Замечание о пересечении степеней радикала Джекобсона

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: радикал Джекобсона, дистрибутивное справа кольцо.

Аннотация

Если A — нётерово слева дистрибутивное справа кольцо, то $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(J(A)\right)^k = 0$.

Abstract

A. A. Tuganbaev, A remark on the intersection of powers of the Jacobson radical, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 207—209.

If A is a left Noetherian, right distributive ring, then $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(J(A)\right)^k = 0$.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Слова типа «артиново кольцо» означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Если A — кольцо, то $J(A_A) = J(A_A)$ — *радикал Джекобсона* кольца A. Через $J^{\omega}(A)$ обозначается идеал $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(J(A)\right)^k$ кольца A. И. Херстейн [3] показал, что существует такое нётерово справа кольцо A, что $J^{\omega}(A) \neq 0$. Например, можно взять

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и B — подкольцо в $\mathbb{Q}$, состоящее из всех дробей с нечётными знаменателями. В [3] И. Херстейн поставил следующую проблему: если A — нётерово слева и справа кольцо, то верно ли, что $J^{\omega}(A) = 0$? Эта проблема не решена до сих пор. Многие работы содержат частичные результаты, связанные с этой проблемой (см., например, [1, 2, 4—10]).

Модуль называется *дистрибутивным*, если решётка всех его подмодулей дистрибутивна. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 2, с. 207—209.
© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

сравнимы по включению. В некоторых работах равенство $J^\omega(A) = 0$ называется *гипотезой Джекобсона*. Эта гипотеза не верна для нётеровых справа дистрибутивных справа колец, так как А. Джатегаонкар [6] показал, что существует нётерово справа цепное справа кольцо A, для которого $J^\omega(A) \neq 0$.

Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Если A — нётерово слева дистрибутивное справа кольцо, то $J^\omega(A) = 0$.*

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений. Приведём необходимые определения и обозначения. Кольцо A называется *полупримарным*, если $A/J(A)$ — артиново кольцо и идеал $J(A)$ нильпотентен. Кольцо без ненулевых нильпотентных идеалов называется *полупервичным* кольцом.

Лемма 2. *Пусть A — кольцо, $M = J^\omega(A)$ и $h\colon A \to A/J(A)M$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Допустим, что M — ненулевой конечно порождённый левый идеал.*

1. *$J^\omega\big(h(A)\big) = h(M)$ — ненулевой нильпотентный идеал в $h(A)$.*
2. *Кольцо $h(A)$ не полупервично и не полупримарно.*
3. *Кольцо $h(A)$ не является прямым произведением полупервичного кольца и полупримарного кольца.*

Доказательство. 1. Ясно, что $J^\omega\big(h(A)\big) = h(M)$. Так как $M \subseteq J(A)$, то $M^2 \subseteq J(A)M$, $\big(h(M)\big)^2 = 0$ и $h(M)$ — нильпотентный идеал в $h(A)$. Так как M — ненулевой конечно порождённый левый A-модуль, то $M \neq J(A)M$ по лемме Накаямы. Поэтому $h(M) \neq 0$.

2. По утверждению 1 кольцо $h(A)$ не полупервично, так как A содержит ненулевой нильпотентный идеал $h(M)$. Кольцо $h(A)$ не полупримарно, поскольку в противном случае $J^\omega\big(h(A)\big) = h(M) = 0$.

3. Допустим, что $h(A) = X \times Y$, где X — полупервичное кольцо и Y — полупримарное кольцо. Существует такой центральный идемпотент e кольца $h(A)$, что $(1-e)X = X$ и $eY = Y$. Так как $(1-e)h(M)$ — нильпотентный идеал полупервичного кольца X, то $(1-e)h(M) = 0$ и $h(M) = eh(M) \subseteq Y$. Так как $eJ\big(h(A)\big) = J(Y)$ и кольцо Y полупримарно, то $e\Big(J\big(h(A)\big)\Big)^n = 0$ для некоторого натурального числа n. Тогда

$$\Big(J\big(h(A)\big)\Big)^n = \Big(eJ\big(h(A)\big) + (1-e)J\big(h(A)\big)\Big)^n = (1-e)\Big(J\big(h(A)\big)\Big)^n \subseteq X,$$

$$h(M) = J^\omega\big(h(A)\big) \subseteq \Big(J\big(h(A)\big)\Big)^n \subseteq h(M) \cap X \subseteq X \cap Y = 0.$$

Получено противоречие, так как $h(M) \neq 0$ по утверждению 1. □

Лемма 3 [11, теорема 9.18]. *Пусть A — нётерово слева дистрибутивное справа кольцо. Тогда A — либо область, либо цепное справа артиново кольцо, либо прямое произведение конечного числа областей и цепных справа артиновых колец.*

Лемма 4. *Если A — нётерово слева дистрибутивное справа кольцо, то каждое фактор-кольцо кольца A либо полупервично, либо полупримарно, либо является прямым произведением полупервичного кольца и полупримарного кольца.*

Лемма 4 вытекает из леммы 3 и того, что каждое фактор-кольцо нётерова слева дистрибутивного справа кольца является нётеровым слева дистрибутивным справа кольцом.

Окончание доказательства теоремы 1. Пусть A — нётерово слева дистрибутивное справа кольцо, $M = J^{\omega}(A)$ и $h\colon A \to A/J(A)M$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Допустим, что $M \neq 0$. Тогда M — ненулевой конечно порождённый левый идеал кольца A. По утверждениям 2 и 3 леммы 2 кольцо $h(A)$ не полупервично, не полупримарно и не является прямым произведением полупервичного кольца и полупримарного кольца. Это противоречит лемме 4. □

Литература

[1] Туганбаев А. А. Полудистрибутивные и дистрибутивно разложимые кольца // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, вып. 2. — С. 307—313.

[2] Cauchon G. Les t-anneaux, la condition (H) de Gabriel et ses consequences // Commun. Algebra. — 1976. — Vol. 4, no. 1. — P. 11—50.

[3] Herstein I. N. A counter-example in Noetherian rings // Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. — 1965. — Vol. 54. — P. 1036—1037.

[4] Herstein I. N., Small L. W. The intersection of the powers of the radical in Noetherian P.I. rings // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 16, no. 2. — P. 176—180.

[5] Jategaonkar A. V. Left principal ideal domains // J. Algebra. — 1968. — Vol. 8. — P. 148—155.

[6] Jategaonkar A. V. A counter-example in ring theory and homological algebra // J. Algebra. — 1969. — Vol. 12. — P. 418—440.

[7] Jategaonkar A. V. Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings // J. Algebra. — 1974. — Vol. 30. — P. 103—121.

[8] Krause H. On the nilpotency of the Jacobson radical for Noetherian rings // Arch. Math. — 1998. — Vol. 70, no. 6. — P. 435—437.

[9] Krause H., Lenagan T. H. Transfinite powers of the Jacobson radical // Commun. Algebra — 1979. — Vol. 7, no. 1. — P. 1—8.

[10] Larsen M. D., Mirbagheri A. A note on the intersection of the powers of the Jacobson radical // Rocky Mountain J. Math. — 1971. — Vol. 1, no. 4. — P. 1036—1037.

[11] Tuganbaev A. A. Semidistributive Rings and Modules. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.