Общая версия стандартного базиса в ассоциативных алгебрах и их производных конструкциях

В. Н. ЛАТЫШЕВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 512.554

Ключевые слова: стандартный базис, алгебра со строгой фильтрацией, общая версия стандартного базиса, производные конструкции алгебр.

Аннотация

Работа преследует в определённом смысле «методические» цели. В ней приводится общая версия стандартного базиса идеала, в основе которой лежит понятие алгебры со строгой фильтрацией, введённое автором ранее. Кроме того, рассматриваются производные конструкции, связанные с этим классом алгебр: прямые суммы, тензорные произведения, свободные модули.

Abstract

V. N. Latyshev, A general version of standard bases in associative algebras and their universal constructions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 3, pp. 183—203.

This work is devoted, in some sense, to “methodical” questions. A general version of standard basis in ideal of algebra is presented which uses a notion of so called algebra with a strong filtration introduced recently by the author. Moreover, universal constructions related this class of algebras such as direct sums, tensor products, and free modules are considered.

В работах Ж. Бергмана [5], Е. С. Голода [9] и автора [1] содержатся основные идеи по общему определению класса алгебр, в идеалах которых можно выделить особую систему порождающих, называемую стандартным базисом (базисом Грёбнера или базисом Грёбнера—Ширшова в другой терминологии). В эффективно заданных алгебрах эта система порождающих идеала во многих случаях позволяет построить алгоритм, решающий проблему вхождения в идеал и, как следствие, другие массовые проблемы, связанные со свойствами алгебры и её элементов. Предпосылки для появления понятия стандартного базиса содержатся в многочисленных работах прошлого столетия, принадлежащих исследователям различных направлений математики, в первую очередь, конечно, алгебраистам и специалистам по дифференциальным уравнениям. Точная формулировка алгоритмического аспекта стандартных базисов полиномиальных

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 3, с. 183—203.

идеалов считается принадлежащей Б. Бухбергеру [7]. Однако за два десятилетия до него все необходимые формулировки на языке алгебр Ли были даны А. И. Ширшовым [4].

Исследования показали, что в качестве интересующего нас обобщающего класса алгебр, в идеалах которых можно определить понятие стандартного базиса, естественно взять алгебры, снабжённые фильтрацией с одномерными факторами и фильтрующей упорядоченной полугруппой, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек элементов, или, коротко, условию минимальности. Этому классу принадлежат все известные до настоящего времени алгебры, в идеалах которых можно определить стандартный базис с необходимыми свойствами. Прежде всего отметим, что среди этих алгебр находятся полугрупповые алгебры упорядоченных полугрупп и, следовательно, алгебры полиномов и свободные ассоциативные алгебры (алгебры «некоммутативных» полиномов). В этом же классе лежат универсальные обёртывающие алгебр Ли.

Настоящая работа в определённом смысле преследует «методические» цели. В ней приводится общая версия стандартного базиса идеала в алгебре. Из приведённых рассмотрений вытекает, что необходимые теоретические основы понятия стандартного базиса состоят в распространении идеи Гаусса о построении ступенчатого базиса в пространстве линейных форм от конечного числа переменных на бесконечномерный случай. Кроме того, в работе изучаются производные конструкции алгебр рассматриваемого класса, такие как прямые суммы, тензорные произведения, свободные модули и бимодули. Частично эти результаты проанонсированы в [2]. Читатель заметит, что нами оставлена без внимания такая важная «производная структура», как свободное произведение алгебр из рассматриваемого класса. Дело в том, что известные порядки на свободных произведениях упорядоченных полугрупп, наследующие упорядочения свободных множителей, к сожалению, не наследуют условие минимальности. Хороший обзор и оригинальные доказательства на эту тему можно найти в [6].

Следует отметить, что хотя мы занимаемся исключительно ассоциативными алгебрами, предложенная схема стандартного базиса распространяется и на случай неассоциативных алгебр, например алгебр Ли, и случай, когда используется лишь ограниченный запас редукций [3, 6, 10, 11]. Ограничение запаса редукций возникает из потребностей приложений в области дифференциальных уравнений. Различные типы ограничений можно найти в [8] (см. также раздел 4).

1. Упорядоченные полугруппы и их производные структуры

Полугруппа G называется *упорядоченной*, если на множестве её элементов задан порядок, согласованный с операцией в том смысле, что выполняются следующие импликации:

$$a > b \implies ac > bc \text{ и } ca > cb \text{ для всех } a, b, c \in G.$$

Эти неравенства просто означают выполнение в полугрупповой алгебре kG полугруппы G над полем k хорошо известного из алгебры полиномов правила: старший член произведения равен произведению старших членов сомножителей. Действительно, в упорядоченной полугруппе справедлива импликация

$$a > b, \quad c > d \implies ac > bc, \quad ac > ad \quad \text{и} \quad ac > bc > bd,$$

откуда $ac > bd$.

Если полугруппа G обладает нулевым элементом 0, то в приведённом определении упорядоченной полугруппы предполагается, что $ac \neq 0$ и $ca \neq 0$. Нулевой элемент считается наименьшим в смысле порядка, определённого на G. Как правило, рассматриваемые нами полугруппы обладают единицей (нейтральным элементом), обозначаемой 1. В современной терминологии полугруппа с единицей называется *моноидом*. Мы всегда будем предполагать, что элементы упорядоченной полугруппы «положительные» в том смысле, что выполняются неравенства $ab > b$ и $ba > b$ для всех $a, b \in G$. В моноиде подразумевается, что $a \neq 1$. Более того, в этом случае положительность элементов равносильна выполнению неравенств $a > 1$, $a \neq 1$, $a \in G$. В полугруппе с нулём, конечно, подразумевается, что $ab \neq 0$ и $ba \neq 0$ в рассматриваемых неравенствах. Если нейтральный или нулевой элементы не содержатся в упорядоченной полугруппе с положительными элементами, то их всегда можно присоединить «внешним» образом. При этом единица окажется «предпоследним», а нуль — «последним» (наименьшим) элементом в полугруппе.

Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что порядок на элементах полугруппы удовлетворяет условию минимальности. Оно означает, что все убывающие цепочки элементов полугруппы обрываются на конечном шаге, а это, в свою очередь, равносильно наличию наименьшего элемента в любом подмножестве элементов полугруппы.

1.1. Конгруэнции на упорядоченных полугруппах с условием минимальности

Предположим, что на упорядоченной полугруппе G с условием минимальности задана конгруэнция $\sim$ и $H = G/{\sim}$ — фактор-группа по этой конгруэнции. Во всяком классе эквивалентности $[a] \in H$, определённом элементом $a \in G$, содержится минимальный элемент в смысле порядка $<$ на G, называемый *канонической формой элемента* a и обозначаемый $\operatorname{can} a$. Элемент полугруппы G называется *нормальным*, если он является канонической формой элементов своего класса эквивалентности; в противном случае он называется *редуцируемым*. Совокупность $\mathrm{N}(G) \subseteq G$ всех нормальных элементов полугруппы образует полугруппу относительно операции $a \circ b = \operatorname{can}(ab)$, $a, b \in \mathrm{N}(G)$. Эту полугруппу иногда называют «полугруппой нормальных элементов». Ясно, что она изоморфна фактор-полугруппе H, т. е. $(\mathrm{N}(G), \circ) \cong H$. Таким образом, если полугруппа G задана эффективно и существует алгоритм вычисления канонических форм элементов G относительно конгруэнции $\sim$, то фактор-полугруппа H, рассматриваемая как полугруппа нормальных элементов, также задана эффективно. При этом отношение эквивалентности $\sim$ алгоритмически разрешимо, поскольку эквивалентность двух элементов из G означает совпадение их канонических форм. Вопрос эффективного задания конгруэнций на полугруппах является важнейшим в алгебраической алгоритмике.

