].

Для первого примера мы выбрали функцию $c(y)$ с минимумом на глубине $L_y/2$ (рис. 2):

$$c(x) = 1 - 0,5e^{(y-L_y/2)^2/3}. \quad (16)$$

Время работы источника было взято равным 1,4. Результаты вычислений представлены на рис. 3 и 4.

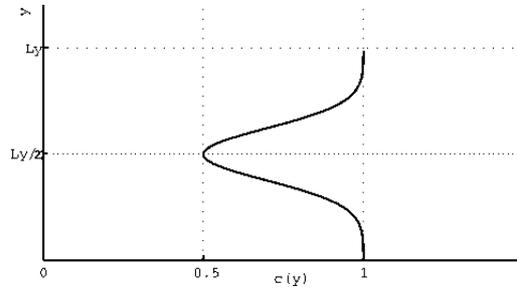


Рис. 2. Гауссов профиль скорости звука $c(y)$

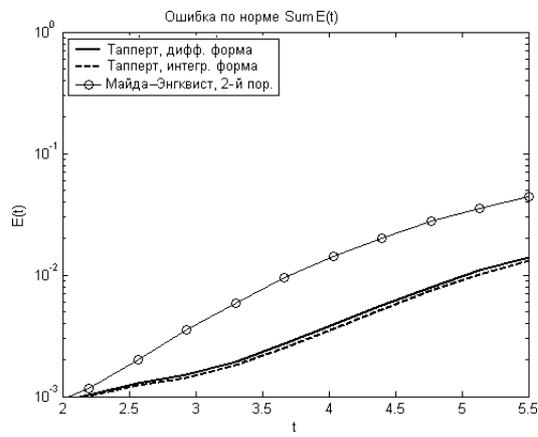


Рис. 3. Ошибки $E(t)$ для гауссова профиля

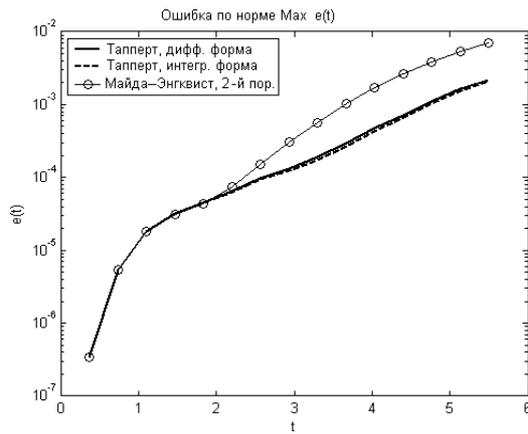
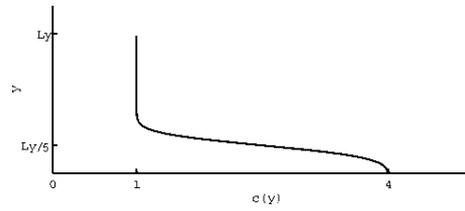
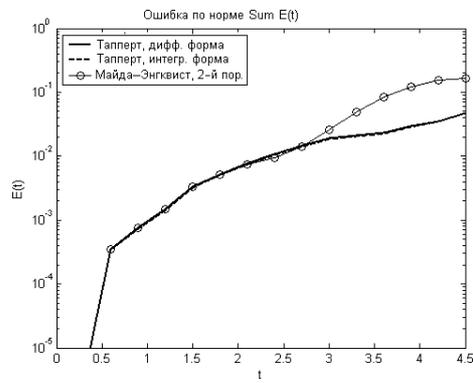
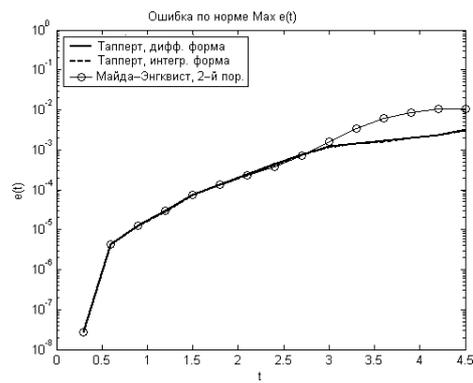


Рис. 4. Ошибки $e(t)$ для гауссова профиля

Рис. 5. Профиль в виде функции ошибок $c(y)$ Рис. 6. Ошибки $E(t)$ для профиля в виде функции ошибокРис. 7. Ошибки $e(t)$ для профиля в виде функции ошибок

Для второго примера зависимость $c(y)$ (график см. на рис. 5) мы взяли в виде

$$c(y) = 4 - \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{(s-L_y/5)^2} ds. \quad (17)$$

Соответствующие результаты представлены на рис. 6 и 7.

