О линейных представлениях квазигрупп

А. А. ГВАРАМИЯ
Абхазский государственный университет

Б. И. ПЛОТКИН
Иерусалимский университет

УДК 512.548.7

Ключевые слова: квазигруппа, гомотопия, категория, автомат.

Аннотация

Для гомотопий квазигрупп в общем случае не имеет места аналог теоремы о гомоморфизмах. В статье рассматриваются два подхода, позволяющих получить некоторый аналог этой теоремы: введение строгих гомотопий и переход от квазигрупп к трёхсортным квазигруппам.

Abstract

A. A. Gvaramia, B. I. Plotkin, On linear representations of quasigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 3, pp. 113—118.

For homotopies of quasigroups, an analog of the fundamental theorem on homomorphisms does not hold in general. In this paper, we consider two approaches that allow one to obtain some analog of this theorem: the introduction of strict homotopies and the move from quasigroups to three-sorted quasigroups.

1. Постановка задачи

Гомотопия двух квазигрупп

$$\mu = (\alpha, \beta, \gamma)\colon Q(\cdot, /, \backslash) \to Q'(\circ, //, \backslash\backslash) \text{ —}$$

это упорядоченная тройка отображений из Q в Q', связанных условием $(xy)^\gamma = x^\alpha \circ y^\beta$ для любых $x, y \in Q$. Одновременно имеют место соотношения для делений $(x / y)^\alpha = x^\gamma \mathbin{//} y^\beta$, $(x \backslash y)^\beta = x^\alpha \mathbin{\backslash\backslash} y^\gamma$. При $\alpha = \beta = \gamma$ имеем гомоморфизм. Если α, β, γ инъективны (сюръективны, биективны), то μ называется монотопией (эпитопией, изотопией).

Квазигруппы естественно рассматривать в рамках категории K, в которой морфизмами служат гомотопии. Изотопии в ней играют роль изоморфизмов.

Все сведения, необходимые для чтения данной статьи, можно найти в [1, 2].

Для Q при гомотопии μ мы имеем три образа, т. е. образ квазигруппы не является квазигруппой. Имеем также три ядра $\rho_1 = \operatorname{Ker}\alpha$, $\rho_2 = \operatorname{Ker}\beta$, $\rho_3 = \operatorname{Ker}\gamma$, и следовательно, фактор-квазигруппа не обязательно является квазигруппой.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 3, с. 113—118.
© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Это означает, что теорема о гомотопиях, подобная теореме о гомоморфизмах, в общем случае не имеет места. Выход из этой ситуации будем искать в двух направлениях. Первое основано на введении особых — строгих — гомотопий, для которых имеется некоторый аналог теоремы о гомоморфизмах. Второе состоит в переходе от квазигрупп к трёхсортным квазигруппам $\mathfrak{A} = (A, B, C, *)$, где операция $*\colon A \times B \to C$ такова, что в равенстве $a * b = c$ ($a \in A$, $b \in B$, $c \in C$) любые два элемента однозначно определяют третий.

$\mathfrak{A}$ называем обратимым $*$-автоматом (далее автоматом). Для каждой квазигруппы Q имеем регулярный автомат $\operatorname{at} Q = (Q, Q, Q)$ с теми же операциями, что и в Q. Для каждого автомата $\mathfrak{A}$ всегда имеется такая квазигруппа Q, что $\mathfrak{A} \approx \operatorname{at} Q$. Автоматом в квазигруппе Q назовём любой подавтомат в $\operatorname{at} Q$. Гомотопии квазигрупп $\mu = (\alpha, \beta, \gamma)\colon Q \to Q'$ отвечает гомоморфизм регулярных автоматов $\operatorname{at} \mu = (\alpha, \beta, \gamma)\colon \operatorname{at} Q \to \operatorname{at} Q'$. Тем самым категория K погружается в категорию автоматов K' и гомотопия (изотопия) квазигрупп реализуется как гомоморфизм (изоморфизм) автоматов. Образ гомотопии $\mu\colon Q \to Q'$ есть автомат $(Q^\alpha, Q^\beta, Q^\gamma)$ — автомат в квазигруппе Q.

2. Строгие гомотопии

Гомотопию $\mu = (\alpha, \beta, \gamma)\colon Q \to Q'$ назовём строгой, если наряду с условием $(xy)^\gamma = x^\alpha \circ y^\beta$ выполняются также условия $(xy)^\alpha = x^\gamma \circ y^\beta$ и $(xy)^\beta = x^\alpha \circ y^\gamma$.

Гомоморфизмы — это строгие гомотопии. Любая гомотопия тотально-симметрических квазигрупп, т. е. квазигрупп, в которых все операции совпадают с основной операцией, тоже строгая.

