Подгруппы в полуциклических n-арных группах

Н. А. ЩУЧКИН
Волгоградский государственный педагогический университет
e-mail: shchuchkin@fizmat.vspu.ru

УДК 512.542

Ключевые слова: полуциклическая n-арная группа, n-арная подгруппа, идемпотентная n-арная группа.

Аннотация

Дано полное описание n-арных подгрупп в конечных и бесконечных (абелевых и неабелевых) полуциклических n-арных группах.

Abstract

N. A. Shchuchkin, Subgroups of semicyclic n-ary groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 2, pp. 211—222.

We give a complete description of n-ary subgroups of finite and infinite (Abelian and non-Abelian) n-ary groups defined on cyclic groups.

1. Введение

Алгебру $\langle G, f\rangle$ с n-арной операцией f ($n \geqslant 3$) называют *n-арной группой* [10], если в ней выполняется обобщённый закон ассоциативности

$$f(f(a_1,\ldots,a_n),a_{n+1},\ldots,a_{2n-1}) = \\ = f(a_1,\ldots,a_i,f(a_{i+1},\ldots,a_{i+n}),a_{i+n+1},\ldots,a_{2n-1})$$

для всех $i = 1,\ldots,n-1$ и разрешимо каждое из уравнений

$$f(x,a_1,\ldots,a_{n-1}) = b, \quad f(a_1,\ldots,a_{n-1},y) = b$$

для любых $a_1,\ldots,a_{n-1},b$ из G.

Результат применения k раз ($k > 0$) операции f к $k(n-1)+1$ элементам, равным элементу a, называют *k-й положительной n-арной степенью* элемента a и обозначают $a^{\langle k\rangle}$. n-арная степень определяется по индуктивному правилу

$$a^{\langle k\rangle} = f\big(a^{\langle k-1\rangle},a,\ldots,a\big).$$

Для $k=0$ полагают $a^{\langle 0\rangle} = a$. *Отрицательную k-ю n-арную степень* элемента a определяют как решение уравнения

$$f\big(x,a,\ldots,a,a^{\langle -k-1\rangle}\big) = a$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 2, с. 211—222.

и обозначают так же, как положительную n-арную степень. Если все n-арные степени элемента a различны, то a называется *элементом бесконечного порядка*. Если же среди n-арных степеней элемента a имеются равные, то найдётся наименьшая положительная k-я n-арная степень элемента a среди всех l-х n-арных степеней с условием $a^{\langle l\rangle} = a$. В этом случае a называется *элементом конечного n-арного порядка*, а именно n-арного порядка k. Для элемента a конечного n-арного порядка k все элементы

$$a,\ a^{\langle 1\rangle},\ a^{\langle 2\rangle}, \ldots,\ a^{\langle k-1\rangle} \tag{1}$$

различны. Всякая другая n-арная степень элемента a равна одному из этих элементов. Любой элемент n-арного порядка 1 называют *идемпотентом*, а n-арная группа, в которой каждый элемент является идемпотентом, называется *идемпотентной*.

n-арная подгруппа, состоящая из всех n-арных степеней элемента a, называется *циклической* с порождающим элементом a. Известно, что конечная циклическая n-арная подгруппа с порождающим элементом a состоит из элементов (1) и её порядок равен n-арному порядку элемента a.

n-арная группа, совпадающая с одной из своих циклических n-арных подгрупп, называется *циклической*. Все бесконечные циклические n-арные группы изоморфны между собой; изоморфны между собой также все конечные циклические n-арные группы одного и того же порядка [10].

Существует тесная связь между группами и n-арными группами. В теореме Глускина—Хоссу [3, 9] показано, что на любой n-арной группе $\langle G, f\rangle$ можно определить бинарную операцию $\circ$ по правилу $a \circ b = f(a, c_1, \ldots, c_{n-2}, b)$, где $c_1, \ldots, c_{n-2}$ — фиксированные элементы из G, и $\langle G, \circ\rangle$ будет группой. Кроме того, существует автоморфизм φ группы $\langle G, \circ\rangle$, действующий по правилу

$$\varphi(x) = f(c, x, c_1, \ldots, c_{n-2}), \tag{2}$$

где c — обратный элемент для последовательности $c_1, \ldots, c_{n-2}$ в n-арной группе $\langle G, f\rangle$ ($f(x, c, c_1, \ldots, c_{n-2}) = x$ для любого $x \in G$), такой что

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \circ \varphi(a_2) \circ \varphi^2(a_3) \circ \ldots \circ \varphi^{n-1}(a_n) \circ d, \tag{3}$$

где $d = f(c, \ldots, c)$. Для указанных автоморфизма φ и элемента d выполнены условия

$$\varphi(d) = d, \tag{4}$$

$$d \circ x = \varphi^{n-1}(x) \circ d, \quad x \in G. \tag{5}$$

Любые две группы, построенные таким образом на n-арной группе $\langle G, f\rangle$, изоморфны.

