

Приближение функций нескольких переменных нейронными сетями

Д. В. АЛЕКСЕЕВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: dvalex@rambler.ru

УДК 519.95

Ключевые слова: нейросети, линейные функции активации, аппроксимация, интегральная метрика.

Аннотация

В работе доказывается, что в интегральной метрике с весом Чебышёва—Эрмита возможно приближение функции n переменных достаточно общего вида двухслойной нейронной сетью, причём функции активации первого слоя могут быть заданы заранее, а функции активации второго слоя линейны. Выбор веса Чебышёва—Эрмита связан с тем, что он позволяет имитировать нормальное распределение рецепторов, которое встречается в природе, например распределение зрительных рецепторов в глазе человека и других млекопитающих.

Abstract

D. V. Alexeev, Neural network approximation of several variable functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 3, pp. 9—21.

The main result of the work is as follows: in the Chebyshev—Hermite weighted integral metric, it is possible to approximate any function of sufficiently general form by neural network. The approximating net consists of two layers, where the first uses any predefined sigmoid function of activation and second uses linear-threshold function. The Chebyshev—Hermite weight is chosen because it lets one to imitate receptors distribution for example in an eye of a human or some mammal.

1. Введение

В 1900 г. Д. Гильберт сформулировал список проблем, в котором под номером 13 стоял вопрос о представимости функции n переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. В 1956 г. А. Н. Колмогоров (см. [6,7]) показал, что это действительно так, более того, непрерывная функция n переменных может быть представлена в виде суперпозиции одноместных функций и операции сложения. Позднее А. Г. Витушкин в [5] показал, что в классе дифференцируемых функций такая представимость уже не имеет места.

Данный вопрос рассматривался также и для дискретных функций. В 1939 г. Е. Слупецким [18] был получен критерий полноты системы функций k -значной

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 3, с. 9—21.

© 2009 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

логики относительно операции суперпозиции. Оказалось, что для получения всех функций k -значной логики достаточно наличия в системе лишь одноместных и хотя бы одной существенной (т. е. зависящей существенно от не менее чем двух переменных и принимающей все k значений) функции. Для детерминированных функций С. С. Марченков в [9] получил отрицательный результат: он показал, что для любого натурального k существует детерминированная функция от $k + 1$ переменных, которую невозможно представить в виде суперпозиции детерминированных функций от меньшего числа переменных. В то же время для ограниченно детерминированных функций Д. Н. Бабин [3] получил положительный ответ: объединение одноместных ограниченно детерминированных и булевых (т. е. представимых автоматом с одним состоянием) функций полно во множестве n -местных ограниченно детерминированных функций.

Необходимость в представлениях функций n переменных в виде суперпозиции функций от меньшего числа переменных возникла в связи с развитием теории и практики нейронных сетей. Появление нейронных сетей связывают со статьями У. Мак-Каллока и У. Питтса (см. [8]), в которой описывается математическая модель нейрона и нейронной сети. Было доказано, что как булевы функции, так и конечные автоматы могут быть представлены нейронными сетями.

Позднее Ф. Розенблатт [11] предложил модель, названную им перцептроном, и алгоритм обучения для такой модели. Было показано, что перцептроны могут решать некоторые задачи более эффективно, чем компьютеры традиционной архитектуры. Однако позднее серьёзный математический анализ перцептронов, проведённый М. Минским и С. Пейпертом [10], выявил серьёзные ограничения на области применимости перцептронов. В частности, было показано, что некоторые задачи, которые в принципе могут быть решены перцептроном, могут потребовать нереально большого времени или нереально большого количества нейронов.

В дальнейшем ограничения были ослаблены путём замены пороговых функций активации нейронов на сигмоидные. Так, в 1989 г. Г. Цыбенко [12], К. Фунахаши [13] и К. Хорник [17] независимо доказали следующий факт. Пусть ψ — фиксированная сигмоидная функция, а f — непрерывная на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ функция n переменных. Тогда f можно аппроксимировать в смысле равномерного приближения четырёхслойной сетью (с двумя скрытыми слоями), причём функции активации первого и последнего слоя линейны, а для промежуточных слоёв равны ψ .

