Автоматы в алгебре

С. В. АЛЁШИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: aleshin@intsys.msu.ru

УДК 519.95

Ключевые слова: конечные полугруппы, сплетение полугрупп, алгебры автоматов.

Аннотация

В статье приводятся некоторые алгебраические проблемы, которые удаётся решить средствами теории автоматов, и рассматривается применение алгебраических конструкций для решения задач теории автоматов.

Abstract

S. V. Aleshin, Automata in algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 3, pp. 23—32.

In this article, some algebraical problems are considered. Several aspects of automaton theory and algebraical structures needed to obtain solutions of the problems are discussed.

Автоматы как объекты математических исследований возникли в математической логике. Одна из формализаций понятия алгоритма — машина Тьюринга — использует описание конечного автомата в виде программы «управляющей головки». Первые работы по теории автоматов рассматривали отображения входных слов в выходные — автоматные функции. Однако очень быстро связь автоматов с алгеброй расширилась до сильного взаимного воздействия.

Теория автоматов оперирует с широким кругом алгебраических объектов и средств. Алгебраические методы активно использовались для решения задач теории автоматов в годы её становления. Со временем оказалось, что уже методы теории автоматов могут с успехом применяться в алгебраических исследованиях.

Первой систематической работой, в которой раскрывались связи алгебры и теории автоматов, была статья В. М. Глушкова [7]. В ней были подчёркнуты связи теории автоматов с теорией полугрупп, например связь понятий представимости событий в автоматах и разбиения на свободных полугруппах. Интересно, что, рассматривая строение классов эквивалентности, соответствующих отношениям конгруэнтности на свободной полугруппе входных слов, В. М. Глушков упоминает о возможности применения теории автоматов для решения известной алгебраической проблемы — проблемы Бернсайда о периодических группах.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 3, с. 23—32.
© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Как будет показано ниже, этот прогноз оправдался, хотя путь решения оказался другим.

В последующих работах набор алгебраических объектов, связанных с автоматами, расширился, в нём появились как классические группы, полугруппы, кольца, пространства, так и алгебраические системы, ранее не возникавшие в математических исследованиях.

Особое место в теории автоматов занимают алгебраические конструкции, связанные с (конечными) полугруппами. С конечным автоматом $\mathscr{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где A и B — входной и выходной алфавиты соответственно, Q — множество состояний, $\varphi\colon A \times Q \to Q$ — функция переходов, $\psi\colon A \times Q \to B$ — функция выходов, можно связать полугруппу подстановок на множестве Q. Каждая буква $a \in A$ входного алфавита действует на Q как подстановка $\varphi_a\colon Q \to Q$, $\varphi_a(q) = \varphi(q, a)$. Последовательное действие букв a_1 и a_2 соответствует произведению подстановок φ_{a_1} и φ_{a_2}:

$$\varphi_{a_1 a_2}\colon Q \to Q, \quad \varphi_{a_1 a_2}(q) = \varphi_{a_2}\bigl(\varphi_{a_1}(q)\bigr).$$

Таким образом, множество $\langle \varphi_a \mid a \in A \rangle$ порождает конечную полугруппу $P_{\mathscr{A}}$, называемую внутренней полугруппой автомата $\mathscr{A}$. Очевидно, что $P_{\mathscr{A}}$ является гомоморфным образом свободной полугруппы A^* (A^* — множество всех слов в алфавите A).

Методы теории конечных полугрупп были применены для решения важной задачи декомпозиции автоматов, т. е. представления автомата в виде соединения более «простых» автоматов. Оказалось, что эти методы хорошо работают в случае, когда автомат можно разложить в суперпозицию автоматов. Среди многих работ 1960-х годов, посвящённых этому направлению, центральное место занимает работа К. Крона, Дж. Роудза и Б. Р. Тилсона (см. [1]), которым удалось показать, как внутренняя полугруппа автомата суперпозиции связана с внутренними полугруппами автоматов — компонентов соединения.