Рассмотрим вопрос о том, каким образом осуществляется эффективное задание конгруэнции на упорядоченной полугруппе G с условием минимальности. Сначала задаётся система *базовых соотношений*

$$\{\mathfrak{A}\colon a_i \sim b_i,\ a_i, b_i \in G \mid i \in \mathbb{N}\},$$

конечная или бесконечная. Элементы ua_iv и ub_iv называются непосредственно соотносимыми. Далее полагается, что $a \sim b$, $a, b \in G$, в том и только в том случае, когда элементы a и b могут быть связаны цепочкой непосредственных соотносимостей:

$$a \sim z_1 \sim z_2 \sim \ldots \sim z_m \sim b,$$

где $a \sim z_1$, $z_i \sim z_{i+1}$, $z_m \sim b$ — непосредственные соотносимости. Коротко системы базовых соотношений $\mathfrak{A}$ называются *базисом конгруэнции* $\sim$. Задание конгруэнции с помощью её базиса не является, вообще говоря, эффективным даже в случае, если этот базис конечен. Необходимо более точно использовать свойство порядка, определённого на G.

В записи $a \sim b$, $a \neq b$, $a, b \in G$, мы всегда будем предполагать, что $a > b$, и называть элемент a *старшей частью* этой соотносимости. Совокупность всех старших частей соотносимостей относительно конгруэнции $\sim$ образует идеал $I \lhd G$ в полугруппе G, называемый *идеалом старших частей*. Базис $\mathfrak{A}$ конгруэнции $\sim$ называется *стандартным*, если идеал старших частей I порождается старшими частями a_i соотносимостей из $\mathfrak{A}$, обозначение $I = (a_1, \ldots, a_m, \ldots)$. С каждой тройкой элементов $a_i \in \mathfrak{A}$, $u, v \in G$ связывается отображение $r_{u,i,v}\colon G \to G$ полугруппы G в себя, действующее согласно правилу $r_{u,i,v}(ua_iv) = ub_iv$, $r_{u,i,v}(\xi) = \xi$, если $\xi \neq ua_iv$. При этом допускается, что один из элементов u и v или даже оба могут быть «пустыми». Отображение $r_{u,i,v}$ называется *редукцией*, оно «сдвигает» лишь один элемент из G. Нормальные элементы характеризуются тем, что они неподвижны относительно всех редукций. Всякий другой элемент в силу условия минимальности конечной системой редукций приводится к нормальному элементу или, коротко, *редуцируется* к своей канонической форме. Именно поэтому элементы, не являющиеся нормальными, называются редуцируемыми.

Представим себе, что полугруппа G задана эффективно (операция выполняется алгоритмом) и имеется алгоритм $\mathfrak{M}$, распознающий принадлежность элемента группы G любому главному идеалу в G. Более точно, по предъявлении пары элементов $a, b \in G$ алгоритм $\mathfrak{M}$ либо выдаёт ответ «нет», что означает $b \notin I = (a)$, либо вырабатывает пару элементов $u, v \in G$, таких что $b = uav \in I$ (здесь либо один из элементов u и v, либо оба могут быть пустыми). В этом случае конгруэнция $\sim$ на полугруппе G, задаваемая конечным стандартным базисом, разрешима в том смысле, что соотносимость $a \sim b$ алгоритмически распознаваема. Действительно, $a \sim b$ в том и только в том случае, когда элементы a и b редуцируются к одной и той же канонической форме.

Эффективную полугруппу G, для которой существует алгоритм $\mathfrak{M}$, распознающий вхождение элемента в главный идеал, коротко будем называть *идеально эффективной*. В числу таких полугрупп принадлежит полугруппы, участвующие в реальных вычислениях: свободные полугруппы, свободные коммутативные полугруппы и др. Фактор-полугруппа $H = G/{\sim}$ идеально эффективной полугруппы G по конгруэнции $\sim$, заданной конечным стандартным базисом, также оказывается эффективно заданной, поскольку она обладает представлением в виде полугруппы нормальных элементов.

1.2. Прямые произведения упорядоченных полугрупп

Пусть G и F — упорядоченные полугруппы с условием минимальности. На декартовом произведении множеств их элементов $G \times F$ определим операцию «покомпонентного» умножения

$$(g_1 \times f_1)(g_2 \times f_2) = g_1 g_2 \times f_1 f_2, \quad g_i \in G, \quad f_j \in F.$$

Тем самым $G \times F$ превращается в полугруппу, называемую *прямым произведением* полугрупп G и F. Лексикографическое сравнение пар $g \times f$, $g \in G$, $f \in F$, согласовано с умножением в $G \times F$ и удовлетворяет условию минимальности.

Если G и F — моноиды, то $G \times F$ также моноид с нейтральным элементом 1×1. При этом имеют место канонические инъекции

$$G \hookrightarrow G \times F, \quad g \mapsto g \times 1, \qquad F \hookrightarrow G \times F, \quad f \mapsto 1 \times f.$$

1.3. Прямые объединения упорядоченных полугрупп

Прямое произведение $G \times F$ упорядоченных полугрупп G и F с нулевым элементом является упорядоченной полугруппой с нулевым элементом 0×0. Имеют место канонические инъекции

$$G \hookrightarrow G \times F, \quad g \mapsto g \times 0, \qquad F \hookrightarrow G \times F, \quad f \mapsto 0 \times f.$$

Подмножество элементов

$$G \mathbin{\bar{\cup}} F = \{g \times 0 \mid g \in G\} \cup \{0 \times f \mid f \in F\}$$

образует в $G \times F$ подполугруппу с нулём, которую мы назовём *прямым объединением* полугрупп G и F. Удобно производить мысленное отождествление $g \equiv g \times 0$, $f \equiv 0 \times f$, $0 \equiv 0 \times 0$, после чего окажется, что прямое объединение полугрупп $G \mathbin{\bar{\cup}} F$ состоит из объединения полугрупп G и F с «объединённым» нулём 0. При этом элементы из одной полугруппы умножаются по «своему» закону, а произведения элементов из разных полугрупп равны 0.

Заметим, что для полугрупповых алгебр над полем k имеют место изоморфизмы

$$k(G \times F) \cong kG \otimes kF, \quad k(G \mathbin{\bar{\cup}} F) \cong kG \oplus kF,$$

где $\otimes$ и $\oplus$ — знаки тензорного произведения и прямой суммы соответственно.

Прямое произведение и прямое объединение мы определили для двух полугрупп. Индукцией можно распространить эти определения на любое число полугрупп.

2. Алгебры со строгой фильтрацией

Укажем понятия, сопровождающие основное определение.

(i) Λ — упорядоченный моноид, возможно с нулевым элементом, удовлетворяющий условию минимальности.