Мы видим, что чем больше вариация скорости звука, тем существеннее повышение точности, обеспеченное учётом переменности $c = c(y)$ в условии Тапперта для прозрачной границы. Мы также заключаем, что интегральная форма (9) работает немного лучше дифференциальной формы (10).

Так как условие типа Тапперта (8) не содержит производных от скорости звука по продольной переменной, оно может быть применено к случаю, когда свойства среды зависят от x без каких-либо изменений. В третьем примере был использован следующий продольно-переменный профиль $c(x, y)$:

$$c(x, y) = 1 - 0,5e^{(x-L_x/2)^2/3}. \quad (18)$$

В этом примере источник был расположен в точке $x = 3L_x/4, y = L_y/2$. Результаты представлены на рис. 8 и 9.

Очевидно, в этом случае условие Тапперта для прозрачной границы в дифференциальной форме и условие Тапперта для прозрачной границы в интегральной форме существенно различаются. В то время как использование дифференциальной формы приводит к тем же результатам, что дают условия Майды—Энгквиста, интегральная форма условия Тапперта для прозрачной границы удивительным образом сохраняет тот же порядок точности, что наблюдался

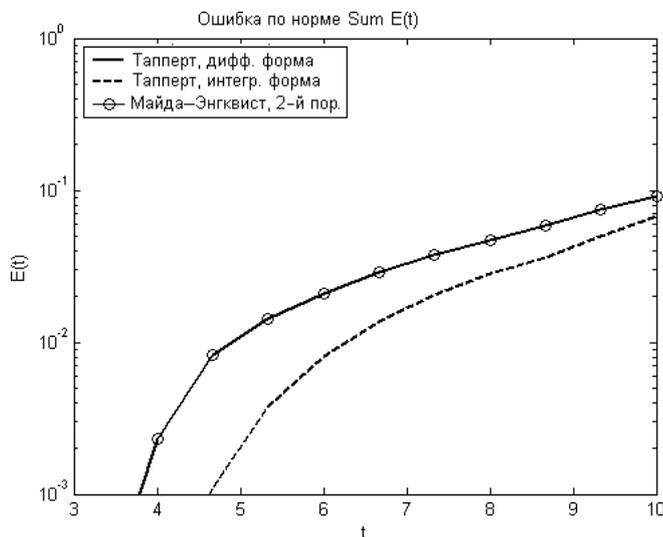


Рис. 8. Ошибки $E(t)$ для случая функции $c = c(x)$, зависящей от продольной переменной

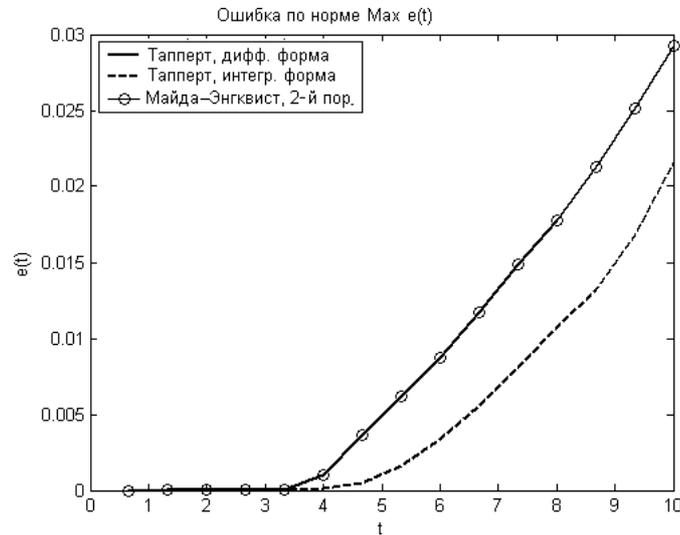


Рис. 9. Ошибки $e(t)$ для случая функции $c = c(x)$, зависящей от продольной переменной

в случае, когда скорость звука не зависела от продольной переменной. Таким образом, можно рекомендовать использование условия Тапперта для прозрачной границы в случаях, когда необходимо поставить условие искусственной границы, в окрестности которой скорость звука зависит от продольной переменной. В иных ситуациях мы предлагаем условие Тапперта для прозрачной границы как своего рода универсальное решение, обеспечивающее компромисс между вычислительной сложностью и точностью. В любом случае условие Тапперта для прозрачной границы должно использоваться в интегральной форме. В последнем примере была проведена грубая оценка временных затрат на вычисления. Расчёты с использованием условия Тапперта для прозрачной границы в интегральной форме производятся примерно на 10 % быстрее, чем расчёты с условиями Майды—Энгквиста второго порядка (0,5320 против 0,4840 с в нашем примере).