Верна и обратная теорема Глускина—Хоссу: в любой группе $\langle G, \circ\rangle$ для выбранных автоморфизма φ и элемента d, которые удовлетворяют условиям (4) и (5), задаётся n-арная группа $\langle G, f\rangle$, где f действует по правилу (3). В этом случае говорят, что $\langle G, f\rangle$ (φ, d)-определена на группе $\langle G, \circ\rangle$. Заметим (см. [11]), что n-арная группа $\langle G, f\rangle$, (φ, d)-определённая на группе $\langle G, \circ\rangle$, является абелевой (верны тождества $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma \in \mathrm{S}_n$) тогда и только тогда, когда φ — тождественный автоморфизм.

Если на группе $\langle G, \circ\rangle$ в качестве автоморфизма φ и элемента d выбрать тождественное отображение и единицу группы, то $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$. В этом случае $\langle G, f\rangle$ называют *производной n-арной группой от группы* $\langle G, \circ\rangle$.

Имеется критерий изоморфизма n-арных групп [7].

Теорема 1.1 (В. А. Дудек, Я. Михальский, 1984 г.). *Пусть n-арная группа $\langle G_1, f_1\rangle$ (φ_1, d_1)-определена на группе $\langle G, \circ\rangle$ и n-арная группа $\langle G_2, f_2\rangle$ (φ_2, d_2)-определена на группе $\langle G_2, \cdot\rangle$. Тогда n-арные группы $\langle G_1, f_1\rangle$ и $\langle G_2, f_2\rangle$ изоморфны в том и только в том случае, если найдутся изоморфизм σ из $\langle G_1, \circ\rangle$ в $\langle G_2, \cdot\rangle$ и элемент $s \in G_2$, такие что*

$$\sigma(d_1) = s \cdot \varphi_2(s) \cdot \ldots \cdot \varphi_2^{n-2}(s) \cdot d_2, \tag{6}$$

$$\sigma\big(\varphi_1(x)\big) \cdot s = s \cdot \varphi_2\big(\sigma(x)\big) \quad \text{для всех} \quad x \in G_1. \tag{7}$$

2. Полуциклические n-арные группы

n-арную группу $\langle G, f\rangle$ называют *полуциклической* [2], если группа $\langle G, \circ\rangle$, построенная в теореме Глускина—Хоссу, циклическая. Легко показать, что любая циклическая n-арная группа является полуциклической. С использованием обратной теоремы Глускина—Хоссу строятся и другие примеры полуциклических n-арных групп [8].

Предложение 2.1 (К. Глазек, Я. Михальский, И. Сероцкий, 1984 г.). *На циклической группе (a) порядка k определяется полуциклическая n-арная группа $\langle (a), f\rangle$ с n-арной операцией*

$$f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) = a^{s_1 + \ldots + s_n + l}, \tag{8}$$

где $0 \leqslant l < k$, или с n-арной операцией

$$f(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, \ldots, a^{s_{n-1}}, a^{s_n}) = a^{s_1 + m s_2 + m^2 s_3 + \ldots + m^{n-2} s_{n-1} + s_n + l} \tag{9}$$

при $k > 2$, где $0 \leqslant m, l < k$, $m \neq 1$, показатель m взаимно прост с k, $lm \equiv l \pmod k$ и m по модулю k делит $n-1$.

Назовём n-арную группу, построенную на конечной циклической группе одним из двух вышеописанных способов, полуциклической типа (k, m, l) ($m = 1$ в первом случае и $m \neq 1$ во втором случае). В первом случае она будет абелевой, а во втором неабелевой. Среди полуциклических n-арных групп типа (k, m, l) могут быть изоморфные между собой n-арные группы. С использованием теоремы 1.1 в [8] и [5] доказываются следующие утверждения.

Предложение 2.2 (К. Глазек, Я. Михальский, И. Сероцкий, 1984 г.). *Две абелевы полуциклические n-арные группы, имеющие типы $(k, 1, l_1)$ и $(k, 1, l_2)$, изоморфны тогда и только тогда, когда* $\text{НОД}(l_1, n-1, k) = \text{НОД}(l_2, n-1, k)$.

Предложение 2.3 (Н. А. Щучкин, 2008 г.). *Две неабелевы полуциклические n-арные группы, имеющие типы (k, m_1, l_1) и (k, m_2, l_2), изоморфны тогда и только тогда, когда*

$$\text{НОД}\left(l_1, \frac{m_1^{n-1}-1}{m_1-1}, k\right) = \text{НОД}\left(l_2, \frac{m_2^{n-1}-1}{m_2-1}, k\right) \ \text{и} \ \ m_1 = m_2.$$

Все полуциклические n-арные группы типа (k, m, l) исчерпывают класс всех конечных полуциклических n-арных групп [5].

Теорема 2.4 (Н. А. Щучкин, 2008 г.). *Любая конечная полуциклическая n-арная группа порядка k изоморфна полуциклической n-арной группе типа $(k, 1, l)$, где $l \mid \text{НОД}(n-1, k)$, или типа (k, m, l) при $m \neq 1$, где $l \mid \text{НОД}\big(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k\big)$.*

Рассмотрим правила нахождения n-арных порядков в полуциклических n-арных группах типа (k, m, l).