Р. Хехт-Нильсен [16] доказал представимость непрерывной функции многих переменных с помощью двухслойной нейронной сети с n компонентами входного сигнала, $2n + 1$ компонентами первого (скрытого) слоя с сигмоидными функциями активации и M компонентами второго слоя с неизвестными функциями активации. Таким образом, в неконструктивной форме была доказана решаемость задачи представления функции достаточно произвольного вида на нейронной сети.

В данной работе доказывается, что в интегральной метрике с весом, удовлетворяющим некоторым условиям, возможно приближение произвольной функции n переменных двухслойной нейронной сетью, причём функции активации первого слоя могут быть заданы заранее, а второго линейны.

2. Основные результаты

Введём необходимые определения.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Пусть A^n — это множество всех аффинных функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, т. е. функций вида $A(x) = \bar{w} \cdot \bar{x} + b$, где $\bar{x}$ и $\bar{w}$ — векторы из $\mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Пусть $\rho(\bar{x}) = \rho(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая весовая функция. Будем обозначать через $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ множество измеримых по Лебегу функций n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$, для которых конечна следующая норма:

$$\|f(\cdot)\|_{p,\rho} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{esssup}_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Определение 3. Пусть $1 \leq p < \infty$. Будем называть весовую функцию $\rho(x_1, \dots, x_n) > 0$ p -сходящейся, если

- 1) $\rho(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^n)$;
- 2) при любом $M > 0$ выполнено неравенство $\operatorname{essinf}_{[-M,M]^n} \rho(\bar{x}) > 0$.

Определение 4. Пусть $p = \infty$. Будем называть весовую функцию $\rho(x_1, \dots, x_n) > 0$ ∞ -сходящейся, если

- 1) $\rho(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$;
- 2) $\lim_{M \rightarrow +\infty} \operatorname{esssup}_{\mathbb{R}^n \setminus [-M,M]^n} \rho(x) = 0$;
- 3) при любом $M > 0$ выполнено неравенство $\operatorname{essinf}_{[-M,M]^n} \rho(\bar{x}) > 0$.

Определение 5. Пусть G — измеримая функция и $n \in \mathbb{N}$. Будем обозначать через

$$\Sigma^n(G) = \left\{ f(\bar{x}) \mid f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^q \beta_j G(A_j(\bar{x})), \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \beta_j \in \mathbb{R}, A_j \in A^n, q \in \mathbb{N} \right\}$$

множество функций, порождаемых функцией G посредством аффинных преобразований аргумента и линейной комбинации.

Определение 6. Функция $\Psi(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ называется сигмоидной, если $\Psi(x)$ является монотонно неубывающей на $\mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 1$.

Определение 7. Пусть $\mathfrak{M} \subset L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ — некоторое множество функций. Закрытием множества $\mathfrak{M}$ в метрике $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ называется множество функций

$$[\mathfrak{M}]_{p,\rho} = \left\{ f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n) \mid \text{найдётся последовательность } \{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{M}, \right. \\ \left. \text{для которой } \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{p,\rho} = 0 \right\}.$$

Определение 8. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое измеримое множество. Характеристической функцией множества M называется функция

$$\chi_M(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x_1, \dots, x_n) \in M, \\ 0 & \text{при } (x_1, \dots, x_n) \notin M. \end{cases}$$

Определение 9. Будем обозначать через $C_\rho^0(\mathbb{R}^n)$ множество всех непрерывных функций n переменных, для которых $\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})| = 0$.