Оказалось, что если выход автомата $\mathscr{A}_1 = (A_1, Q_1, B, \varphi_1, \psi_1)$ соединить со входом автомата $\mathscr{A}_2 = (B, Q_2, C, \varphi_2, \psi_2)$, то полугруппа полученного автомата-суперпозиции является подполугруппой сплетения полугруппы автомата $\mathscr{A}_1$ и полугруппы автомата $\mathscr{A}_2$. Напомним, что сплетение полугруппы P_1 подстановок на множестве Q_1 и полугруппы P_2 подстановок на множестве Q_2 — это полугруппа P подстановок на декартовом произведении $Q_1 \times Q_2$. Элементами P являются пары (p, f), $p \in P_1$, $f \in F$, где F — множество функций из Q_1 в P_2,

$$F = \{f \mid f\colon Q_1 \to P_2\},$$

а действие пары (p, f) на $Q_1 \times Q_2$ определяется следующим образом:

$$(p, f)[q_1 q_2] = [q_1', q_2'], \quad q_1' = p[q_1], \quad q_2' = f(q_1)[q_2].$$

Здесь $w[x]$ обозначает действие подстановки w на элемент x.

Можно заметить, что операция сплетения имеет «автоматный» вид. В самом деле, рассмотрим устройство, на вход которого поступают пары (q_1, q_2). В «начальном состоянии» устройство перерабатывает первый элемент q_1 пары (q_1, q_2)

в элемент $p[q_1]$, при этом устройство переходит в состояние, зависящее от q_1, и в этом состоянии перерабатывает второй элемент q_2 пары (q_1, q_2) в элемент $f(q_1)[q_2]$. Таким образом, устройство определяет действие подстановки (p, f) сплетения полугрупп P_1 и P_2.

При суперпозиции автоматов A_1 и A_2 их внутренние полугруппы «сплетаются». Если пара (q_1, q_2) — это состояние суперпозиции, q_i — состояние A_i, $i = 1, 2$, то входная буква $a \in A$ действует на состояние q_1 как подстановка из полугруппы P_1 автомата A_1, а пара (q_1, a) определяет подстановку из P_2, действующую на состояние q_2. Так возникает элемент сплетения полугрупп P_1 и P_2.

Итак, с каждым автоматом можно связать его (внутреннюю) полугруппу. С другой стороны, абстрактной полугруппе P соответствует (бесконечно) много автоматов, внутренняя полугруппа каждого из которых — это полугруппа подстановок, изоморфная P. В частности, можно рассмотреть автомат $S_p = (P, P, P, *, *)$, у которого входной и выходной алфавиты и множество состояний совпадают с множеством элементов P, а функции переходов и выходов определяются «таблицей умножения» в P: $\varphi(p, p') = p{*}p'$, $\psi(p, p') = p{*}p'$, где $*$ — операция умножения в P. Такой автомат назовём специальным автоматом полугруппы P. В упомянутой работе [1] дана полная характеризация разложений автомата на компоненты, которые являются специальными автоматами.

Центральной задачей теории автоматов является задача о выразимости. Если указан набор Σ операций, с помощью которых из данных автоматов можно строить новые, то этот набор определяет оператор замыкания I на множестве автоматов. Для заданного множества автоматов M множество $I(M)$ — это все автоматы, которые получаются многократным применением операций из Σ к автоматам M. Для двух множеств M_1 и M_2 решение задачи выразимости с оператором замыкания I состоит в проверке включения $I(M_1) \subseteq I(M_2)$.

В [1] эта задача была решена для случая, когда M_2 состоит из специальных автоматов полугрупп и, кроме того, содержит все автоматы без памяти (операторы). В качестве операций рассматривались операции суперпозиции.