Предложение 2.5. *В полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа (k, m, l) n-арный порядок любого элемента a^s вычисляется*

1) *при $m = 1$ по формуле*

$$\operatorname{Ord}_n a^s = \frac{k}{\text{НОД}(k, s(n-1)+l)}; \tag{10}$$

2) *при $m \neq 1$ по формуле*

$$\operatorname{Ord}_n a^s = \frac{k}{\text{НОД}(k, s\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+l)}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-арная группа типа $(k, 1, l)$ и $\operatorname{Ord}_n a^s = t$ для $a^s \in (a)$. Тогда $(a^s)^{\langle t\rangle} = a^{s+ts(n-1)+tl} = a^s$, т. е. $s + ts(n-1) + tl \equiv s \pmod k$ или $t(s(n-1)+l) \equiv 0 \pmod k$, откуда получаем формулу (10).

Пусть теперь $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-арная группа типа (k, m, l), $m \neq 1$, $\operatorname{Ord}_n a^s = t$ для $a^s \in (a)$. Тогда $(a^s)^{\langle t\rangle} = a^{s+ts\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+tl} = a^s$, т. е. $s + ts\frac{m^{n-1}-1}{m-1} + tl \equiv s \pmod k$ или $t\big(s\frac{m^{n-1}-1}{m-1}+l\big) \equiv 0 \pmod k$, откуда получаем формулу (11). Предложение доказано. □

Решение уравнения $f(a, \ldots, a, x) = a$ в n-арной группе $\langle G, f\rangle$ называют *косым* элементом для a и обозначают $\bar a$.

Предложение 2.6. *Пусть $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-арная группа типа (k, m, l). Тогда для каждого элемента $a^s \in (a)$*

$$\overline{a^s} = a^t,$$

где

$$\begin{cases} t \equiv -s(n-2) - l \pmod k & \text{при} \ \ m = 1, \\ t \equiv -s\frac{m(m^{n-2}-1)}{m-1} - l \pmod k & \text{при} \ \ m \neq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Из равенства $f(a^s, \ldots, a^s, a^t) = a^s$ имеем, что $s(n-1) + t + l \equiv s \pmod{k}$ при $m = 1$ или $s\frac{m^{n-1}-1}{m-1} + t + l \equiv s \pmod{k}$ при $m \neq 1$, откуда получаем указанные сравнения. Предложение доказано. □

Рассмотрим теперь бесконечную циклическую группу (a). В [8] доказано следующее утверждение.

Предложение 2.7 (К. Глазек, Я. Михальский, И. Сероцкий, 1984 г.). *На бесконечной циклической группе (a) определяется полуциклическая n-арная группа $\langle (a), f\rangle$ с n-арной операцией* (8)*, где l — любое целое число.*

Назовём такую n-арную группу полуциклической типа $(\infty, 1, l)$. В [5] получен следующий результат.

Предложение 2.8 (Н. А. Щучкин, 2008 г.). *Две полуциклические n-арные группы типов $(\infty, 1, l_1)$ и $(\infty, 1, l_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $l_1 \equiv l_2 \pmod{n-1}$ или $l_1 \equiv -l_2 \pmod{n-1}$.*

В [8] доказано следующее утверждение.

Предложение 2.9 (К. Глазек, Я. Михальский, И. Сероцкий, 1984 г.). *На бесконечной циклической группе (a) можно задать полуциклическую n-арную группу $\langle (a), f\rangle$ для $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, с n-арной операцией*

$$f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) = a^{s_1 - s_2 + \ldots + s_{2k-1} - s_{2k} + s_{2k+1}}. \tag{12}$$

Назовём n-арную группу из предложения 2.9 полуциклической типа $(\infty, -1, 0)$. Очевидно (см. [8]), что любая полуциклическая n-арная группа типа $\langle \infty, -1, 0\rangle$ является идемпотентной.

Известно, что полуциклические n-арные группы типов $(\infty, 1, l)$ и $(\infty, -1, 0)$ исчерпывают класс всех бесконечных полуциклических n-арных групп [5].

Теорема 2.10 (Н. А. Щучкин, 2008 г.). *Любая бесконечная полуциклическая n-арная группа изоморфна полуциклической n-арной группе типа $(\infty, 1, l)$, где $0 \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{2}$, или типа $\langle \infty, -1, 0\rangle$.*

Как и в теории групп, конечную n-арную группу, порядок которой есть степень простого числа p, назовём n-арной p-группой. Если n-арная группа является n-арной p-группой для некоторого простого числа p, то она называется примарной.

В [5] получен следующий результат.