Теорема 1. Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция, $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$[\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho} = L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n).$$

Другими словами, множество $\Sigma^n(\psi)$ всюду плотно в $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция, $p = \infty$. Тогда

$$C_\rho^0(\mathbb{R}^n) \subset [\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}.$$

Другими словами, множество $\Sigma^n(\psi)$ всюду плотно в $L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n) \cap C_\rho^0(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1 (к теореме 2). Классы функций $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ и $C_\rho^0(\mathbb{R}^n)$ не совпадают. Действительно, функция $\psi \in [\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ не обязательно непрерывна. Кроме того, изменив $f \in [\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ на множестве лебеговой меры нуль, мы получим функцию, принадлежащую $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$, но не являющуюся непрерывной.

Замечание 2 (к теореме 2). Классы функций $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho}$ и $L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n)$ не совпадают. Действительно, из определения p -сходящегося веса вытекает, что весовая функция $\rho(\bar{x})$ положительна при почти всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Тогда функция $f(x) = \rho^{-1}(x)$, очевидно, принадлежит $L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n)$. Если попытаться приблизить её с помощью

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^K c_k \psi(a_k x + b_k),$$

получим

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - f_1(x))\rho(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x)\rho(x) = 1,$$

поскольку $f_1(x)$ — ограниченная функция. Очевидно, $\|f(\cdot) - f_1(\cdot)\|_{\infty,\rho} \geq 1$, а значит, $f(\cdot) \notin [\Sigma^1(\psi)]_{\infty,\rho}$. Таким образом, $[\Sigma^n(\psi)]_{\infty,\rho} \neq L_{\infty,\rho}(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства теорем потребуются следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и весовая функция $\rho^{(1)}(x)$ является p -сходящейся. Пусть Ψ — непрерывная сигмоидная функция и ψ — произвольная сигмоидная функция. Тогда

$$\Psi \in [\Sigma^1(\psi)]_{p,\rho}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\varepsilon < 1$. Пусть $P = \|\rho^{(1)}\|_{L_p^1} = \|\mathbf{1}\|_{p,\rho}$. Возьмём такое $Q \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{Q} < \frac{\varepsilon}{2P}$, и такое $M > 0$, что $\psi(-M) < \frac{\varepsilon}{2PQ}$ и $\psi(M) > 1 - \frac{\varepsilon}{2PQ}$. Существование такого M вытекает из определения сигмоидной функции.

Поскольку функция $\Psi(x)$ непрерывна и не убывает на $\mathbb{R}$, то существует обратная к ней функция $\Psi^{-1}(y) = \max\{x: \Psi(x) = y\}$, определённая на $(-1, 1)$ и непрерывная справа. Очевидно, $\Psi(\Psi^{-1}(y)) = y$ при всех $0 < y < 1$. Введём обозначение

$$r_j = \begin{cases} \Psi^{-1}(\frac{1}{2Q}) & \text{при } j = 0, \\ \Psi^{-1}(\frac{j}{Q}) & \text{при } j = 1, 2, \dots, Q-1, \\ \Psi^{-1}(1 - \frac{1}{2Q}) & \text{при } j = Q. \end{cases}$$

Пусть $1 \leq r < s \leq Q$ и $A_{r,s}(x) = -M + 2M \frac{x-s}{r-s}$ — аффинная функция, отображающая отрезок $[r, s]$ в $[-M, M]$. Рассмотрим функцию

$$H_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{Q-1} \frac{1}{Q} \psi(A_{r_j, r_{j+1}}(x)).$$

Пусть $x \in (r_{j_0}, r_{j_0+1}]$. Тогда для $\psi(A_{r_j, r_{j+1}}(x))$ выполнены следующие неравенства:

- 1) $1 - \frac{\varepsilon}{2Q} < \psi(A_{r_j, r_{j+1}}(x)) < 1$ при $j < j_0$;
- 2) $0 < \psi(A_{r_j, r_{j+1}}(x)) < 1$ при $j = j_0$;
- 3) $0 < \psi(A_{r_j, r_{j+1}}(x)) < \frac{\varepsilon}{2PQ}$ при $j > j_0$.