(ii) A — алгебра над полем k с *выделенным базисом* $E = \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, векторы которого снабжены индексами из Λ и сравниваются между собой по этим индексам. Допускается, что не все элементы из Λ используются в качестве индексов. Например, не используется нулевой элемент 0.

Далее через $\bar{a}$, $a \in A$, обозначается *старший базисный вектор* в представлении элемента a в виде линейной комбинации элементов из E, а через $^\circ a$ — элемент, полученный из a делением на *старший коэффициент* (коэффициент при $\bar{a}$).

(iii) Выполняется условие «типа фильтрации»: произведение базисных векторов $e_\alpha e_\beta$ принадлежит линейной оболочке векторов $e_\gamma \in E$ при $\gamma \leqslant \alpha\beta$, если $\alpha\beta \neq 0$, и $e_\alpha e_\beta = 0$, если $\alpha\beta = 0$.

Произведение базисных векторов $e_\alpha e_\beta$ называется *существенным*, если $\overline{e_\alpha e_\beta} = e_{\alpha\beta}$. В приложениях определение существенности произведения базисных векторов может сопровождаться различными дополнительными ограничениями (см., например, [8]). Произведение двух элементов ab, $a, b \in A$, называется существенным, если произведение $\bar{a}\bar{b}$ их старших базисных векторов существенное. Произведение нескольких элементов алгебры A называется существенным, если каждое из его последовательных умножений существенно. В силу условия типа фильтрации (iii), если произведение ab, $a, b \in A$, существенное, то выполняется равенство $\overline{ab} = \overline{\bar{a}\bar{b}}$, обобщающее чрезвычайно полезное в алгоритмике правило из алгебры многочленов: старший член произведения равен произведению старших членов сомножителей.

Алгебру A, удовлетворяющую условиям (i)—(iii), мы называем *алгеброй со строгой фильтрацией*.

Простейшим примером алгебры со строгой фильтрацией является полугрупповая алгебра $A = kG$ упорядоченной полугруппы G с условием минимальности над полем k. В качестве выделенного базиса E здесь можно взять элементы самой полугруппы G, которая в этом случае одновременно играет роль «индексирующей» полугруппы Λ. Таким образом, классу алгебр со строгой фильтрацией принадлежат такие важнейшие алгебры, как свободные ассоциативные алгебры и алгебры полиномов. Они являются универсальными объектами соответственно в категории ассоциативных алгебр и ассоциативных коммутативных алгебр с фиксированным числом порождающих. Универсальные обёртывающие алгебр Ли естественным образом наделяются структурой алгебры со строгой фильтрацией.

2.1. Стандартный базис алгебр со строгой фильтрацией

Суппортом элемента $a \in A$ алгебры A со строгой фильтрацией называется набор базисных векторов из выделенного базиса E, входящих в запись a с ненулевыми коэффициентами. При этом базисные векторы в суппорте a считаются расположенными в порядке их убывания. Нулевому элементу приписывается «пустой» суппорт. Суппорты элементов из A можно рассматривать как коммутативные полилинейные мономы от символов $e_\alpha \in E$, $\alpha \in \Lambda$, которые сравниваются лексикографически. Пустой суппорт считается наименьшим.

2.1.1. Лемма. *Лексикографический порядок на множестве суппортов элементов из A удовлетворяет условию минимальности.*

Доказательство. Предположим противное, что существует бесконечно убывающие цепочки суппортов, и рассмотрим старшие (первые) базисные векторы суппортов, встречающихся в таких цепочках. В множестве этих базисных векторов выберем наименьший элемент $e_\gamma \in E$. Тогда существует бесконечная убывающая цепочка суппортов, каждый из которых начинается вектором e_γ. Если мы его вычеркнем во всех суппортах цепочки, то получим бесконечную убывающую цепочку суппортов, старшие базисные векторы которых меньше e_γ, противоречие. □

Сравнение элементов алгебры A по их суппортам определяет на A частичный порядок $\prec$, удовлетворяющий условию минимальности. Нулевой элемент оказывается наименьшим, несравнимыми — различные элементы с одинаковыми суппортами.

Фиксируем идеал $I \lhd A$. Старшие базисные векторы $\bar{I} = \{\bar{h} \mid h \in I\}$ элементов идеала I будем называть *редуцируемыми*, а остальные базисные векторы $E \setminus \bar{I}$ — *нормальными*. Линейную оболочку нормальных базисных векторов обозначим через N, и её элементы также будем называть нормальными, а остальные — редуцируемыми. Каждый смежный класс $[a] = a + I$, $a \in A$, по идеалу I содержит единственный нормальный элемент, являющийся наименьшим в нём элементом. В самом деле, так как порядок $\prec$ удовлетворяет условию минимальности, смежный класс $[a]$ содержит минимальные элементы. Минимальный элемент непременно нормален. Если бы он не был нормальным, то к нему можно было бы добавить некоторый элемент из идеала I, получив в смежном классе $[a]$

элемент с меньшим суппортом, противоречие. Два различных нормальных элемента не могут содержаться в одном смежном классе $[a]$, ибо их разность была бы ненулевым нормальным элементом, принадлежащим идеалу I, что нелепо. Нормальный элемент смежного класса $[a]$ по идеалу I называется *канонической формой* элемента a и обозначается $\operatorname{can} a$.

Добавление к редуцируемому элементу $a \in A$ элемента идеала I с целью получить меньший, чем a, элемент из смежного класса $[a]$ называется *редукцией*. Очевидно, что каждый элемент a алгебры A конечной системой редукций приводится к своей канонической форме $\operatorname{can} a$, коротко, *редуцируется* к $\operatorname{can} a$. Теперь понятно происхождение термина «редуцируемый» элемент.

Из сказанного следует, что имеет место прямое разложение линейных пространств $A = \mathrm{N} \oplus I$, т. е. каждый элемент $a \in A$ имеет единственное представление вида $a = \operatorname{can} a + h$, $\operatorname{can} a \in \mathrm{N}$, $h \in I$.

На линейном пространстве N нормальных элементов зададим структуру алгебры, определив умножение элементов согласно правилу

$$a \circ b = \operatorname{can}(ab), \quad a, b \in \mathrm{N}.$$

Полученная алгебра называется «алгеброй нормальных элементов». Она канонически изоморфна фактор-алгебре $B = A/I$. Канонический изоморфизм задаётся отображением

$$B \to \mathrm{N}, \quad [a] \mapsto \operatorname{can} a.$$

К сожалению, задание фактор-алгебры A/I в виде алгебры нормальных элементов не является эффективным даже в тех случаях, когда алгебра A задана эффективно, а идеал I определяется конечной системой порождающих. Необходимо использовать более специальный вид порождающих идеала I, обобщающий ступенчатый базис Гаусса подпространства в пространстве линейных форм. Эта система порождающих идеала I поможет нам эффективно находить цепочки редукций, приводящие элементы алгебры A к их канонической форме.