Важным оказалось понятие делимости полугрупп (и, соответственно, автоматов). Полугруппа P_1 делит полугруппу P_2, если P_1 является гомоморфным образом подполугруппы полугруппы P_2. Из определения следует, в частности, что простая группа может иметь нетривиальные делители. Например, знакопеременная группа A_m делит группу A_n при $m < n$. В то же время простые группы сохраняют свойство «элементарных частиц», т. е. если простая группа P делит сплетение полугрупп P_1 и P_2, то P является делителем P_1 или P_2. Этим же свойством обладает и так называемая полугруппа триггера (трёхэлементная полугруппа, состоящая из двух правых нулей и единицы). Поскольку сплетение полугрупп возникает при суперпозиции автоматов, на этом пути в [1] была получена теорема о декомпозиции автомата в суперпозицию специальных автоматов.

При всей важности работы [1] в ней присутствовало сильное ограничительное требование рассматривать в качестве компонентов разложения специальные автоматы. Ниже мы вернёмся к этому вопросу.

Бесконечные полугруппы и группы стали объектами изучения в теории автоматов с конца 1960-х годов. Зафиксируем конечный алфавит $A = (a_1, \dots, a_m)$ и рассмотрим множество P_A всех автоматных отображений множества A^* всех слов в алфавите A в себя. Каждое такое отображение реализуется некоторым конечным инициальным автоматом $\mathscr{A} = (A, Q, A, \varphi, \psi, q_0)$. На множестве P_A естественно определяется операция суперпозиции отображений: если функция $F_1(x)$ вычисляется автоматом $\mathscr{A}_1 = (A, Q, A, \varphi_1, \psi_1, q_0^1)$, а функция $F_2(x)$ — автоматом $\mathscr{A}_2 = (A, Q_2, A, \varphi_2, \psi_2, q_0^2)$, то, соединяя выход $\mathscr{A}_1$ с входом $\mathscr{A}_2$, мы построим автомат $\mathscr{A} = (A, Q, A, \varphi, \psi, q_0)$, у которого $Q = Q_1 \times Q_2$ и для $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$

$$\varphi\big((q_1, q_2), a\big) = (q_1', q_2'), \quad q_1' = \varphi_1(q_1, a), \quad q_2' = \varphi_2\big(q_2, \psi_1(q_1, a)\big),$$
$$\psi\big((q_1, q_2), a\big) = \psi_2\big(q_2, \psi_1(q_1, a)\big), \quad q_0 = (q_0^1, q_0^2).$$

Автомат $\mathscr{A}$ реализует, очевидно, суперпозицию F функций F_1 и F_2: $F(x) = F_2\big(F_1(x)\big)$. Введённая операция превращает P_A в полугруппу с единицей, роль которой играет автомат-«проводник», т. е. автомат с одним состоянием, в котором реализуется тождественная подстановка на множестве A.

Нетривиальное свойство полугруппы P_A заключается в том, что в ней каждая порождающая система элементов приводима, т. е. содержит собственную порождающую подсистему [3].

Если отображение $F_a \colon A^* \to A^*$, реализуемое конечным автоматом, является взаимно-однозначным, то обратное отображение также реализуется некоторым конечным автоматом (число состояний которого равно числу состояний автомата $\mathscr{A}$). Множество таких отображений составляет групповую часть полугруппы P_A. Эта группа получила название группы автоматных подстановок AS_n, $n = |A|$.

Группа AS_n оказалась исключительно интересным объектом, изучение которого уже позволило решить ряд трудных задач алгебры. Это финитно аппроксимируемая группа. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть последовательность гомоморфных образов AS_n — группы $\mathrm{AS}_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$. Группа AS_n^k состоит из ограничений на слова длины k отображений из AS_n и является сплетением k экземпляров симметрической группы S_n [9]:

$$\mathrm{AS}_n^k = \underbrace{\mathrm{S}_n \wr \mathrm{S}_n \wr \ldots \wr \mathrm{S}_n}_{k \text{ раз}}.$$