Умножая неравенства на $\frac{1}{Q}$ и суммируя по j , получим

$$\frac{j_0}{Q} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2PQ}\right) < H_\varepsilon(x) < \frac{j_0+1}{Q} + (Q-j_0) \frac{\varepsilon}{2PQ^2}. \quad (1)$$

Из выбора r_j вытекают неравенства $\frac{j_0}{Q} < \Psi(x) \leq \frac{j_0+1}{Q}$. Сравнивая с (1), получаем, что $|\Psi(x) - H_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{P}$ для любого $x \in (r_{j_0}, r_{j_0+1}]$. Аналогично проверяются неравенства для $x \in (-\infty, r_0]$ и $x \in (r_Q, +\infty)$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $H_\varepsilon(x) \in \Sigma^1(\psi)$, для которой $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Psi(x) - H_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{P}$, а следовательно, $\|\Psi(x) - H_\varepsilon(x)\|_{p,\rho} < \varepsilon$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и весовая функция $\rho^{(1)}(x)$ является p -сходящейся. Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция. Тогда

$$\cos(x) \in [\Sigma^1(\psi)]_{p,\rho}.$$

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\cos_\varepsilon(x) \in \Sigma^1(\psi)$, такая что $\|\cos(\cdot) - \cos_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \varepsilon$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $r \in \mathbb{N}$, такое что

$$\max(\|\chi_{[2\pi r, \infty)}(\cdot)\|_{p,\rho}, \|\chi_{(-\infty, 2\pi r]}(\cdot)\|_{p,\rho}) < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2)$$

Существование такого r вытекает из определения p -сходящегося веса. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-2\pi r, 2\pi r], \\ 1, & x \notin [-2\pi r, 2\pi r]. \end{cases}$$

Очевидно, из (2) следует, что

$$\|\cos(\cdot) - f(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Функция $f(x)$ — непрерывная функция конечной вариации на $\mathbb{R}$, поскольку $\bigvee_{-\infty}^{\infty} f = \bigvee_{-2\pi r}^{2\pi r} f = 8\pi r$. Таким образом, она представима в виде $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, где f^+ и f^- — непрерывные неубывающие функции. Для определённости зададим их в концах отрезка: пусть $f^+(-2\pi r) = 1$, тогда $f^-(-2\pi r) = 0$, $f^+(2\pi r) = 1 + 8\pi r$, $f^-(2\pi r) = 8\pi r$.

Докажем, что $f^+ \in [\Sigma^1(\psi)]_{p,\rho}$. Пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{32\pi r}$. Рассмотрим аффинное преобразование

$$A(t) = \frac{t - f^+(-2\pi r)}{f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r)},$$

отображающее отрезок $[f^+(-2\pi r), f^+(2\pi r)]$ в $[0, 1]$. Тогда $A(f^+(x))$ — сигмоидная функция, а значит, по лемме 1 существует функция $\psi^+ \in \Sigma^1(\psi)$, такая что

$$\|A(f^+(\cdot)) - \psi^+(\cdot)\|_{p,\rho} < \varepsilon_1.$$

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon^+(x) = A^{-1}(\psi^+(x)) = f^+(-2\pi r) + (f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r))\psi^+(x).$$

Очевидно, $f_\varepsilon^+(x) \in \Sigma^1(\psi)$. Поскольку

$$f^+(x) = A^{-1}(A(f^+(x))) = f^+(-2\pi r) + (f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r))A(f^+(x)),$$

то

$$\begin{aligned} \|f^+(\cdot) - f_\varepsilon^+(\cdot)\|_{p,\rho} &\leq (f^+(2\pi r) - f^+(-2\pi r))\|A(f^+(\cdot)) - \psi^+(\cdot)\|_{p,\rho} < \\ &< 8\pi r \frac{\varepsilon}{32\pi r} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично доказывается существование функции $f_\varepsilon^- \in \Sigma^1(\psi)$, для которой

$$\|f^-(\cdot) - f_\varepsilon^-(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Из неравенств (3)–(5) вытекает утверждение леммы 2. $\square$