Вторая серия экспериментов была проведена, чтобы протестировать условие Тапперта для прозрачной границы в задаче, близкой к реальной, типичной для подводной акустики. Рассмотрим плоское сечение волновода длиной $L_x = 30$ и глубиной $L_y = 20$ со скоростью звука $c = 1$ на верхней границе, меняющейся с глубиной (рис. 10). Изменение скорости звука с глубиной в нашем примере будет происходить в соответствии с формулой

$$c(x) = 1 - 0,1e^{(y-L_y/2)^2/3}. \quad (19)$$

Для задач подводной акустики характерны именно такие волноводы: скорость звука с глубиной меняется не более чем на 10 %, на некотором уровне

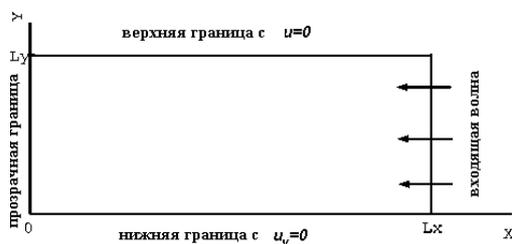


Рис. 10. Волновод с входящей волной на правой границе

имеется минимум. В наших тестах мы рассматриваем движение распространяющихся нормальных мод, соответствующих циклической частоте звука $\omega = 1$. Условия прозрачной границы ставятся на левой стенке вычислительной области, а условия Дирихле, описывающие входящую волну, — на правой. На верхней и нижней стенках мы ставим условия мягкой и жёсткой границы соответственно. Мы производим вычисление с длительным промежутком времени $L_t = 150$. Это время позволяет волне пересечь вычислительную область пять раз. На самом деле после подходящего растяжения переменных представленная конфигурация переходит в типичный для акустических приложений волновод глубины $L'_y = 100$ м, длины $L'_x = 150$ м, со скоростью звука $c' = 1500$ м/с и его циклической частотой $\omega' = 300$ с⁻¹.

Чтобы оценить точность полученного решения, мы сравниваем его с аналитическим, полученным следующим образом. Мы подставляем решение в виде

$$u = e^{ikx+i\omega t} \varphi(y) \tag{20}$$

в волновое уравнение. Таким образом мы получаем задачу на собственные значения

$$\frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c(y)^2} \varphi(y) = k^2 \varphi(y). \tag{21}$$

Собственные функции φ называются нормальными модами с волновыми числами k , которые равны соответствующим собственным значениям. Уравнение (21) может быть дискретизировано как задача на собственные значения симметрической тридиагональной матрицы:

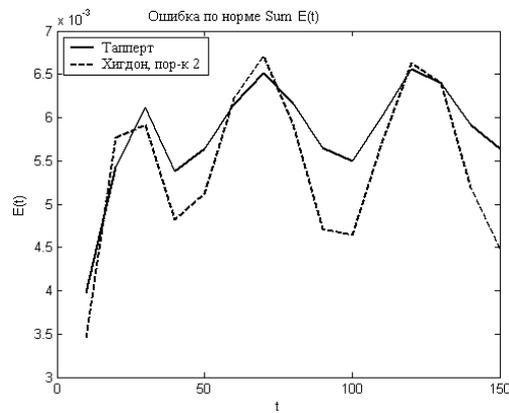
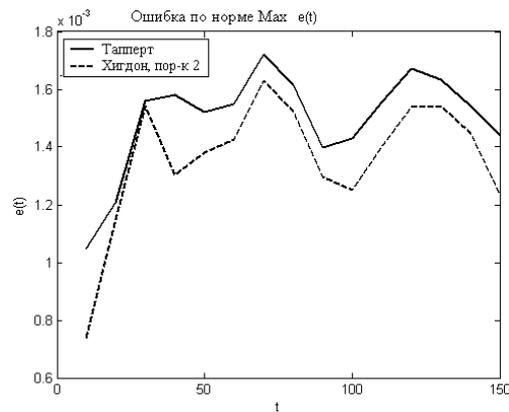
$$\frac{\varphi_{l+1} + \varphi_{l-1} - 2\varphi_l}{h^2} + \frac{\omega^2}{c_l^2} \varphi_l = k^2 \varphi_l. \tag{22}$$