Поскольку элементы AS_n реализуются конечными автоматами, каждый из этих элементов несёт в себе след периодичности, индуцируемой соответствующим автоматом. Достаточно рассмотреть для каждого натурального k число $N(k)$, равное числу таких слов α длины k, что в состоянии $q(\alpha)$, в которое автомат переходит из начального состояния под действием слова α, реализуется нечётная подстановка на алфавите A. Пусть $p(k) = N(k) \bmod 2$, $p(k) \in \{0, 1\}$. Тогда последовательность $p(k)$, $k = 0, 1, \dots$, периодическая с некоторым предпериодом. Так возникает гомоморфизм AS_n на группу, элементами которой являются периодические (с предпериодом) последовательности из 0 и 1, с операцией поразрядного сложения по модулю 2 [2]. Отметим, что доказательство существования неприводимой системы образующих (базиса) в группе AS_n в статье [2] содержит пробел, и вопрос о существовании базиса в AS_n остаётся открытым.

Интерес к изучению AS_n резко возрос после того, как С. В. Алёшин обнаружил связь этой группы с известной проблемой Бернсайда [4].

Проблема Бернсайда для периодических групп о том, всякая ли периодическая группа локально конечна, как оказалось, может быть решена средствами теории автоматов. В [4] для каждого простого числа p была построена бесконечная периодическая подгруппа B_p группы AS_p с двумя образующими, которая, очевидно, является и финитно аппроксимируемой.

Группа B_2 — это 2-группа, каждый элемент которой имеет порядок, равный некоторой степени 2. Порядки элементов B_2 не ограничены в совокупности.

На рис. 1 представлены диаграммы инициальных автоматов, отображения которых порождают группу B_2. Как элементы B_2 они имеют порядок 2 (автомат с семью состояниями) и 4, что проверяется непосредственно.

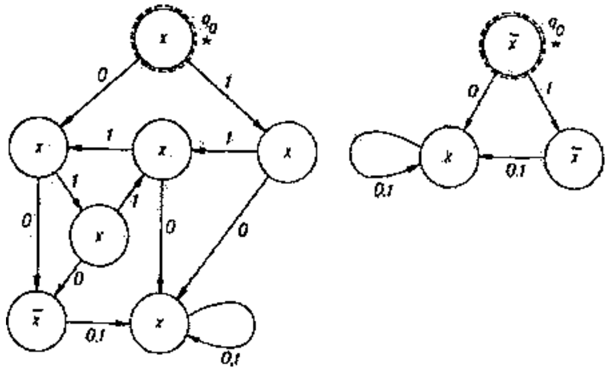

Рис. 1

Автоматные отображения допускают различные описания, в частности на языке автоморфизмов деревьев или как функций, отображающих отрезок $[0,1]$ в себя. Соответствующие связи подробно описаны в [10].

Конструктивность и финитность описания элементов группы AS_n с помощью автоматов дают возможность строить и изучать её подгруппы с разными свойствами. В частности, с каждым (неинициальным) автоматом

$$\mathscr{A} = (A, Q, A, \varphi, \psi)$$

можно связать набор инициальных автоматов

$$I = \{\mathscr{A}_i = (A, Q, A, \varphi, \psi, q_i),\ q_i \in Q\}.$$

Подгруппу AS_n, порождённую системой I, естественно назвать группой, порождённой автоматом $\mathscr{A}$, или коротко $\mathscr{A}$-группой. Обратно, любой конечный набор инициальных автоматов

$$I = \{\mathscr{A}_i = (A, Q_i, A, \mathscr{A}_i, \psi_i, q_i)\},$$

реализующих элементы AS_n, можно объединить в один автомат, взяв прямую сумму автоматов

$$\mathscr{A} = \sum_i \mathscr{A}_i, \quad \mathscr{A}_i = (A, Q, A, \varphi, \psi),$$

в которой $Q = \bigcup\limits_i Q_i$ и если $q \in Q_i$, то $\varphi(q,a) = \varphi_i(q,a)$, $\psi(q,a) = \psi_i(q,a)$. Таким образом, любая конечно порождённая подгруппа AS_n оказывается подгруппой некоторой $\mathscr{A}$-группы.