Предложение 2.11 (Н. А. Щучкин, 2008). *Всякая полуциклическая n-арная группа изоморфна прямому произведению примарных неразложимых полуциклических n-арных групп. Более точно, если $\langle (a), f\rangle$ — полуциклическая n-арная группа типа (k, m, l), где $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, p_i — простые числа и $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, то*

$$\langle (a), f\rangle \cong \langle (a)/(a^{d_1}), f_1\rangle \times \langle (a)/(a^{d_2}), f_2\rangle \times \ldots \times \langle (a)/(a^{d_t}), f_t\rangle, \tag{13}$$

где $\langle (a)/(a^{d_i}), f_i\rangle$ — полуциклическая n-арная группа типа $(p_i^{\alpha_i}, m_i, l_i)$, $d_i = p_i^{\alpha_i}$, m_i и l_i — остатки от деления m и l на $p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

3. n-арные группы простого порядка

Предложение 3.1. *Любая полуциклическая n-арная p-группа $\langle (a), f\rangle$ типа (p,m,l) при $m = 1$, $p \mid (n-1)$, $l = 0$ или при $m \neq 1$ будет идемпотентной, в остальных случаях она будет циклической.*

Доказательство. Если $m = 1$, $p \mid (n-1)$ и $l = 0$, то для любого $s = 0, 1, \ldots, p-1$ имеем, что $s(n-1)$ делится на p, т. е. $sn \equiv s \pmod p$, а значит, $(a^s)^{\langle 1\rangle} = (a^s)^n = a^s$, т. е. n-арная группа $\langle (a), f\rangle$ будет идемпотентной. При $m \neq 1$ идемпотентность $\langle (a), f\rangle$ показана в [8].

Если $m = 1$, $p \mid (n-1)$ и $0 < l < p$, то по [5, следствие 2] n-арная группа $\langle (a), f\rangle$ будет циклической.

Если $m = 1$, $p \nmid (n-1)$, то согласно [5, следствие 1] $\langle (a), f\rangle$ будет циклической n-арной группой при любом $l = 0, 1, \ldots, p-1$. Предложение доказано. □

Любая n-арная группа простого порядка является полуциклической, поэтому из предложения 3.1 и теоремы 2.4 имеем два следствия.

Следствие 3.2. *Любая абелева n-арная группа простого порядка p, являющаяся производной от группы, при $p \mid (n-1)$ является идемпотентной. Идемпотентной будет также любая неабелева n-арная группа простого порядка.*

Следствие 3.3. *Любая абелева n-арная группа простого порядка p, являющаяся производной от группы, при $p \nmid (n-1)$ является циклической. Циклической будет также любая абелева n-арная группа простого порядка, не являющаяся производной от группы.*

Таким образом, любая n-арная группа простого порядка является идемпотентной или циклической. Ясно, что в n-арных группах простого порядка любая собственная n-арная подгруппа является одноэлементной (согласно теореме Лагранжа для n-арных групп). Если n-арная группа простого порядка является идемпотентной, то в ней каждый элемент будет одноэлементной подгруппой. Рассмотрим циклические n-арные группы простого порядка.

Предложение 3.4. *В любой циклической n-арной группе простого порядка p при $p \mid (n-1)$ нет идемпотентов, а при $p \nmid (n-1)$ имеется единственный идемпотент.*

Доказательство. Согласно предложению 2.2 и теореме 2.4 имеем изоморфизм любой циклической n-арной группы простого порядка p и полуциклической n-арной группы $\langle (a), f\rangle$ типа $(p, 1, 1)$.

Если $p \mid (n-1)$, то сравнение $x(n-1) \equiv r - 1 \pmod p$ для $r = 1$ разрешимо при любом x, значит, согласно [5, предложение 4] $\langle (a), f\rangle$ порождается любым своим элементом, т. е. в $\langle (a), f\rangle$ нет идемпотентов. Если же $p \nmid (n-1)$, то сравнение $x(n-1) \equiv -1 \pmod p$ имеет единственное решение, пусть это будет s. Тогда $(a^s)^{\langle 1\rangle} = a^{s+s(n-1)+1} = a^s$, т. е. a^s — идемпотент. Если же a^t — другой идемпотент, т. е. $(a^t)^{\langle 1\rangle} = a^t$, то $tn + 1 \equiv t \pmod p$ или $t(n-1) \equiv -1 \pmod p$, а значит, $a^t = a^s$. Предложение доказано. □

Отметим, что некоторые результаты из этого раздела можно найти в [6].

4. Подгруппы конечных полуциклических n-арных групп

Известно (см., например, [4]), что любая n-арная подгруппа n-арной группы $\langle G, f\rangle$ является смежным классом по некоторой подгруппе группы $\langle G, \circ\rangle$. Поэтому искать n-арные подгруппы в полуциклических n-арных группах $\langle G, f\rangle$ надо только среди классов смежности по подгруппам циклической группы $\langle G, \circ\rangle$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. *Класс смежности $a^r(a^t)$ по подгруппе (a^t) циклической группы (a) является n-арной подгруппой в полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа (k, m, l) тогда и только тогда, когда верно сравнение $r(n-1)+l \equiv 0 \pmod t$ при $m = 1$ или $r\frac{m^{n-1}-1}{m-1} + l \equiv 0 \pmod t$ при $m \neq 1$.*

Доказательство. Пусть $a^{s_v} \in a^r(a^t)$ для $v = 1, \ldots, n$, т. е. $s_v \equiv r \pmod t$. Тогда

$$s_1 + \ldots + s_n + l \equiv nr + l \pmod t \tag{14}$$

или

$$s_1 + s_2 m + \ldots + s_{n-1} m^{n-2} + s_n + l \equiv r\frac{m^{n-1}-1}{m-1} + r + l \pmod t \quad \text{при} \quad m \neq 1. \tag{15}$$