Лемма 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и весовая функция $\rho(\bar{x})$ является p -сходящейся. Пусть $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\chi_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]}(\cdot) \in [\Sigma^n(\cos(\cdot))]_{p, \rho}.$$

Доказательство. Выберем произвольное $0 < \varepsilon < 1$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $a_i = -1$, $b_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, поскольку произвольный гиперкуб аффинными преобразованиями можно отобразить в единичный. Выберем такое $r \in \mathbb{N}$, что

$$\|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi r, \pi r]^n}(\cdot)\|_{p, \rho} < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (6)$$

и рассмотрим функцию (рис. 1)

$$\chi_{[-1, 1]}^\delta(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ 1, & |x| \leq 1 - \delta, \\ \frac{1 - |x|}{\delta}, & 1 - \delta < |x| < 1. \end{cases}$$

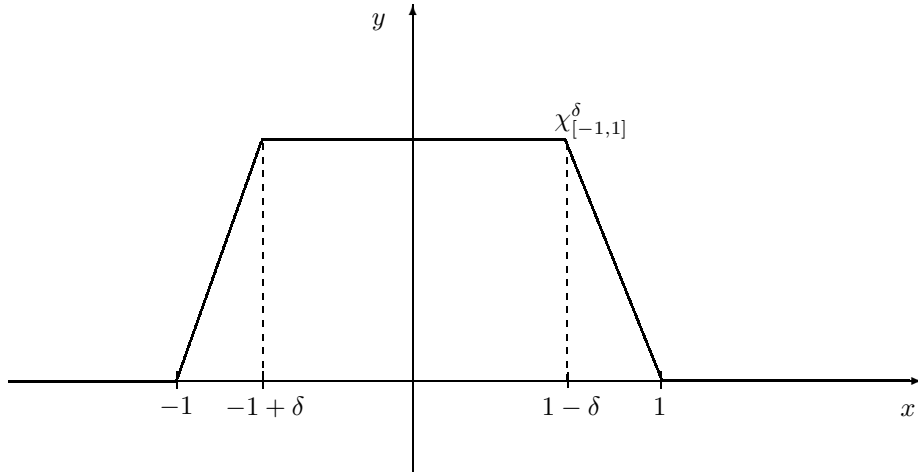


Рис. 1. График функции $\chi_{[-1, 1]}^\delta(x)$

Очевидно,

$$\|\chi_{[-1, 1]} - \chi_{[-1, 1]}^\delta\|_{p, \rho} < 2\delta \cdot \|\rho(\cdot)\|_p = 2\delta \cdot \|\mathbf{1}\|_{p, \rho}. \quad (7)$$

Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{3n\|\rho(\cdot)\|_p}$ и обозначим

$$f_\delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \chi_{[-1, 1]}^\delta(x_i).$$

Тогда из (7) вытекает, что

$$\|\chi_{[-1, 1]^n} - f_\delta\|_{p, \rho} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

Поскольку функция f_δ непрерывна, по теореме Вейерштрасса для функций n переменных [4] существуют такое N и такой тригонометрический полином

$$P_N(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N c_{k_1 \dots k_n} \cos \frac{k_1 x_1}{r} \cos \frac{k_2 x_2}{r} \dots \cos \frac{k_n x_n}{r},$$

что

$$\sup_{\bar{x} \in [-\pi r, \pi r]^n} |f_\delta(\bar{x}) - P_N(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (9)$$

В сумме отсутствуют члены, содержащие $\sin \frac{k_i x_i}{r}$, поскольку функция f_δ является чётной по всем аргументам. Это не ограничивает общности рассуждений. Несложно заметить, что $P_N(\cdot) \in \Sigma^n(\cos(\cdot))$, поскольку произведение $\cos \frac{k_1 x_1}{r} \cos \frac{k_2 x_2}{r} \dots \cos \frac{k_n x_n}{r}$ легко преобразовать в сумму последовательным применением формулы