Уже группы, порождаемые автоматами с двумя и тремя состояниями, обладают рядом интересных свойств [17]. Так, например, среди групп, порождаемых автоматами с двумя состояниями, имеется группа Клейна, бесконечная циклическая группа, группа диэдра бесконечного порядка.

Группы, построенные на основе конструкции из [4], дали ответ на некоторые важные вопросы алгебры. Так, Р. И. Григорчук построил конечно порождённую подгруппу AS_n промежуточного роста, что позволило решить проблему Милнора [8].

А. В. Рожков изучил отображения, реализуемые обобщёнными автоматами. Рассмотрим «автомат», на вход которого в момент t подаются буквы алфавита A_t, $\varphi = 1, 2, \ldots$, а его функциями переходов и выходов являются последовательности

$$\varphi = \{\varphi_t,\ t = 1, 2, \ldots\}, \quad \psi = \{\psi_t,\ t = 1, 2, \ldots\},$$
$$\varphi_t \colon Q \times A_t \to Q, \quad \psi_t \colon Q \times A_t \to A_t.$$

Взаимно-однозначные отображения, реализуемые такими «автоматами», образуют (для фиксированной последовательности $\{A_t,\ t = 1, \ldots\}$) группу, которую можно рассматривать как группу автоморфизмов (бесконечного) дерева. Подход А. В. Рожкова дал возможность изучения бесконечных групп AT_w, построенных на основе конструкции С. В. Алёшина [15].

Если все алфавиты A_t, $t = 1, 2, \ldots$, конечны и совпадают, мы получаем группу AS_n для некоторого n.

Интерес представляют порождающие системы групп AS_n. В [12] показано, что группа AS_n порождается своими элементами бесконечного порядка. Можно показать, что каждый автомат из AS_n представим произведением автоматов, у которых лишь в одном состоянии реализуется нетривиальная подстановка на множестве букв входного алфавита. Однако неизвестно, какими могут быть порядки таких элементов AS_2, кроме 2, 4 и ∞ [12]. Открытым является вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы порядка элемента в AS_n: можно ли по заданной диаграмме автомата определить порядок элемента AS_n, который реализуется этим автоматом.

Конечные группы также изучаются с помощью теоретико-автоматных построений. Напомним, что внутренняя группа суперпозиции двух (групповых) автоматов $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ есть подгруппа сплетения внутренней группы автомата $\mathscr{A}_1$ и внутренней группы автомата $\mathscr{A}_2$. При этом она является расширением группы первого автомата $\mathscr{A}_1$. Какое именно расширение получается, зависит, в частности, от функции выходов автомата $\mathscr{A}_1$, выход которого соединяется с входом автомата $\mathscr{A}_2$. Варьируя выходные функции, можно «управлять» построением расширения, что даёт сильное средство исследования получающихся групп.

Один из «вариантов» проблемы Бернсайда — так называемая ослабленная проблема Бернсайда — ставит вопрос о существовании максимальной конечной группы $\mathrm{B}_0(d,m)$ с d образующими многообразия $x^m = 1$, при этом, как известно, вопрос сводится к изучению групп $\mathrm{B}_0(d,p^n)$ для простых p.