Если $a^r(a^t)$ — n-арная подгруппа в $\langle (a), f\rangle$, то $f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) \in a^r(a^t)$, т. е. $a^{s_1+\ldots+s_n+l} \in a^r(a^t)$ при $m = 1$ или $a^{s_1+s_2m+\ldots+s_{n-1}m^{n-2}+s_n+l} \in a^r(a^t)$ при $m \neq 1$. С учётом соотношения (14) или (15) имеем $r(n-1)+l \equiv 0 \pmod t$ при $m = 1$ или $r\frac{m^{n-1}-1}{m-1} + l \equiv 0 \pmod t$ при $m \neq 1$.

Обратно, пусть $r(n-1)+l \equiv 0 \pmod t$ при $m = 1$ или $r\frac{m^{n-1}-1}{m-1} + l \equiv 0 \pmod t$ при $m \neq 1$. Если $a^{s_v} \in a^r(a^t)$ для $v = 1, \ldots, n$, то с учётом (14) или (15) имеем $f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) \in a^r(a^t)$. Если же $a^s \in a^r(a^t)$, то $-s(n-2)-l \equiv r \pmod t$ при $m = 1$ или $-s\frac{m(m^{n-2}-1)}{m-1} - l \equiv r \pmod t$ при $m \neq 1$, т. е. $\overline{a^s} \in a^r(a^t)$. Лемма доказана. □

4.1. Подгруппы абелевых полуциклических n-арных групп

Известно (см. [5, следствие 1] и теорему 2.4), что любая конечная абелева полуциклическая n-арная группа, порядок которой взаимно прост с $n-1$, является циклической, а в такой циклической n-арной группе порядка k для каждого делителя t существует единственная n-арная подгруппа порядка t (см. [10]). Значит, верна следующая теорема.

Теорема 4.2. *В абелевой полуциклической n-арной группе порядка k при* НОД$(k, n-1) = 1$ *для каждого делителя t порядка k существует единственная n-арная подгруппа порядка t, которая будет циклической.*

Любая n-арная группа, являющаяся производной от циклической группы порядка k, при $k \mid (n-1)$ является идемпотентной (см. [5, предложение 5]), а в конечной полуциклической идемпотентной n-арной группе $\langle G, f\rangle$ каждый класс смежности по любой подгруппе циклической группы $\langle G, \circ\rangle$ является n-арной подгруппой (см. [1]). Значит, верна следующая теорема.

Теорема 4.3. *В n-арной группе, являющейся производной от циклической группы (a) порядка k, при $k \mid (n-1)$ каждый класс смежности по любой подгруппе группы (a) является идемпотентной n-арной подгруппой.*

Так как любая полуциклическая n-арная группа представима в виде прямого произведения примарных неразложимых полуциклических n-арных групп (см. предложение 2.11), то всякая n-арная подгруппа полуциклической n-арной группы изоморфна прямому произведению n-арных подгрупп примарных n-арных групп из разложения (13). Значит, для описания всех n-арных подгрупп произвольной полуциклической n-арной группы достаточно изучить n-арные подгруппы примарных полуциклических n-арных групп.

Предложение 4.4. *В циклической n-арной p-группе при $p \mid (n-1)$ нет собственных n-арных подгрупп.*

Доказательство. Любая циклическая n-арная группа порядка k изоморфна полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа $(k, 1, 1)$ (см. предложение 2.2 и теорему 2.4). Порядок каждого элемента в полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа $(p^\alpha, 1, 1)$ при $p \mid (n-1)$ равен p^α (см. предложение 2.5). Значит, эта n-арная группа будет циклической, порождаемой любым своим элементом. Предложение доказано. □

Следствие 4.5. *В циклической n-арной группе конечного порядка, каждый простой делитель которого делит $n-1$, нет собственных n-арных подгрупп.*

Предложение 4.6. *В примарной абелевой полуциклической n-арной группе порядка p^α, являющейся производной от циклической группы (a), при $\alpha > 1$ и $n - 1 = p^\gamma q$, $0 < \gamma < \alpha$, $p \nmid q$, для каждой собственной подгруппы $\big(a^{p^\beta}\big)$ группы (a) при $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha$ классы смежности $a^{ip^{\beta-\gamma}}\big(a^{p^\beta}\big)$ являются n-арными подгруппами, среди которых $\phi(p^\gamma)$ (ϕ — функция Эйлера) будут циклическими при НОД$(i, p^\gamma) = 1$ (они порождаются любым своим элементом), а при $\beta < \gamma$ любой класс смежности $a^i\big(a^{p^\beta}\big)$ является n-арной подгруппой. Других n-арных подгрупп нет.*

Доказательство. Любая абелева полуциклическая n-арная группа порядка k, являющаяся производной от циклической группы (a), будет полуциклической n-арной группой $\langle (a), f\rangle$ типа $(k, 1, 0)$.