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Из $2\pi r$ -периодичности функции $P_N(x_1, \dots, x_n)$ по всем аргументам следует, что

$$\sup_{\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus [-\pi r, \pi r]^n} |P_N(\bar{x})| = \sup_{\bar{x} \in [-\pi r, \pi r]^n} |P_N(\bar{x})|.$$

Таким образом, учитывая (9), получим

$$\sup_{\bar{x} \in [-\pi r, \pi r]^n} |P_N(\bar{x})| < 1 + \frac{\varepsilon}{3} < 2. \quad (10)$$

Из неравенств (6), (9) и (10) получим

$$\begin{aligned} \|f_\delta(\cdot) - P_N(\cdot)\|_{p,\rho} &\leq \sup_{\bar{x} \in [-\pi r, \pi r]^n} |f_\delta(\bar{x}) - P_N(\bar{x})| \cdot \|\chi_{[-\pi r, \pi r]^n}(\cdot)\|_{p,\rho} + \\ &+ \sup_{\bar{x} \notin [-\pi r, \pi r]^n} |P_N(\bar{x})| \cdot \|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi r, \pi r]^n}(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3} + 2 \frac{\varepsilon}{6} = \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Учитывая (8), имеем

$$\|\chi_{[-1,1]^n}(\cdot) - P_N(\cdot)\|_{p,\rho} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 4. Пусть $1 \leq p < \infty$ и весовая функция $\rho^{(1)}(x)$ является p -сходящейся. Пусть $\psi(x)$ — произвольная сигмоидная функция, $B \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество. Тогда

$$\chi_B(\cdot) \in [\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho}.$$

Доказательство. Выберем такое $M > 0$, что

$$\|\chi_{\mathbb{R}^n \setminus [-M, M]^n}(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

Поскольку множество $B_M = B \cap [-M, M]^n$ является измеримым по Лебегу, то существует

$$B_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N [a_i^1, b_i^1] \times [a_i^2, b_i^2] \times \dots \times [a_i^n, b_i^n],$$

такое что

$$\mu(B_M \triangle B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (12)$$

где $\mu(\cdot)$ — мера Лебега, $\triangle$ — симметрическая разность множеств. Из лемм 2 и 3 вытекает, что $\chi_{B_\varepsilon}(\cdot) \in [\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho}$. Тогда существует функция $f_\varepsilon(\cdot) \in [\Sigma^n(\psi)]_{p,\rho}$, такая что

$$\|\chi_{B_\varepsilon}(\cdot) - f_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (13)$$

Следовательно, из (11)–(13) имеем

$$\begin{aligned} \|\chi_B(\cdot) - f_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} &\leq \|\chi_B(\cdot) - \chi_{B_M}(\cdot)\|_{p,\rho} + \|\chi_{B_M}(\cdot) - \chi_{B_\varepsilon}(\cdot)\|_{p,\rho} + \\ &\quad + \|\chi_{B_\varepsilon}(\cdot) - f_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 1. Выберем такое $M > 0$, что

$$\|f(\cdot) - f_M(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (14)$$

где

$$f_M(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in [-M, M]^n, \\ 0 & \text{при } \bar{x} \notin [-M, M]^n. \end{cases}$$

Очевидно, функция $f_M(\cdot)$ измерима по Лебегу и

$$\begin{aligned} &\int_{[-M, M]^n} |f(\bar{x})|^p dx_1 \dots dx_n \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_{[-M, M]^n} \rho(\bar{x})} \right)^p \int_{[-M, M]^n} |f(\bar{x}) \rho(\bar{x})|^p dx_1 \dots dx_n \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_{[-M, M]^n} \rho(\bar{x})} \right)^p \|f(\cdot)\|_{p,\rho}^p < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $f_M(\cdot) \in L_p([-M, M]^n)$. Следовательно, существует функция

$$g(\cdot) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{B_k}(\cdot),$$

где $B_k \subset [-M, M]^n$ — измеримые по Лебегу множества, такая что

$$\|f_M(\cdot) - g(\cdot)\|_{p,\rho} \leq \lambda_{p,n} \|f_M(\cdot) - g(\cdot)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (15)$$