Выделенный базис E естественным образом наделяется структурой полугруппы (быть может, с присоединённым нулём 0), если умножение в E определить согласно правилу

$$e_\alpha \circ e_\beta = \begin{cases} e_{\alpha\beta}, & \text{если } \overline{e_\alpha e_\beta} = e_{\alpha\beta} \text{ (произведение } e_\alpha e_\beta \text{ существенно),} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta} \in E$, $\alpha, \beta \in \Lambda$. Полугруппа $(E, \circ)$ называется *сопровождающей полугруппой* алгебры со строгой фильтрацией A. Если все произведения базисных векторов существенны, то отображение

$$(E, \circ) \to \Lambda, \quad e_\alpha \mapsto \alpha,$$

осуществляет канонический изоморфизм $(E, \circ) \cong \Lambda$ сопровождающей полугруппы с индексирующей полугруппой. Заметим, что порядок, заданный на индексирующей полугруппе Λ, индуцирует порядок на сопровождающей полугруппе $(E, \circ)$.

Множество старших базисных векторов $\bar{I}$ элементов идеала $I \lhd A$ образует идеал $\bar{I} \lhd (E, \circ)$ в сопровождающей полугруппе.

Система порождающих $G = \{g_i \in I \mid i \in \mathrm{N}\}$, конечная или бесконечная, идеала $I \lhd A$ алгебры со строгой фильтрацией A называется его *стандартным базисом* (или *базисом Грёбнера*, или *базисом Грёбнера—Ширшова* в другой терминологии), если множество старших базисных векторов $\bar{G} = \{\bar{g}_i \in \bar{I} \mid i \in \mathrm{N}\}$ системы G порождает идеал $\bar{I} \lhd (E, \circ)$ (обозначение $I = (G) \lhd A$, $\bar{I} = (\bar{G}) \lhd (E, \circ)$). Иными словами, для всякого редуцируемого базисного вектора $e_\alpha = \bar{h}$, $h \in I$, найдётся существенное произведение вида ug_iv, где $g_i \in G$, а u и v — элементы базиса E или равны $1 \in k$, такое что $e_\alpha = \overline{ug_iv} = u\bar{g}_iv$.

Обобщая исследования Ж. Бергмана [5], относящиеся к свободной ассоциативной алгебре, со всяким существенным произведением ug_iv указанного вида свяжем линейный оператор

$$r_{u,i,v} \colon A \to A,$$

действующий на линейном пространстве алгебры A, согласно правилу

$$r_{u,i,v}(e_\alpha) = e_\alpha - ug_iv, \quad r_{u,i,v}(e_\beta) = e_\beta, \quad \beta \neq \alpha.$$

Такой оператор называется *редукцией, связанной со стандартным базисом* G. Каждая редукция «сдвигает» лишь один редуцируемый базисный вектор из E. Если редукция $r_{u,i,v}$ сдвигает редуцируемый элемент $a \in A$, то его образом является элемент $e_{u,i,v}(a) = a_1 \in A$ с меньшим суппортом. Поэтому любой элемент алгебры A конечной последовательностью редукций, связанных со стандартным базисом G идеала I, приводится к своей канонической форме (коротко, к ней редуцируется). В частности, нормальные элементы характеризуются тем, что они неподвижны относительно всех редукций, а элементы идеала I — тем, что они редуцируются к нулю.

Идеал $I \lhd A$ алгебры со строгой фильтрацией может содержать много различных стандартных базисов. Однако среди них можно выбрать в некотором смысле наиболее «экономичный».

На множестве векторов выделенного базиса E определим новый частичный порядок $\geqslant\circ$, полагая, что $e_\alpha \geqslant\circ\, e_\beta$ в том и только в том случае, когда существует существенное произведение $ue_\beta v$ (u и v — базисные векторы из E или $1 \in k$), такое что $e_\alpha = \overline{ue_\beta v}$. В сопровождающей полугруппе $(E, \circ)$ элемент e_α принадлежит идеалу, порождённому e_β. Поскольку индексирующая полугруппа Λ (полугруппа, «фильтрующая» алгебру A) состоит из «положительных» элементов, справедлива импликация

$$e_\alpha \geqslant\circ\, e_\beta \implies e_\alpha \geqslant e_\beta$$

где $\geqslant$ — «старый» порядок на E. Поэтому новый порядок $\geqslant\circ$ удовлетворяет условию минимальности. Минимальные элементы относительно частичного порядка $\geqslant\circ$ в множестве старших базисных векторов $\bar{I} = \{\bar{a} \mid a \in I\}$ элементов идеала I назовём обструкциями (термин Аника). Очевидно, что каждая обструкция идёт в начале хотя бы одного элемента в любом стандартном базисе G идеала I.

Стандартный базис G идеала $I \lhd A$ называется *редуцированным*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1) старшие коэффициенты элементов G равны 1;
2) любой элемент $g_i \in G$ неподвижен относительно редукций $r_{u,j,v}$, $i \neq j$, определённых оставшимися элементами $g_j \in G \setminus g_i$.

2.1.2. Теорема. *Всякий идеал $I \lhd A$ алгебры со строгой фильтрацией A обладает единственным редуцированным стандартным базисом $G = \{g_i\}$.*

Доказательство. Всякий элемент $g_i \in G$ может быть записан в виде $g_i = \bar{g}_i - f_i$, где $\bar{g}_i$ — обструкция, а f_i — сумма младших членов, являющаяся нормальным элементом, $f_i \in \mathrm{N}$. Отсюда $\bar{g}_i = f_i + g_i$, $f_i \in \mathrm{N}$, $g_i \in I$. Следовательно, $f_i = \operatorname{can} \bar{g}_i$. Таким образом, всякий редуцированный стандартный базис идеала I имеет вид $\{\bar{g}_i - \operatorname{can} \bar{g}_i\}$, где $\{\bar{g}_i\}$ — все возможные обструкции в $\bar{I}$. □

2.2. Алгоритмические вопросы, связанные со стандартными базисами

Речь пойдёт о трёх проблемах: проблеме вхождения в идеал $I \lhd A$, непосредственной связанной с эффективным заданием фактор-алгебры A/I; распознавании стандартных базисов среди систем порождающих идеала I; дополнении системы порождающих идеала I до его стандартного базиса. Далее мы будем сохранять все понятия и обозначения, данные выше. По умолчанию все сравнения, встречающиеся в тексте, выполняются эффективно.

2.2.1. Проблема вхождения в идеал. Предположим, что алгебра со строгой фильтрацией A удовлетворяет двум условиям:

1) A эффективно задана, т. е. операции в ней выполняются с помощью алгоритмов;
2) сопровождающая полугруппа $(E, \circ)$ идеально эффективно задана.

Как мы помним, «идеальность» эффективного задания умножения в $(E, \circ)$ означает наличие такого алгоритма $\mathfrak{M}$, который по предъявлении элементов e_α и $e_\beta \neq e_\alpha$ из E отвечает на вопрос, принадлежит или нет e_β главному идеалу $P = (e_\alpha)$, порождённому в $(E, \circ)$ элементом e_α. Более того, если «да», то он вырабатывает один элемент $e_\delta \in E$ или пару элементов $e_\delta, e_\gamma \in E$ таким образом, что справедливо одно из равенств: $e_\beta = \overline{e_\delta e_\alpha}$, $e_\beta = \overline{e_\alpha e_\gamma}$ или $e_\beta = \overline{e_\delta e_\alpha e_\gamma}$.