Чтобы удовлетворялось условие жёсткой границы на нижней стенке волновода $l = 1$, матрица должна быть изменена в соответствии с предположением $\varphi_{l-1} = \varphi_l$:

$$\frac{\varphi_{l+1} - \varphi_l}{h^2} + \frac{\omega^2}{c_l^2} \varphi_l = k^2 \varphi_l.$$

Условие на верхней границе не требует подобной модификации. Дискретная проблема собственных значений (22) может быть решена численно. Таким образом,

мы получаем набор собственных чисел и собственных функций, используя который вместе с (20), мы можем построить начальные условия, граничные условия при $x = L_x$ и полуаналитическое решение во всей области для оценки ошибок. В такой ситуации, когда решение состоит из одной моды, естественно использовать условие искусственной границы типа Хигдона (3), выбрав в качестве фазовых скоростей величины, обратные к волновым числам: $C_j = 1/k$. Решение вида (20) удовлетворяет условию типа Хигдона (3) точно. Таким образом, достаточно взять такое условие второго порядка. Мы сравниваем его с условием Тапперта для прозрачной границы в дифференциальной и интегральной формах. Рис. 11 и 12 представляют результаты моделирования для второй распространяющейся моды.

Рис. 11. Ошибки $E(t)$ для второй распространяющейся модыРис. 12. Ошибки $e(t)$ для второй распространяющейся моды

Как видно из рисунков, даже точное условие прозрачной границы второго порядка превосходит условие типа Тапперта незначительно. Также мы заключаем, что устойчивость в длительных расчётах обеспечивается приблизительно такая же, как и в случае условий типа Хигдона.

6. Заключительные замечания

Мы рассмотрели различные формы условия прозрачной границы типа Тапперта и можем теперь сделать вывод, что его интегральная форма оказывается особенно полезной в вычислениях с изменением скорости звука в окрестности искусственной границы. Длительные вычисления показывают, что оно обеспечивает достаточно высокую устойчивость. Авторы намерены продолжить разработку этого подхода к постановке условий прозрачной границы. Мы хотели бы выразить глубокую благодарность профессору В. М. Гордиенко за его неоценимую помощь в разборе вопросов, связанных с корректностью смешанных задач.

Литература

- [1] Antoine X., Arnold A., Besse C., Ehrhardt M., Schädle A. A review of artificial boundary conditions for the Schrödinger equation // *Comm. Comp. Phys.* — 2008. — Vol. 4, no. 4. — P. 729–796.
- [2] Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *J. Comput. Phys.* — 1994. — Vol. 114. — P. 185–200.
- [3] Engquist B., Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Math. Comput.* — 1977. — Vol. 31, no. 139. — P. 639–651.
- [4] Engquist B., Majda A. A nonstationary form of the range refraction parabolic equation and its application as an artificial boundary condition for the wave equation in a waveguide // *Europhys. Lett.* — To appear.
- [5] Gordienko V. M. Un problème mixte pour l'équation vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'énergie; Cas mal posés // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A.* — 1979. — Vol. 288, no. 10. — P. 547–550.
- [6] Hagstrom T., De Castro M., Givoli D., Tzemach D. Local high-order absorbing boundary conditions for time-dependent waves in guides // *J. Comput. Acoust.* — 2007. — Vol. 15, no. 1. — P. 1–22.
- [7] Hagstrom T., Mar-Or A., Givoli D. High-order local absorbing conditions for the wave equation: Extensions and improvements // *J. Comput. Phys.* — 2008. — Vol. 227, no. 6. — P. 3322–3357.
- [8] Higdon R. L. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation // *Math. Comput.* — 1986. — Vol. 47. — P. 437–459.
- [9] Higdon R. L. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation // *Math. Comput.* — 1987. — Vol. 49. — P. 65–90.
- [10] Nazaikinskii V. E., Shatalov V. E., Sternin B. Yu. *Methods of Noncommutative Analysis.* — Berlin: Walter de Gruyter, 1996.

- [11] Tappert F. The parabolic approximation method // Wave Propagation and Underwater Acoustics / J. B. Keller, J. B. Papadakis, eds. — Berlin: Springer, 1977. — (Lect. Notes Phys.; Vol. 70). — P. 224—287.