Согласно лемме 4 существует функция $g_\varepsilon(\cdot) \in \Sigma^n(\psi)$, такая что

$$\|g(\cdot) - g_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16)$$

Из неравенств (14)–(16) получаем, что

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - g_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} &\leq \\ &\leq \|f(\cdot) - f_M(\cdot)\|_{p,\rho} + \|f_M(\cdot) - g(\cdot)\|_{p,\rho} + \|g(\cdot) - g_\varepsilon(\cdot)\|_{p,\rho} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 2. Выберем такое $M > 0$, что

$$\|f(\cdot) - f_M(\cdot)\|_{\infty,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (17)$$

где

$$f_M(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \in [-M, M]^n, \\ 0 & \text{при } \bar{x} \notin [-M, M]^n. \end{cases}$$

По теореме Вейерштрасса для функций n переменных существует такой тригонометрический полином

$$\begin{aligned} P_N(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_n=1}^N c_{k_1 \dots k_n} \cos\left(\frac{\pi k_1 x_1}{M} + b_{k_1 \dots k_n}^1\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi k_n x_n}{M} + b_{k_1 \dots k_n}^n\right), \end{aligned}$$

что

$$\sup_{\bar{x} \in [-M, M]^n} |f_M(\bar{x}) - P_N(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (18)$$

Заменив, как и в доказательстве леммы 3, произведение косинусов на их сумму, получим, что $P_N(\cdot) \in \Sigma^n(\cos(\cdot))$. Следовательно, из леммы 2 вытекает существование функции $\psi_\varepsilon \in \Sigma^n(\psi)$, такой что

$$\|P_N(\cdot) - \psi_\varepsilon(\cdot)\|_{\infty,\rho} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (19)$$

Из неравенств (17)–(19) получаем, что

$$\|f(\cdot) - \psi_\varepsilon(\cdot)\|_{\infty,\rho} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. $\square$

3. Обобщение теоремы Хехт-Нильсена

Теорема 3. Пусть $\psi(x)$ — не равная константе, ограниченная, непрерывная и монотонно возрастающая функция. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $f(\cdot) \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$, если $p < \infty$, и $f \in C_\rho^0(\mathbb{R}^n)$, если $p = \infty$. Тогда функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно аппроксимировать в метрике пространства $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ нейронной сетью с двумя слоями. Функции активации для первого слоя — $\psi(x)$, а для второго линейны.

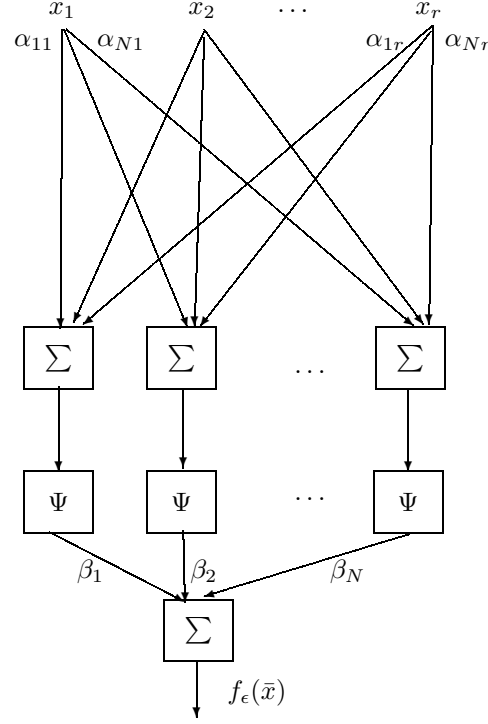


Рис. 2. Схема нейронной сети

Доказательство. По теоремам 1 и 2 любую функцию указанного вида можно приблизить функциями вида

$$f_\varepsilon(\bar{x}) = \sum_{n=1}^N \beta_n \psi(\alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nr}x_r)$$