Если алгебра со строгой фильтрацией A удовлетворяет условиям 1) и 2), а идеал $I \lhd A$ задан конечным стандартным базисом, то существует алгоритм для построения канонических форм элементов из A. Действительно, алгоритм $\mathfrak{M}$ из пункта 2) позволяет распознать, является ли предъявленный элемент $a \in A$ редуцируемым или нет. Более того, если ответ «да», то тот же алгоритм $\mathfrak{M}$ позволяет указать редукцию r, такую что $r(a) \prec a$. Таким образом, с помощью алгоритма $\mathfrak{M}$ мы находим цепочку редукций, приводящую элемент a

к его канонической форме $\operatorname{can} a$. Проблема вхождения в идеал I оказывается алгоритмически разрешимой:

$$a \in I \iff \operatorname{can} a = 0.$$

А это, в свою очередь, влечёт за собой эффективность задания фактор-алгебры A/I как алгебры нормальных элементов.

2.2.2. Распознавание стандартных базисов сред систем порождающих идеала. Фиксируем идеал $I = (G) \triangleleft A$ в алгебре со строгой фильтрацией A, порождённый системой элементов $G = \{g_i \in I \mid i \in \mathbb{N}\}$, конечной или бесконечной. Всякий элемент $h \in I$ может быть записан в виде

$$h = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i g_i v_i,$$

где $\lambda_i \in k$, а элементы u_i и v_i принадлежат базису E или являются «пустыми символами». Если в этом равенства все произведения $u_i g_i v_i$ существенны, то такую запись элемента $h \in I$ будем называть его *представлением* (через систему элементов G). Базисный элемент $e_\alpha = \max\limits_i \{\overline{u_i g_i v_i}\}$ называется *параметром* рассматриваемого представления. Ясно, что $e_\alpha \geqslant \bar{h}$. Если выполняется равенство $e_\alpha = \bar{h}$, то представление называется *Н-представлением*. Этот термин в несколько ином контексте использовался Маколеем. Он был введён им в честь женщины-математика Г. Херрман (G. Herrmann). В случае когда G — стандартный базис идеала I, всякий элемент из I обладает Н-представлением, поскольку конечной системой редукций, связанных с элементами из G, приводится к нулевому элементу. Из очевидных соображений верно и обратное.

Мы будем говорить, что система элементов G *существенно порождает* идеал $I = (G)$, если всякий элемент из I обладает представлением через G. В дальнейшем мы рассматриваем лишь существенные системы порождающих идеалов.

Предположим, что существенные произведения $u_i g_i v_i$ и $u_j g_j v_j$, где $g_i, g_j \in G$, $i \neq j$, u_k и v_k имеют прежний смысл, таковы, что $\overline{u_i g_i v_i} = \overline{u_j g_j v_j} = e_\alpha \in E$. Тогда разность $s = {}^\circ(u_i g_i v_i) - {}^\circ(u_j g_j v_j)$ называется s-элементом, а базисный вектор e_α — *параметром начального представления этого s-элемента*. Именно s-элементы являются главными «персонажами» в алгоритмических вычислениях, связанных со стандартными базисами.

Теорема. *Система существенных порождающих $G = \{g_i \in I \mid i \in \mathbb{N}\}$ идеала $I = (G) \triangleleft A$ алгебры со строгой фильтрацией A является его стандартным базисом тогда и только тогда, когда всякий s-элемент s с параметром начального представления $e_\alpha \in E$ обладает представлением через G с параметром, меньшим, чем e_α.*

Доказательство. Предположим, что G — стандартный базис в I. Тогда каждый элемент из I редуцируется к нулю с помощью элементов из G и потому обладает Н-представлением. Очевидно, что $\bar{s} < e_\alpha$, но $s \in I$, и потому Н-представление s-элемента s является искомым представлением с параметром, меньшим e_α, условие теоремы выполнено.

Обратно, пусть выполнены условия теоремы. Предположим противное, что G не является стандартным базисом идеала I. Это означает, что существуют элементы в I, не обладающие Н-представлениями. Для простоты назовём их «плохими». Пусть $h \in I$ — плохой элемент. Любое его представление через G имеет вид

$$h = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i {}^\circ(u_i g_i v_i),$$

где $\lambda_i \in k$, а каждый из элементов u_i, v_i либо принадлежит базису E, либо «пустой символ». Положим, что $e_\beta = \max_i\{\overline{u_i g_i v_i}\}$ — параметр этого представления. Без ограничения общности рассуждения можно считать, что $\overline{u_i g_i v_i} = e_\beta$ при $i = 1, \ldots, d$ и $\overline{u_j g_j v_j} < e_\beta$ при $j = d+1, \ldots, m$. Для краткости первые d слагаемых будем называть «крупными». По предположению $e_\beta > \bar{h}$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i = 0$, в частности $d \geqslant 2$. Указанное представление h можно переписать в виде

$$h = \sum_{i=2}^{d} \lambda_i[{}^\circ(u_i g_i v_i) - {}^\circ(u_1 g_1 v_1)] + \sum_{j=d+1}^{m} \lambda_j {}^\circ(u_j g_j v_j).$$

Среди всех представлений элемента h через G можно выбрать представление с наименьшим параметром e_β. В свою очередь, среди этих представлений можно выбрать представление с минимально возможным числом крупных слагаемых d. Пусть выбранное нами представление элемента h уже таково. Элементы $s_i = {}^\circ(u_i g_i v_i) - {}^\circ(u_1 g_1 v_1)$, $i = 1, \ldots, d$, являются s-элементами. По условию теоремы каждый из них можно заменить на его представление с параметром, меньшим e_β, и тем самым получить представление элемента h с меньшим, чем d, числом крупных слагаемых или даже представление с меньшим, чем e_β, параметром. Противоречие. $\square$

Во многих конкретных примерах алгебр со строгой фильтрацией конечная система существенных порождающих G идеала I удовлетворяет условию теоремы, если ему удовлетворяет лишь конечное число s-элементов, называемых *критическими*. Наиболее важные примеры алгебр именно таковы: свободные ассоциативные алгебры, алгебры полиномов, универсальные обёртывающие алгебр Ли и др. Если алгебра A рассматриваемого типа удовлетворяет условиям 1) и 2) пункта 2.2.1, то существует алгоритм, устанавливающий, является ли система G стандартным базисом идеала I. Для этого необходимо и достаточно, чтобы критические s-элементы редуцировались к нулю элементами системы G.

Впервые идея построения s-элементов в иных терминах для свободных алгебр Ли появилась в работе А. И. Ширшова [4] в 1962 г. В ней не преследовались алгоритмические цели. В 1983 г. Б. Бухбергер [7] предложил алгоритм, использующий s-элементы для построения стандартных базисов (в его терминологии базисов Грёбнера) полиномиальных идеалов. В 1978 г. Ж. Бергман [5] применил s-элементы для характеризации стандартных базисов (он пользовался терминологией Б. Бухбергера) идеалов свободных ассоциативных алгебр. Учитывая пионерские идеи А. И. Ширшова в теории стандартных базисов, Л. А. Бокуть предложил называть их базисами Грёбнера—Ширшова, что несомненно устанавливает историческую справедливость.

2.2.3. Дополнение системы порождающих идеала до его стандартного базиса. Предположим, что идеал $I = (G) \lhd A$ алгебры со строгой фильтрацией A существенно порождается конечным множеством элементов $G = \{g_1, \ldots, g_m\} \subset I$. Кроме того, считаем, что алгебра A удовлетворяет условиям 1) и 2) пункта 2.2.1 и что существуют критические элементы в смысле пункта 2.2.2. Тогда можно указать процедуру, *перечисляющую* некоторый стандартный базис идеала I. Состоит она в следующем.