Легко убедиться, что если в лупе (квазигруппе с единицей 1) Q выполняются тождества $x = \big(x(1 \,/\, y)\big)y$ и $x = y\big((y \setminus 1)x\big)$, то любая её гомотопия в лупу Q' является строгой.

Особый случай — это лупы Муфанг (с тождеством $(xy \cdot z)y = x(y \cdot zy)$) и группы. Здесь условия строгости гомотопий выражаются с учётом образов единицы 1:

$$\forall x \in Q\colon x^\gamma = (1x)^\gamma = 1^\alpha \circ x^\beta = (x1)^\gamma = x^\alpha \circ 1^\beta,$$

т. е. $1^\alpha \circ x^\beta = x^\alpha \circ 1^\beta$, и при условии строгости имеем

$$(xy)^\gamma = x^\alpha \circ y^\beta = 1^\alpha \circ (xy)^\beta = 1^\alpha \circ x^\alpha \circ y^\gamma = (xy)^\alpha \circ 1^\beta = x^\gamma \circ y^\beta \circ 1^\beta.$$

Получаем тождество

$$1^\alpha \circ x^\alpha \circ y^\gamma = x^\gamma \circ y^\beta \circ 1^\beta.$$

3. Ядро гомотопии

Предложение. *Пусть $\mu = (\alpha, \beta, \gamma)\colon Q \to Q'$ — строгая гомотопия квазигрупп. Тогда $\rho = \operatorname{Ker} \mu = \rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3$ — конгруэнция квазигруппы Q.*

Доказательство. Нужно проверить, что всегда $x_1\ \rho\ y_1$ и $x_2\ \rho\ y_2$ влекут $(x_1x_2)\ \rho\ (y_1y_2)$.

Пусть $x_1^\alpha = y_1^\alpha$, $x_1^\beta = y_1^\beta$, $x_1^\gamma = y_1^\gamma$ и $x_2^\alpha = y_2^\alpha$, $x_2^\beta = y_2^\beta$, $x_2^\gamma = y_2^\gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}(x_1x_2)^\gamma &= x_1^\alpha \circ x_2^\beta = y_1^\alpha \circ y_2^\beta = (y_1y_2)^\gamma,\\ (x_1x_2)^\alpha &= x_1^\gamma \circ x_2^\beta = y_1^\gamma \circ y_2^\beta = (y_1y_2)^\alpha,\\ (x_1x_2)^\beta &= x_1^\alpha \circ x_2^\gamma = y_1^\alpha \circ y_2^\gamma = (y_1y_2)^\beta. \end{aligned}\qquad\square$$

Предложение доказано и, следовательно, можно говорить о фактор-группе Q/ρ. Исходная гомотопия μ индуцирует гомотопию $\bar\mu = (\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma)\colon Q/\rho \to Q'$. Взяв естественный гомоморфизм $\nu\colon Q \to Q/\rho$, имеем $\alpha = \bar\alpha\nu$, $\beta = \bar\beta\nu$, $\gamma = \bar\gamma\nu$, а значит, $\mu = \bar\mu\nu$. Мы получили аналог теоремы о гомоморфизмах, но здесь $\bar\mu$ не обязательно инъекция. Инъекцией $\bar\mu$ является только при дополнительных условиях: чтобы говорить о точности вложения $Q/\rho \to Q'$, надо исходить из условия $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3$. Кстати, при этом условии ρ — конгруэнция и тогда, когда гомотопия μ не является строгой. Образы здесь могут быть разными, но, конечно, равномощными.

$\operatorname{Im}\bar\mu$ — автомат, а потому он может быть представлен как $\operatorname{at}(Q_0)$, где Q_0 — подквазигруппа в Q'. Можно говорить о точном представлении $\bar\mu$. Точность $\mu\colon Q \to Q'$ означает, что Q изотопна подквазигруппе в Q'.

Отметим, что ядро $\rho = \operatorname{Ker}\mu$ универсально в том смысле, что если τ — конгруэнция в Q, такая что μ индуцирует $\bar\mu\colon Q/\tau \to Q'$, то $\tau \subset \operatorname{Ker}\mu$.

4. Представления квазигрупп

Представлением квазигруппы Q на множестве A назовём произвольную гомотопию $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)\colon Q \to \mathrm{S}_A$, где S_A — группа подстановок множества A. Представление называется точным, если μ — монотопия. В [1] доказано, что точное представление существует только для квазигрупп, изотопных группам.