При фиксированном β ($\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha$) n-арный порядок каждого элемента $a^{ip^{\beta-\gamma}+jp^\beta}$ из произвольно выбранного класса смежности $a^{ip^{\beta-\gamma}}\big(a^{p^\beta}\big)$ при НОД$(i, p^\gamma) = 1$ равен $p^{\alpha-\beta}$ (см. (10)). Значит, эти классы будут циклическими n-арными подгруппами, порождаемыми любым своим элементом.

Пусть $a^{ip^{\beta-\gamma}}\big(a^{p^\beta}\big)$ — класс смежности по подгруппе $\big(a^{p^\beta}\big)$ и НОД$(i, p^\gamma) = p^\delta$, где $1 \leqslant \delta \leqslant \gamma$. По условию имеем $ip^{\beta-\gamma}(n-1) \equiv 0 \pmod{p^\beta}$, значит, согласно лемме 4.1 $a^{ip^{\beta-\gamma}}(a^{p^\beta})$ является n-арной подгруппой.

Покажем теперь, что других n-арных подгрупп порядка $p^{\alpha-\beta}$ нет. Пусть H — n-арная подгруппа порядка $p^{\alpha-\beta}$. Тогда H является смежным классом по подгруппе $\left(a^{p^\beta}\right)$, т. е. $H = a^r(a^{p^\beta})$. По лемме 4.1 имеем $r(n-1) \equiv 0 \pmod{p^\beta}$, но $n - 1 = p^\gamma q$, $p \nmid q$, значит, $r = ip^{\beta-\gamma}$ для некоторого i, т. е. $H = a^{ip^{\beta-\gamma}}\left(a^{p^\beta}\right)$.

Пусть теперь $a^r\left(a^{p^\beta}\right)$ — любой класс смежности при $\beta < \gamma$. Тогда $n-1$ делится на p^β, т. е. $r(n-1) \equiv 0 \pmod{p^\beta}$, значит, согласно лемме 4.1 $a^r\left(a^{p^\beta}\right)$ является n-арной подгруппой. Предложение доказано. $\square$

Предложение 4.7. *В примарной полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа $(p^\alpha, 1, p^\beta)$ при $n - 1 = p^\gamma q$, $1 \leqslant \beta < \gamma < \alpha$, $p \nmid q$, все классы смежности по подгруппе $\left(a^{p^\beta}\right)$ группы (a) являются циклическими n-арными подгруппами, порождаемыми любым своим элементом. Других собственных n-арных подгрупп в $\langle (a), f\rangle$ нет.*

Доказательство. Любой элемент из $\langle (a), f\rangle$ имеет n-арный порядок $p^{\alpha-\beta}$ (см. (10)), значит, каждый класс смежности $a^i\left(a^{p^\beta}\right)$ $(0 \leqslant i \leqslant p^\beta - 1)$ является циклической n-арной подгруппой, которая порождается любым своим элементом, и других собственных n-арных подгрупп в $\langle (a), f\rangle$ нет. Предложение доказано. $\square$

Следствие 4.8. *Пусть $\langle G, f'\rangle$ — примарная абелева полуциклическая n-арная группа порядка p^α, которая не является циклической и производной от группы, $n - 1 = p^\gamma q$, $1 < \gamma < \alpha$, $p \nmid q$ и p^β — индекс подгруппы (d) циклической группы $\langle G, \circ\rangle$ (элемент d взят из теоремы Глускина—Хоссу). Тогда в $\langle G, f'\rangle$ имеется ровно p^β циклических n-арных подгрупп, которые порождаются любым своим элементом. Других собственных n-арных подгрупп в $\langle G, f'\rangle$ нет.*

Доказательство. Любая абелева полуциклическая n-арная группа порядка k, не являющаяся циклической и производной от группы, изоморфна полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа $(k, 1, l)$, где $1 < l <$ НОД$(n-1, k)$ и $l \mid$ НОД$(n-1, k)$ (см. теорему 2.4). Осталось применить предложение 4.7. Следствие доказано. $\square$

4.2. Подгруппы неабелевых полуциклических n-арных групп

Уже отмечалось, что в конечной полуциклической идемпотентной n-арной группе $\langle G, f\rangle$ каждый класс смежности по любой подгруппе циклической группы $\langle G, \circ\rangle$ является n-арной подгруппой, а полуциклическая n-арная группа типа (k, m, l) при $m \neq 1$ будет идемпотентной тогда и только тогда, когда $l = 0$ и $k \mid \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ (см. [5, предложение 6]). Значит, верна следующая теорема.