Составляем последовательно все критические s-элементы и проверяем их редуцируемость к нулю с помощью элементов из G. Если все они редуцируются к нулю, то G согласно теореме предыдущего пункта является стандартным базисом идеала I и процедура останавливается. Если не все критические элементы редуцируются с помощью элементов из G к нулю, то пусть s_1 — первый из таких s-элементов, который нам встретился. Переобозначим $g_{m+1} := s_1$ и к множеству существенных порождающих $G_1 = G \cup g_{m+1}$ применим предыдущие рассуждения, и т. д. Процесс построения систем существенных порождающих $G_0 = G \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_t \subset \ldots$ идеала I может не завершиться на конечном шаге. Тогда объединение $F = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} G_i$ полученных элементов образует бесконечный стандартный базис идеала I по теореме предыдущего пункта. Тот факт, что стандартный базис F бесконечен, просто означает, что множество старших базисных векторов $\bar{I}$ содержит бесконечно много обструкций. Напротив, если число обструкций в $\bar{I}$ конечно, то стандартный базис F конечен, а описанный нами перечислительный процесс обрывается на конечном шаге. С любым идеалом алгебры A связывается лишь конечное число обструкций в том и только в том случае, когда алгебра A «слабо нётерова», т. е. в ней любой идеал конечно порождён. Для коммутативных алгебр понятия нётеровости и слабой нётеровости совпадают.

Построение стандартного базиса идеала путём последовательного добавления «нередуцируемых» критических s-элементов к предыдущей конечной системе порождающих получило название *алгоритма Бухбергера*, поскольку именно им он был сформулирован в 1983 г. [7] применительно к полиномиальным идеалам. Правда, в завуалированной форме подобный процесс можно усмотреть в упомянутой работе А. И. Ширшова [4], относящейся к 1962 г. и посвящённой базам в свободной алгебре Ли.

Понятие стандартного базиса легко переносится на односторонние идеалы алгебры со строгой фильтрацией A. Если I — левый (правый) идеал алгебры A, то множество $\bar{I}$ старших базисных векторов элементов из I образует левый (правый) идеал в сопровождающей полугруппе $(E,\circ)$. Система порождающих $G=\{g_i\in I\mid i\in\mathbb{N}\}$, конечная или бесконечная, идеала I называется его стандартным базисом, если в сопровождающей полугруппе $(E,\circ)$ старшие базисные векторы $\bar{G}=\{\bar{g}_i\in\bar{I}\mid i\in\mathbb{N}\}$ порождают левый (правый) идеал $\bar{I}$. Далее путём дословного переноса можно включить всю «машинерию», изложенную нами выше для двусторонних идеалов, и получить аналогичные выводы.

2.2.4. Методологические замечания. Рассмотрим линейное пространство V над полем k, быть может бесконечномерное, и в нём выделенный базис $E=\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$, занумерованный элементами частично упорядоченного множества Λ с условием минимальности. Элементы V можно рассматривать как «линейные формы» от «переменных» e_α. Фиксируем линейное подпространство $U\subseteq V$.

На пространстве V определим структуру алгебры с нулевым умножением, а на множестве Λ — структуру полугруппы с нулём и нулевым умножением. Тогда V окажется алгеброй со строгой фильтрацией, в которой выделен базис E, а подпространство U — её идеалом. Приведённый стандартный базис в U обобщает понятие ступенчатого базиса Гаусса для подпространства линейных форм на случай бесконечномерного пространства. Если U конечномерно, то приведённый стандартный базис в точности совпадает со ступенчатым базисом Гаусса в U. Редуцированный стандартный базис соответствует случаю, когда матрица системы базисных линейных форм ступенчатая и лидеры строк в ней равны 1 и одновременно являются лидерами своих столбцов. Алгоритм Бухбергера, дополненный необходимыми редукциями, в этом случае совпадает с алгоритмом Гаусса приведения системы линейных форм к ступенчатому виду. Таким образом, методологической основой понятия стандартного базиса является идея Гаусса о построении ступенчатого базиса системы линейных форм.

Алгебру многочленов $A=k[x_1,\ldots,x_n]$ от n переменных можно рассматривать как алгебру со строгой фильтрацией, если в качестве выделенного базиса взять мономы с допустимой упорядоченностью. Приведённым стандартным базисом полиномиального идеала $I\lhd A$, порождённого системой линейных форм, является ступенчатый базис Гаусса этой системы линейных форм.

Приведённый стандартный базис идеала $I\lhd k[x]$ в алгебре полиномов от одного переменного, порождённого двумя полиномами $f(x)$ и $g(x)$, состоит из одного многочлена $d(x)$, являющегося их наибольшим общим делителем. Алгоритм Бухбергера, дополненный необходимыми редукциями, совпадает здесь с алгоритмом Евклида.

Следовательно, и понятие ступенчатого базиса Гаусса системы линейных форм, и понятие наибольшего общего делителя многочленов, принадлежащее Евклиду, объединяются одной идеей построения стандартного базиса идеала.

Основным героем в определении алгебры со строгой фильтрацией является, конечно, выделенный базис. Именно умножение в этом базисе должно быть настолько эффективно заданным, чтобы была алгоритмически разрешима проблема вхождения в главный идеал в присоединённой полугруппе. Это первое по важности условие для алгоритмических проблем, связанных со стандартными базисами. Второе важное условие с этом направлении — это возможность распознавать конечно порождённые идеалы с конечным числом обструкций. Именно в этом случае при выполнении первого условия проблема вхождения в идеал алгоритмически разрешима. Проблема распознавания конечности числа обструкций может быть сформулирована в традиционной форме для теории алгоритмов. Фиксируем эффективную алгебру A со строгой фильтрацией и определим алгоритм $\mathfrak{M}$, действующий на множестве конечных наборов элементов из A, следующим образом. При подаче на вход $\mathfrak{M}$ конечного набора элементов из A он начинает последовательно применять к нему алгоритм Бухбергера. Остановка работы алгоритма $\mathfrak{M}$ наступает лишь тогда, когда на очередном шаге возникает стандартный базис идеала, порождённого набором элементов, поступившим на вход $\mathfrak{M}$. Таким образом, проблема распознавания конечно порождённого идеала алгебры A с конечным числом обструкций равносильна проблеме остановки алгоритма $\mathfrak{M}$, которая, к большому сожалению, в некоммутативных алгебрах даже в сравнительно простых случаях оказывается алгоритмически неразрешимой. Как известно, если в качестве алгебры A взять свободную ассоциативную алгебру с числом порождающих $n > 1$, то проблема остановки алгоритма $\mathfrak{M}$ алгоритмически неразрешима.

3. Производные структуры алгебр со строгой фильтрацией

Пусть A и $\tilde{A}$ — две алгебры со строгой фильтрацией над полем k, Λ и $\tilde{\Lambda}$ — их фильтрующие полугруппы (в необходимых случаях с нулём), $E = \{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ и $\tilde{E} = \{\tilde{e}_\beta \mid \beta \in \tilde{\Lambda}\}$ — их выделенные базисы соответственно.