Если представление задано, то каждому $q \in Q$ отвечают три подстановки $q^{\mu_i} \in \mathrm{S}_A$, $i = 1, 2, 3$, и это означает, что мы имеем три действия, определяемых правилом $a \overset{i}{\circ} q = aq^{\mu_i}$, $i = 1, 2, 3$. При этом, очевидно, для любых $a \in A$, $q_1, q_2 \in Q$ выполняется соотношение

$$a \overset{3}{\circ} q_1q_2 = \bigl(a \overset{1}{\circ} q_1\bigr) \overset{2}{\circ} q_2. \tag{1}$$

С другой стороны, если заданы три операции $\overset{i}{\circ}\colon A \times Q \to A$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для любого $q \in Q$ отображения $q^{\mu_i}\colon A \to A$, действующие по правилу $aq^{\mu_i} = a \overset{i}{\circ} q$, $i = 1, 2, 3$, являются подстановками множества A,
2) для любых $a \in A$, $q_1, q_2 \in Q$ выполняется (1),

то этим определяется гомотопия $\mu\colon Q \to \mathrm{S}_A$, т. е. представление Q в A.

Действительно, имеем

$$a(q_1q_2)^{\mu_3} = a \overset{3}{\circ} q_1q_2 = \bigl(a \overset{1}{\circ} q_1\bigr) \overset{2}{\circ} q_2 = aq_1^{\mu_1} \circ q_2 = (aq_1^{\mu_1})q_2^{\mu_2} = a(q_1^{\mu_1}q_2^{\mu_2}).$$

Следовательно, подстановки $(q_1q_2)^{\mu_3}$ и $q_1^{\mu_1}q_2^{\mu_2}$ совпадают, а это и означает, что μ — гомотопия. Таким образом, представлением квазигруппы Q на множестве A можно назвать двусортную алгебру (A, Q) с тремя операциями, удовлетворяющими условиям 1) и 2).

Пусть теперь A — модуль над коммутативным кольцом с единицей, $\operatorname{Aut} A$ — группа автоморфизмов модуля A. Представление квазигруппы Q на A зададим строгой гомотопией

$$\mu = (\alpha, \beta, \gamma)\colon Q \to \operatorname{Aut} A.$$

Тогда имеем три действия Q в A: $a \bullet q = aq^{\alpha}$, $a \circ q = aq^{\beta}$, $a * q = aq^{\gamma}$ ($a \in A$, $q \in Q$). Потребовав, чтобы отображения $a \to a \bullet q$, $a \to a \circ q$, $a \to a * q$ были линейными, получаем

$$\begin{aligned} a \bullet q_1q_2 &= (a * q_1) \circ q_2, \\ a \circ q_1q_2 &= (a \bullet q_1) * q_2, \\ a * q_1q_2 &= (a \bullet q_1) \circ q_2. \end{aligned}$$

У строгой гомотопии μ есть ядро $\operatorname{Ker}\mu$, а потому для $Q/\operatorname{Ker}\mu$ имеется представление в A, которое в общем случае не обязательно точное, т. е. $\bar{\mu}\colon Q/\operatorname{Ker}\mu \to \operatorname{Aut} A$ не обязательно монотопия.

Чтобы говорить о точном представлении, нужно требовать выполнения равенств $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Ker}\gamma$, $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta = \operatorname{Im}\gamma$, и тогда в $\operatorname{Aut} A$ имеем подгруппу, изотопную $Q/\operatorname{Ker}\mu$.

Такой подход к представлениям актуален не только для квазигрупп, но и для луп и групп.

5. Категория линейных представлений квазигрупп

Линейные представления Q в A будем рассматривать как двусортные алгебры (A, Q) — это объекты категории. В этом случае имеем два типа морфизмов $(\nu, \mu)\colon (A, Q) \to (B, Q')$: когда $\mu\colon Q \to Q'$ — гомоморфизм и когда μ— строгая гомотопия. В обоих случаях $\nu\colon A \to B$ — линейное отображение.

В первом случае μ и ν связаны соотношениями

$$\begin{aligned} (a \circ q)^{\nu} &= a^{\nu} \circ q^{\mu}, \\ (a \bullet q)^{\nu} &= a^{\nu} \bullet q^{\mu}, \\ (a * q)^{\nu} &= a^{\nu} * q^{\mu}, \end{aligned}$$

а если $\mu = (\alpha, \beta, \gamma)\colon Q \to Q'$ — строгая гомотопия, то

$$(a \circ q)^\nu = a^\nu \circ q^\beta,$$
$$(a \bullet q)^\nu = a^\nu \bullet q^\alpha,$$
$$(a * q)^\nu = a^\nu * q^\gamma$$

$(a \in A,\ q \in Q)$.