В. И. Малыгин рассмотрел расширения групп автоматов, получаемые присоединением «стандартного» автомата с внутренней группой $\mathbb{Z}_p$ [14]. Пусть $G_{\mathscr{A}}$ — внутренняя группа автомата $\mathscr{A} = (A, Q, B, \varphi_1\psi_1)$ с n состояниями, при этом $G_{\mathscr{A}}$ — группа из многообразия, определённого тождеством $V(z_1,\dots,z_r) = 1$. К выходу $\mathscr{A}$ присоединяется вход автомата с абелевой внутренней группой. Для произвольного набора входных слов $a_1,\dots,\alpha_r$ имеем, что $V(a_1,\dots,a_r) = 1$ в группе $G_{\mathscr{A}}$. Если $\psi_1\big(q, V(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\big) = 1$ в группе $\mathbb{Z}_p$ для любого состояния q автомата $\mathscr{A}$ и любого набора $a_1,\dots,a_r$, то внутренняя группа суперпозиции $\mathscr{A}$ и $\mathbb{Z}_p$ также принадлежит многообразию $V(z_1,\dots,z_r) = 1$. В аддитивной записи имеем $\psi_1\big(q, V(a_1,\dots,a_r)\big) = 0$. Если представить действие слова $\psi_1\big(q, V(\mathscr{A}_1,\dots,\mathscr{A}_r)\big)$ как сумму действий букв $\psi_1(q,a)$, $q \in Q$, $a \in A$, то выражение $\psi_1\big(q, V(a_1,\dots,a_r)\big) = 0$ можно рассматривать как бесконечную (по всем $a_1,\dots,a_r$) систему линейных уравнений от неизвестных $\psi_1(q,a)$, $q \in Q$, $a \in A$.

В. И. Малыгину удалось преобразовать бесконечную систему в конечную, при этом возникло линейное пространство l векторов $(\psi_1(q,a),\ q \in Q,\ a \in A)$, таких что расширение группы $G_{\mathscr{A}}$ снова принадлежит многообразию $V(z_1,\dots,z_r) = 1$. Изучая линейное пространство L для многообразия $z^{p^m} = 1$ (присоединяемый автомат с циклической группой $\mathbb{Z}_p$), он получил оценки для порядка группы $\mathrm{B}_0(d,p^m)$: если

$$b(d,p^m) = \log_p |\,\mathrm{B}_0(d,p^m)|,$$

то

$$b(d,p^m) \geqslant (d-1)p^{b(d,p^{m-1})} + b(d,p^{m-1}) + 1.$$

Пространство Малыгина может стать инструментом и для изучения других многообразий.

Классический подход к построению групп состоит в том, что из простых групп как из «неделимых атомов» собираются группы с разными свойствами. Автоматные конструкции расширили набор «атомов», поскольку при построении автомата с внутренней группой G в качестве компонентов могут использоваться и автоматы с внутренними полугруппами. При этом существенно используется операция обратной связи, когда выход автомата соединяется с одним из входных каналов.

Так, например, из циклической группы $\mathbb{Z}_n$ может быть получена симметрическая группа S_n только с помощью операции обратной связи [13]. При рассмотрении так называемых линейных автоматов возникает алгебраическая система $PR(\xi)$ с тремя бинарными операциями:

$$PR(\xi) = \left\{ \mu(\xi) = \frac{U(\xi)}{V(\xi)} \mid U(\xi), SV(\xi) \in E_2[\xi],\ V(\xi) \notin \xi \cdot E_2[\xi] \right\},$$

где $E_2[\xi]$ — кольцо многочленов над полем $E_2 = \{0, 1\}$, операции сложения и умножения — из поля частных

$$R(\xi) = \left\{ \mu(\xi) = \frac{U(\xi)}{V(\xi} \mid U(\xi), V(\xi) \in E_2[\xi] \right\},$$

а третья операция $Q(\mu_1, \mu_2)$ частичная, она применима к паре (μ_1, μ_2), если $\mu_2 = \frac{U_2(\xi)}{V_2(\xi)}$, где $U_2(\xi) \in \xi E_2(\xi)$, при этом $Q(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{1+\mu_2}$.

Линейные автоматы над полем E_2 — это автоматы, которые строятся из сумматора $S(x_1 x_2) = x_l + x_2 \pmod 2$ и задержки с начальным состоянием 1. Известно [11], что проблема полноты конечных систем автоматных функций в классе всех автоматных функций алгоритмически неразрешима. Для класса функций, вычисляемых линейными автоматами, проблема полноты конечных систем линейных автоматов оказалась алгоритмически разрешимой [16]. А. А. Часовских развил для алгебраической системы $PR(\xi)$ технику, сходную с техникой расширений полей, заметив, что произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно поставить в соответствие набор $\mu_1(\xi), \ldots, \mu_n(\xi)$, $\mu_0(\xi)$ из $PR(\xi)$ так, что операции суперпозиции и обратной связи, применённые к функциям, сводятся к операциям над соответствующими наборами, при этом элементы получаемых наборов строятся из элементов исходных наборов с помощью трёх указанных операций в $PR(\xi)$.