3.1. Прямое суммирование алгебр со строгой фильтрацией

3.1.1. Предложение. *Класс алгебр со строгой фильтрацией каноническим образом замкнут относительно операции прямого суммирования.*

Доказательство. В прямой сумме алгебр $B = A \oplus \tilde{A}$ в качестве выделенного базиса возьмём объединение выделенных базисов слагаемых $F = E \cup \tilde{E}$, а в качестве фильтрующей полугруппы — прямое объединение их фильтрующих полугрупп $M = \Lambda \cup \tilde{\Lambda}$ (см. пункт 1.3). Здесь произведены переобозначения $e_\alpha := e_{\alpha\times 0}$ и $\tilde{e}_\beta := \tilde{e}_{0\times\beta}$, $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in \tilde{\Lambda}$, в смысле отождествлений, сделанных в пункте 1.3. Несложно проверить, что все пункты определения алгебры со строгой фильтрацией при этом выполняются. $\square$

С помощью индуктивных рассуждений операцию прямого суммирования алгебр со строгой фильтрацией можно распространить на произвольное число слагаемых.

3.2. Тензорное произведение алгебр со строгой фильтрацией

3.2.1. Предложение. *Класс алгебр со строгой фильтрацией каноническим образом замкнут относительно операции тензорного произведения.*

Доказательство. В тензорном произведении алгебр $B = A \otimes \tilde{A}$ в качестве выделенного базиса возьмём множество тензорных произведений базисных векторов $F = \{e_{\alpha\times\beta} := e_\alpha \otimes \tilde{e}_\beta \mid e_\alpha \in E,\ \tilde{e}_\beta \in \tilde{E}\}$, а в качестве фильтрующей полугруппы — прямое произведение фильтрующих полугрупп тензорных множителей $M = \Lambda \times \tilde{\Lambda}$ с лексикографическим порядком (см. пункт 1.2). Все пункты определения алгебры со строгой фильтрацией окажутся удовлетворёнными. □

3.3. Стандартные базисы в свободных модулях над алгеброй со строгой фильтрацией

Сохраним обозначения предыдущих пунктов: A — алгебра со строгой фильтрацией, E — её выделенный базис, Λ — фильтрующая полугруппа, $e_\alpha \in E$, $\alpha \in \Lambda$, — базисный элемент.

Возьмём прямую сумму $B = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ $n+1$ экземпляра алгебры A, $A_i = A$, $i = 0, 1, \ldots, n$, рассматриваемой как линейное пространство. Положим $A^n = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и на пространстве B зададим структуру ассоциативной алгебры, определив умножение следующим правилом: если $a_0 \in A_0$ и $b = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $a \circ b = (a_0a_1, \ldots, a_0a_n) \in A^n$; $A^nA^n = A^nA_0 = \{0\}$; элементы в A_0 перемножаются по закону умножения в A.

В качестве выделенного базиса в алгебре B возьмём объединение экземпляров базиса E, лежащих в слагаемых A_i; обозначение: $F = \bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i$, $E_i = E \subset A_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

На роль фильтрующей полугруппы выберем подполугруппу M в прямом произведении n экземпляров $\Lambda^n = \mathop{\times}\limits_{1}^{n} \Lambda$ полугруппы Λ, порождённую «диагональной» подполугруппой $D = \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in \Lambda^n \mid \alpha \in \Lambda\}$ и прямым объединением $\bigcup\limits_{1}^{n} \Lambda$ n экземпляров полугруппы Λ.

Индексация элементов выделенного базиса F алгебры B элементами полугруппы M производится следующим образом: если $e_\alpha \in A_0$, то переобозначим $e_\alpha := e_{(\alpha,\ldots,\alpha)}$, $\alpha \in \Lambda$; если $e_\alpha \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, то переобозначим $e_\alpha := e_{0\times\ldots\times\underset{i}{\alpha}\times\ldots\times 0}$, $\alpha \in \Lambda$.

Несложно заметить, что тем самым на пространстве B определена структура алгебры со строгой фильтрацией. При этом существенными окажутся произведения базисных векторов вида $e_{(\alpha,\ldots,\alpha)}e_{(\beta,\ldots,\beta)}$ и $e_{\alpha,\ldots,\alpha}e_{0\times\ldots\times\beta\times\ldots\times 0}$, где $\alpha, \beta \in \Lambda$ и произведение $e_\alpha e_\beta$ существенное в алгебре A.

Подалгебра с нулевым умножением $A^n \subset B$ является идеалом в алгебре B и может рассматриваться как левый модуль ${}_AA^n$ над подалгеброй $A_0 = A$. Он называется *свободным модулем ранга* n над алгеброй со строгой фильтрацией A. Подмодули этого модуля — идеалы алгебры B, и их стандартные базисы (как базисы идеалов в B) называются *стандартными базисами подмодулей.*

Перейдём к привычным «модульным» обозначениям. Без ограничения общности рассуждений будем предполагать, что алгебра A обладает единичным элементом. Элементы $z_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0) \in A^n$, $i = 1, \ldots, n$, образуют базис свободного A-модуля ${}_AA^n$, поскольку элемент $b = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ обладает единственной записью вида $b = a_1z_1 + \ldots + a_nz_n$, $a_i \in A_0 = A$. Если $c \in A_0 = A$, то $cb = (ca_1)z_1 + \ldots + (ca_n)z_n$. Стандартные базисы подмодулей наследуют все свойства стандартных базисов идеалов, поскольку в нашей модели таковыми и являются.

3.3.1. Предложение. *В свободном конечно порождённом модуле над алгеброй со строгой фильтрацией каноническим образом определяется понятие стандартного базиса подмодуля.* □

Читатель легко заметит, что нами оставлена без внимания такая важная «производная структура», как свободное произведение алгебр со строгой фильтрацией. Дело в том, что известные порядки на свободных произведениях упорядоченных полугрупп, наследующие упорядочения на свободных множителях, к сожалению, не наследуют условие минимальности. Хороший обзор и оригинальные доказательства на эту тему можно найти в [7].

4. Обобщения на неассоциативные алгебры

До сих пор предметом нашего исследования были ассоциативные алгебры. Однако данное нами определение алгебры со строгой фильтрацией дословно переносится на неассоциативные алгебры. Только теперь индексация векторов выделенного базиса, т. е. «строгая» фильтрация, производится элементами подходящего упорядоченного множества, удовлетворяющего условию минимальности, на котором определена, вообще говоря неассоциативная, операция, согласованная с порядком. Такой алгебраический объект естественно называть *упорядоченным группоидом*. Его определение и свойства аналогичны соответствующему определению и свойствам упорядоченной полугруппы. По-прежнему на выделенном базисе E алгебры со строгой фильтрацией A можно определить структуру выделенного группоида $(E, \circ)$. Если $I \lhd A$ — идеал алгебры A, то, как и ранее, старшие базисные векторы его элементов образуют идеал $\bar{I} \lhd (E, \circ)$ в присоединённом группоиде. Сохраняется и определение стандартного базиса идеала. Система порождающих $G = \{g_1, \ldots, g_m, \ldots\} \subset I$ идеала I называется его стандартным базисом, если старшие базисные векторы $\bar{G} = \{\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m, \ldots\}$ этой системы порождают идеал $\bar{I} \lhd (E, \circ)$. В некотором уточнении нуждаются определения редукции и s-элемента. К этому мы сейчас и переходим.