Теорема 4.9. *В неабелевой полуциклической n-арной группе $\langle G, f\rangle$, изоморфной полуциклической n-арной группе типа $(k, m, 0)$ с условием $k \mid \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$, каждый класс смежности по любой подгруппе группы $\langle G, \circ\rangle$ является идемпотентной n-арной подгруппой.*

Предложение 4.10. *Неабелева полуциклическая n-арная группа $\langle G, f\rangle$ порядка k при* НОД$(k, m-1) = 1$, *где m определяется автоморфизмом φ группы $\langle G, \circ\rangle$ из теоремы Глускина—Хоссу, является идемпотентной полуциклической n-арной группой типа $(k, m, 0)$, в которой все классы смежности по любой подгруппе группы $\langle G, \circ\rangle$ — n-арные подгруппы.*

Доказательство. Если НОД$(k, m-1) = 1$, то из условия $ml \equiv l \,(\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ следует, что $k \mid l$, а значит, $l = 0$. Тогда n-арный порядок каждого элемента из $\langle G, f\rangle$ равен 1 (см. (11)), так как из условия $m^{n-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ следует, что $k \mid \frac{m^{n-1}-1}{m-1}$. Предложение доказано. □

Для неабелевых полуциклических n-арных групп справедливы аналоги предложений 4.6 и 4.7.

Предложение 4.11. *В примарной неабелевой полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа $(p^\alpha, m, 0)$ при условиях $\frac{m^{n-1}-1}{m-1} = p^\gamma q$, $0 < \gamma < \alpha$, $p \nmid q$, для каждой собственной подгруппы $\left(a^{p^\beta}\right)$ группы (a) при $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha$ классы смежности $a^{ip^{\beta-\gamma}}\left(a^{p^\beta}\right)$ являются n-арными подгруппами, среди которых $\phi(p^\gamma)$ будут циклическими при* НОД$(i, p^\gamma) = 1$, *порождаемыми любым своим элементом, а при $\beta < \gamma$ любой класс смежности $a^i\left(a^{p^\beta}\right)$ является n-арной подгруппой. Других n-арных подгрупп в $\langle (a), f\rangle$ нет.*

Доказательство. Фиксируем β с условием $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha$. n-арный порядок каждого элемента $a^{ip^{\beta-\gamma}+jp^\beta}$ из произвольно выбранного класса смежности $a^{ip^{\beta-\gamma}}\left(a^{p^\beta}\right)$ при НОД$(i, p^\gamma) = 1$ равен $p^{\alpha-\beta}$ (см. (11)). Значит, эти классы будут циклическими n-арными подгруппами, порождаемыми любым своим элементом.

Покажем, что остальные классы смежности $a^{ip^{\beta-\gamma}}\left(a^{p^\beta}\right)$ также являются n-арными подгруппами. Действительно, если НОД$(i, p^\gamma) = p^\delta \neq 1$, то $ip^{\beta-\gamma}\frac{m^{n-1}-1}{m-1} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^\beta)$, значит, согласно лемме 4.1 $a^{ip^{\beta-\gamma}}\left(a^{p^\beta}\right)$ — n-арная подгруппа.

Очевидно, найденные выше n-арные подгруппы $a^{ip^{\beta-\gamma}}\left(a^{p^\beta}\right)$ имеют порядок $p^{\alpha-\beta}$. Покажем теперь, что других n-арных подгрупп порядка $p^{\alpha-\beta}$ нет. Пусть H — n-арная подгруппа порядка $p^{\alpha-\beta}$. Тогда H является смежным классом по подгруппе $\left(a^{p^\beta}\right)$, т. е. $H = a^r\left(a^{p^\beta}\right)$. По лемме 4.1 имеем $r\frac{m^{n-1}-1}{m-1} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^\beta)$, но $\frac{m^{n-1}-1}{m-1} = p^\gamma q$, $p \nmid q$, значит, $r = ip^{\beta-\gamma}$ для некоторого i, т. е. $H = a^{ip^{\beta-\gamma}}\left(a^{p^\beta}\right)$.

Пусть теперь $\beta < \gamma$ и $a^r\left(a^{p^\beta}\right)$ — любой класс смежности. Тогда $\frac{m^{n-1}-1}{m-1}$ делится на p^β, т. е. $r\frac{m^{n-1}-1}{m-1} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^\beta)$, значит, согласно лемме 4.1 $a^r\left(a^{p^\beta}\right)$ — n-арная подгруппа. Предложение доказано. □

Предложение 4.12. *В примарной неабелевой полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа (p^α, m, p^β) при $\frac{m^{n-1}-1}{m-1} = p^\gamma q$, $1 \leqslant \beta < \gamma < \alpha$, $p \nmid q$,* *все классы смежности по подгруппе (a^{p^β}) группы (a) являются циклическими n-арными подгруппами, порождаемыми любым своим элементом. Других собственных n-арных подгрупп в $\langle (a), f\rangle$ нет.*

Доказательство. Любой элемент из $\langle (a), f\rangle$ имеет n-арный порядок $p^{\alpha-\beta}$ (см. (11)), значит, каждый класс смежности $a^i(a^{p^\beta})$ $(0 \leqslant i \leqslant p^\beta - 1)$ является циклической n-арной подгруппой, которая порождается любым своим элементом, и других собственных n-арных подгрупп в $\langle (a), f\rangle$ нет. Предложение доказано. □