так, чтобы $\|f - f_\varepsilon\|_{p,\rho} < \varepsilon$. Очевидно, нейронная сеть, изображённая на рис. 2 реализует указанную функцию $f_\varepsilon(\bar{x})$. $\square$

Замечание 3. В отличие от теоремы Хехт-Нильсена [16], теорема 3 является конструктивной. Действительно, пусть задана аппроксимируемая функция $f(\bar{x})$ и функция активации $\psi(x)$ позволяет выразить тригонометрические функции в явном виде, например, $\psi(x)$ — функция Галланта—Уайта [19]:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1+\sin x}{2} & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

Тогда, используя данную работу и работы [4, 14, 15] можно построить в явном виде нейронную сеть, аппроксимирующую $f(\bar{x})$ в метрике пространства $L_{p,\rho}(\mathbb{R}^n)$ с заданной точностью ε . Кроме того, функции активации сети имеют довольно простой вид и, следовательно, могут быть реализованы в виде некоторых электронных устройств.

Автор выражает благодарность профессору В. Б. Кудрявцеву и доценту А. С. Строгалову за привлечение внимания к задаче обоснования корректности применения нейронных сетей в моделировании свойств непрерывных отображений и за обсуждения в ходе её решения.

Литература

- [1] Арнольд В. И. О представлении любой непрерывной функции трёх переменных в виде суммы функций не более двух переменных // ДАН СССР. — 1957. — Т. 114, № 4.
- [2] Арнольд В. И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // Мат. просвещение. — 1958. — Вып. 3. — С. 41—61.
- [3] Бабин Д. Н. О полноте двухместных ограниченно детерминированных функций относительно суперпозиции // Дискрет. мат. — 1989. — Т. 1, № 4. — С. 86—91.
- [4] Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Собр. соч. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — С. 11—104.
- [5] Витушкин А. Г., Хенкин Г. М. Линейные суперпозиции функций // Успехи мат. наук. — 1967. — Т. 22, № 1. — С. 77—124.
- [6] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // ДАН СССР. — 1956. — Т. 108. — С. 2.
- [7] Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // ДАН СССР. — 1957. — Т. 114. — С. 953—956.
- [8] Мак-Каллок У., Питтс У. Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности // Автоматы. — М.: Изд. иностр. лит., 1956. — С. 362—384.
- [9] Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Проблемы кибернетики. Вып. 37. — М.: Наука, 1980. — С. 5—17.
- [10] Минский М., Пейперт С. Перцептроны. — М.: Мир, 1971.
- [11] Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептрон и теория механизмов мозга. — М.: Мир, 1965.
- [12] Cybenko G. Approximations by superpositions of sigmoidal functions // Math. Control Signals Systems. — 1989. — Vol. 2. — P. 303—314.
- [13] Funahashi K. On the approximate realization of continuous mappings by neural networks // Neural Networks. — 1989. — Vol. 2, no. 3. — P. 183—192.

- [14] Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. — Göttingen: Preisschrift und Inaugural—Dissertation, 1911.
- [15] Jackson D. The Theory of Approximation. — Amer. Math. Soc., 1930. — (Colloq. Publ.; Vol. 11).
- [16] Hecht-Nielsen R. Kolmogorov's mapping neural network existence theorem // IEEE First Annual Int. Conf. on Neural Networks, San Diego, 1987. Vol. 3. — P. 11—13.
- [17] Hornik K., Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators // Neural Networks. — 1989. — Vol. 2, no. 5. — P. 359—366.
- [18] Slupecki J. Kryterium pelnosci wielowartosciowych systemow rachunkow zdan // C. R. Classe III. — 1939. — Vol. 32, no. 1-3. — P. 102—109.
- [19] White H., Gallant A. R., Hornik K., Stinchcombe M., Wooldridge J. Artificial Neural Networks: Approximation and Learning Theory. — Cambridge, MA: Blackwell, 1992.