Таким образом, для решения «внутренних» задач теории автоматов с успехом используются алгебраические построения.

Упомянутая выше теорема Крона—Роудза алгебраическими средствами решила проблему выразимости автоматов в базисе, содержащем специальные автоматы простых групп. Автоматные функции, реализуемые такими автоматами, имеют тем большее число переменных, чем выше порядок группы.

Если кодировать буквы входных алфавитов наборами из 0 и 1 подходящей длины, то мы получим автоматные функции многих переменных. С ростом порядков групп мощности входных алфавитов специальных автоматов групп растут, и с этой точки зрения теорема Крона—Роудза оперирует с автоматными функциями, у которых число переменных не является ограниченным в совокупности. В то же время одна из важных проблем теории дискретных функций — определение условий, при которых удаётся рассматривать порождающие системы из функций с ограниченным числом переменных.

Этот недостаток теоремы удаётся устранить [5], показав, что специальный автомат простой группы P можно заменить произвольным автоматом с внутренней группой, у которой P является гомоморфным образом подгруппы. В результате, например, известный результат Д. Н. Бабина [6] о полноте относительно суперпозиции множества автоматных функций двух переменных получил новое доказательство, которое опирается на два факта из алгебры:

1) для любого n симметрическая группа S_n имеет два образующих (и потому реализуется автоматом с одним бинарным входом);
2) если автоматная функция реализуется автоматом с внутренней группой, то имеется входное слово, равное единице в этой группе, которое попарно отличает все состояния автомата.

Итак, теория автоматов активно использует классические объекты из алгебры, а также вводит новые алгебраические системы и «неклассические» конструкции.

Литература

[1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп // Под ред. М. А. Арбиба. — М.: Статистика, 1975.

[2] Алёшин С. В. О базисах в группах автоматных подстановок // Дискретный анализ. — 1970. — Вып. 17. — С. 111—136.

[3] Алёшин С. В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов // Проблемы кибернетики. — 1970. — Вып. 22. — С. 33—58.

[4] Алёшин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 3. — С. 56—78.

[5] Алёшин С. В. Об одном следствии теоремы Крона—Роудза // Дискрет. мат. — 1999. — Т. 11, вып. 4. — С. 31—37.

[6] Бабин Д. Н. О полноте двухместных о. д.-функций относительно суперпозиции // Дискрет. мат. — 1989. — Т. 1, № 4. — С. 86—91.

[7] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, вып. 5.

[8] Григорчук Р. И. К проблеме Милнора о групповом росте // ДАН СССР. — 1983. — Т. 271, № 1. — С. 101—109.

[9] Заровный В. П. Автоматные подстановки и сплетения групп // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 3. — С. 128—144.

[10] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.

[11] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М., 1985.

[12] Макаров В. В. О группах автоматных перестановок // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 171—186.

[13] Малыгин В. И. Трансформации группы автомата под действием операции обратной связи // VI Всесоюзн. конф. по теорет. пробл. кибернетики. — 1983.

[14] Малыгин В. И. Алгебраические инварианты композиций автоматов: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — 1988.

[15] Рожков А. В. К теории групп алёшинского типа // Мат. заметки. — 1986. — Т. 40, № 5. — С. 122—131.

[16] Часовских А. А. Об алгоритмической разрешимости проблемы полноты для линейных автоматов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — Вып. 2. — С. 47—61.

[17] Żuk A. Groupes engendrés par les automates // Astérisque. — 2008. — Vol. 317. — P. 141—174.