Следствие 4.13. *Пусть $\langle G, f'\rangle$ — примарная неабелева полуциклическая n-арная группа порядка p^α, в которой d из теоремы Глускина—Хоссу отличен от единицы группы $\langle G, \circ\rangle$, $\frac{m^{n-1}-1}{m-1} = p^\gamma q$, $1 < \gamma < \alpha$, $p \nmid q$ и p^β — индекс подгруппы (d) циклической группы $\langle G, \circ\rangle$. Тогда в $\langle G, f'\rangle$ имеется ровно p^β циклических n-арных подгрупп, которые порождаются любым своим элементом. Других собственных n-арных подгрупп в $\langle G, f'\rangle$ нет.*

Доказательство. Любая неабелева полуциклическая n-арная группа порядка k, в которой d из теоремы Глускина—Хоссу отличен от единицы группы $\langle G, \circ\rangle$, изоморфна полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа (k, m, l), где $1 \leqslant l <$ НОД$\left(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k\right)$ и $l \mid$ НОД$\left(\frac{m^{n-1}-1}{m-1}, k\right)$ (см. теорему 2.4). Осталось применить предложение 4.12. Следствие доказано. □

5. Подгруппы бесконечных полуциклических n-арных групп

Теорема 5.1. *В бесконечной полуциклической n-арной группе $\langle (a), f\rangle$ типа $(\infty, 1, l)$ класс смежности $a^r(a^t)$ по подгруппе (a^t) группы (a) является n-арной подгруппой тогда и только тогда, когда $r(n-1) + l \equiv 0 \pmod t$.*

Доказательство. Если $a^r(a^t)$ — n-арная подгруппа в $\langle (a), f\rangle$ и $a^{s_v} \in a^r(a^t)$ для $v = 1, \ldots, n$, то $f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) \in a^r(a^t)$, т. е. $a^{s_1+\ldots+s_n+l} \in a^r(a^t)$, а значит, $s_1 + \ldots + s_n + l \equiv r \pmod t$. Но из $s_v \equiv r \pmod t$ следует, что $s_1 + \ldots + s_n + l \equiv$ $\equiv nr + l \pmod t$. Тогда $r(n-1) + l \equiv 0 \pmod t$.

Обратно, пусть $r(n-1) + l \equiv 0 \pmod t$. Если $a^{s_v} \in a^r(a^t)$ для $v = 1, \ldots, n$, то $s_1 + \ldots + s_n + l \equiv nr + l \pmod t$, а значит, $f(a^{s_1}, \ldots, a^{s_n}) \in a^r(a^t)$. Если же $a^s \in a^r(a^t)$, т. е. $s \equiv r \pmod t$, то $\overline{a^s} = a^{-s(n-2)-l}$, т. е. $\overline{a^s} \in a^r(a^t)$. Теорема доказана. □

Любая бесконечная неабелева полуциклическая n-арная группа является идемпотентной (см. [5, предложение 10] и теорему 2.10).

Теорема 5.2. *В бесконечной неабелевой полуциклической n-арной группе каждый класс смежности по любой подгруппе (a^t) группы (a) является идемпотентной n-арной подгруппой.*

Доказательство. Любая бесконечная неабелева полуциклическая n-арная группа изоморфна полуциклической n-арной группе $\langle(a), f\rangle$ типа $(\infty, -1, 0)$, где n нечётно (см. теорему 2.10).

Пусть $a^r(a^t)$ — произвольный класс смежности в $\langle(a), f\rangle$. Если $a^{s_v} \in a^r(a^t)$ для $v = 1, \dots, n$, то $s_v \equiv r \pmod t$, а значит, $s_1 - s_2 + \ldots + s_{n-2} - s_{n-1} + s_n \equiv r \pmod t$. Тогда $f(a^{s_1}, \dots, a^{s_n}) \in a^r(a^t)$. Если же $a^s \in a^r(a^t)$, то $\overline{a^s} = a^s$, т. е. $\overline{a^s} \in a^r(a^t)$. Теорема доказана. □

Литература

[1] Воробьёв Г. Н., Решко К. А. Полуциклические идемпотентные n-арные группы // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. — 2004. — No. 2-3 (18).

[2] Гальмак А. М. n-арные группы. Ч. I. — Гомель: Гомельский гос. унив. им. Ф. Скорины, 2003.

[3] Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сб. — 1965. — Т. 68 (110), № 3. — С. 444—472.

[4] Щучкин Н. А. Взаимосвязь n-групп и групп // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, вып. 1 (5). — С. 125—141.

[5] Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Изв. ГТУ. — 2008.

[6] Dudek I. M., Dudek W. A. On skew elements in n-groups // Demonstratio Math. — 1981. — Vol. 14. — P. 827—833.

[7] Dudek W. A., Michalski J. On retrakts of polyadic groups // Demonstratio Math. — 1984. — Vol. 17. — P. 281—301.

[8] Glazek K., Michalski J., Sierocki I. On evaluation of numbers of some polyadic groups // Contribution to General Algebra 3. Proc. Conf. — Vienna, 1984. — P. 157—171.

[9] Hosszú M. On the explicit form of n-group operacions // Publ. Math. — 1963. — Vol. 10, no. 1-4. — P. 88—92.

[10] Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 48. — P. 208—350.

[11] Timm J. Kommutative n-Gruppen: Dissertation. — Hamburg, 1967.