Мы имеем здесь разные категории представлений квазигрупп. Можно говорить об изоморфизме и изотопии представлений и т. д. Например, легко показать, что если (A, G) и (B, G') — изотопные представления групп, то они изоморфны (аналог известной теоремы Алберта для групп [3]).

6. Представления обратимых $*$-автоматов

Введённые ниже понятия позволяют делать переход от неточных представлений квазигрупп к точным.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, B, C, *)$ — автомат и множества A, B, C действуют на некотором множестве M: $\overset{1}{\circ}\colon M \times A \to M$, $\overset{2}{\circ}\colon M \times B \to M$, $\overset{3}{\circ}\colon M \times C \to M$. Будем говорить, что задано представление автомата $\mathfrak{A}$ на M, если для любых $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $m \in M$ выполняется соотношение

$$m \overset{3}{\circ} (a * b) = \bigl(m \overset{1}{\circ} a\bigr) \overset{2}{\circ} b. \tag{2}$$

При этом, естественно, считаем, что элементы каждого из множеств A, B, C действуют как подстановки множества M. Представление автомата $\operatorname{at} Q$ — это то же самое, что представление квазигруппы Q.

Если $\mathfrak{A}$ есть автомат в группе S_M, то каждое из множеств A, B, C действует на M и, очевидно, выполняется соотношение (2). В частности, если задано представление $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)\colon Q \to \mathrm{S}_M$, то на M действует автомат $(Q^{\mu_1}, Q^{\mu_2}, Q^{\mu_3})$. На M действует и фактор-автомат $(Q/\rho_1, Q/\rho_2, Q/\rho_3)$. Соответствующие операции действия определяются следующим образом. Пусть $\bar{q}^i$ — образ элемента $q \in Q$ в Q/ρ_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда полагаем $m \overset{i}{\circ} \bar{q}^i = m \overset{i}{\circ} q$, где операция $\overset{i}{\circ}$ справа — это операция действия Q на M. Выполнение соотношения (2) легко проверяется.

Представление автомата $\mathfrak{A} = (Q/\rho_1, Q/\rho_2, Q/\rho_3)$ на M можно рассматривать как точное представление, отвечающее исходному представлению Q на M. Это обстоятельство и позволяет сделать переход к точным представлениям квазигрупп. Чтобы в этом убедиться, прежде всего отметим следующее. Пусть задано представление автомата $\mathfrak{A}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ на M и имеется гомоморфизм автоматов $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1$. Обозначим через $\overset{i}{\bullet}$, $i = 1, 2, 3$, операции действия $\mathfrak{A}_1$ на M и положим

$$m \overset{1}{\circ} a = m \overset{1}{\bullet} a^{\nu_1},\quad m \overset{2}{\circ} b = m \overset{2}{\bullet} b^{\nu_2},\quad m \overset{3}{\circ} c = m \overset{3}{\bullet} c^{\nu_3} \quad (m \in M,\ a \in A,\ c \in C).$$

Тогда

$$m \overset{3}{\circ} (a * b) = m \overset{3}{\bullet} (a * b)^{\nu_3} = m \overset{3}{\bullet} a^{\nu_1} b^{\nu_2} = (m \overset{1}{\bullet} a^{\nu_1}) \overset{2}{\bullet} b^{\nu_2} = (m \overset{1}{\circ} a) \overset{2}{\circ} b,$$

т. е. выполняется (2), и мы имеем представление $\mathfrak{A}$ на M.

Пусть теперь задано (неточное) представление квазигруппы Q на множестве M. По нему получаем точное представление автомата $\mathfrak{A}$ на M. Рассмотрим квазигруппу $\bar{Q}$, для которой имеется изоморфизм $\mathfrak{A} \approx \mathrm{at}\,\bar{Q}$. С помощью приведённых выше построений получаем представление $\mathrm{at}\,\bar{Q}$ на M, стало быть, и представление $\bar{Q}$ на M, которое является точным. Таким образом, от представления (M, Q) можно перейти к точному представлению $(M, \bar{Q})$. Здесь квазигруппа $\bar{Q}$ определяется по квазигруппе Q с точностью до изотопии. В частности, в качестве $\bar{Q}$ можно взять и группу. Такая группа найдётся, поскольку каждая квазигруппа, допускающая точное представление, т. е. монотопию в группу, изотопна группе. Однако не следует думать, что при этом мы приходим к представлению этой группы, так как в данном случае представление задаётся гомотопией, а не гомоморфизмом.

Литература

[1] Гварамия А. А. Представления квазигрупп и квазигрупповые автоматы // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 3. — С. 775—800.

[2] Плоткин Б. И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. — М.: Наука, 1991.

[3] Albert A. A. Quasigroups. I // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 54. — P. 507—519.