Обозначим через l_a и r_a соответственно левое и правое умножение на элемент $a \in A$, а через ω — свободный моноид, порождённый символами l_{e_α} и

r_{e_α}, $e_\alpha \in E$, $\alpha \in \Lambda$, где Λ — фильтрующий группоид. Естественным образом определяется *действие* моноида ω на линейном пространстве алгебры A и на множестве элементов сопровождающего группоида $(E, \circ)$. Более точно, если $\psi = \sigma_1 \ldots \sigma_m \in \omega$, где σ_i — знак левого или правого умножения на элемент $e_\alpha \in E$, и $a \in A$, то полагаем $\psi a = \sigma_1(\ldots(\sigma_m a)\ldots)$. «Произведение» ψa называется существенным, если каждое из умножений σ_i действует существенным образом в прежнем смысле.

Для каждого существенного произведения ψg_i, $\psi \in \omega$, $g_i \in G$, $e_\alpha = \overline{\psi g_i}$, определяется редукция $r_{\psi,i}\colon A \to A$, которая является линейным оператором пространства алгебры A, переводящим базисный элемент e_α в элемент $r_{\psi,i}(e_\alpha) = e_\alpha - {}^\circ(\psi g_i)$ и оставляющим на месте все остальные элементы выделенного базиса E.

Предполагается, что старшие члены существенных произведений $\psi_1 g_i$ и $\psi_2 g_j$, $\psi_1, \psi_2 \in \omega$, $g_i, g_j \in G$, совпадают: $e_\alpha = \overline{\psi_1 g_i} = \overline{\psi_2 g_j} \in E$. Тогда разность $s = {}^\circ(\psi_1 g_i) - {}^\circ(\psi_2 g_j)$ называется s-элементом с параметром начального представления, равным e_α.

Понятно, что под представлением элемента $a \in I$ через систему порождающих G теперь следует понимать равенство вида $a = \sum\limits_i \lambda_i \psi_i g_i$, $\lambda_i \in k$, $\psi_i \in \omega$, $g_i \in G$, где все произведения $\psi_i g_i$ существенны. Максимальный из старших базисных векторов $\overline{\psi_i g_i}$ называется параметром этого произведения.

В настоящее время принято систему элементов $G \subset A$ алгебры со строгой фильтрацией A называть просто *стандартным базисом*, понимая под этим, что она является *стандартным базисом порождённого ею идеала* $I = (G)$. Мы будем пользоваться этим сокращением.

Необходимо внести уточнения и в текст пункта 2.2, касающегося алгоритмических вопросов, связанных со стандартными базисами, когда разговор идёт о неассоциативных алгебрах.

Для того чтобы алгебра A со строгой фильтрацией была интересна для эффективных вычислений, нужно, чтобы она удовлетворяла следующим условиям, упоминавшимся нами в пункте 2.2. Воспроизведём эти условия для случая неассоциативных алгебр.

1) Алгебра A эффективно задана. Это означает, что операции в поле k и умножение элементов $e_\alpha \in E$ выделенного базиса E осуществляются с помощью фиксированных алгоритмов.
2) Сопровождающий группоид $(E, \circ)$ идеально эффективно задан (см. пункт 1.1). Эффективность задания сопровождающего группоида $(E, \circ)$ обусловлена тем, что умножение в алгебре A эффективно. Рассматриваемое условие означает, что задан алгоритм $\mathfrak{M}$, отвечающий на вопрос, принадлежит или нет базисный вектор $e_\beta \in E$ идеалу $P = (e_\alpha)$, порождённому вектором $e_\alpha \in E$, $\alpha \neq \beta$, в $(E, \circ)$. Если ответ «да», то алгоритм $\mathfrak{M}$ вырабатывает элемент $\psi \in \omega$ свободного моноида ω, такой что $e_\beta = \overline{\psi e_\alpha}$.
3) Для любой конечной системы элементов $G \subset A$ алгебры A со строгой фильтрацией существует конечная система «критических» s-элементов.

Напомним, что редуцируемость к нулю (относительно G) критических s-элементов влечёт редуцируемость к нулю всех s-элементов системы G.

В алгебре со строгой фильтрацией, удовлетворяющей условиям 1)—3), решаются все алгоритмические проблемы, перечисленные в пункте 2.2.

Сформулированные общие определения годятся и для ассоциативных алгебр, но для них ситуация упрощается, поскольку можно использовать элементы свободного группоида степени, не превосходящей 2.

В важнейших примерах ассоциативных алгебр со строгой фильтрацией, таких как свободная ассоциативная алгебра или алгебра полиномов, проверка выполнимости условий 1)—3) тривиальна. В неассоциативных алгебрах она может представлять собой непростую задачу. В заключение мы рассмотрим безусловно самый важный пример алгебры со строгой фильтрацией — свободную алгебру Ли. Наша цель — показать, как этот пример вписывается в приведённую нами общую схему. Все основные идеи и не доказываемые нами комбинаторные утверждения содержатся в [3]. Построение стандартных базисов в свободных цветных супералгебрах Ли описано в пионерской работе А. А. Михалёва [12].

4.1. Стандартные базисы в свободных алгебрах Ли

Свободную ассоциативную алгебру $k\langle X\rangle = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ от n порождающих x_i над полем k можно рассматривать как алгебру Ли $k\langle X\rangle^{(-)}$, линейное пространство которой совпадает с пространством $k\langle X\rangle$, а роль операции умножения выполняет коммутирование $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in k\langle X\rangle$. Подалгебра $L \subseteq k\langle X\rangle^{(-)}$, порождённая переменными x_i, является свободной алгеброй Ли. Элементы L называются *лиевыми элементами* алгебры $k\langle X\rangle$.

Определим на мономах $\langle X\rangle$ степенно-лексикографический порядок deg-lex, при котором мономы сначала сравниваются по длине, а в случае равных длин — лексикографически. Моном $u \in \langle X\rangle$ называется *правильным*, если при любом представлении $u = vw$ имеем $u > wv$, т. е. циклические перестановки переменных в u приводят к словам, меньшим, чем u. Несложно заметить, что если u и v — правильные мономы и $u \neq v$, то больший из мономов uv и vu также правилен. Превратим множество правильных мономов в группоид Λ с нулём, определив умножение в нём согласно правилу

$$u * v = \begin{cases} uv, & \text{если } uv \text{ — правильный моном,} \\ vu, & \text{если } vu \text{ — правильный моном,} \\ 0, & \text{если } u = v. \end{cases}$$

Группоид Λ коммутативен, но не ассоциативен. Порядок deg-lex согласуется в нём с умножением.

В каждом правильном мономе $u \in \langle X\rangle$ можно единственным образом расставить квадратные скобки, чтобы получилось так называемое *правильное неассоциативное слово* $[u]$ (точное определение см. в [4]). При этом выполняются следующие условия:

1) лиевы элементы $[u]$, $u \in \Lambda$, образуют базис линейного пространства свободной алгебры Ли L;
2) в представлении $[u]$ в виде линейной комбинации ассоциативных мономов старшим является моном u, обозначение $\overline{[u]} = u$;
3) если правильный лиев элемент $[u]$ индексировать правильным ассоциативным мономом $u \in \Lambda$, то будет выполняться условие типа фильтрации в определении алгебры со строгой фильтрацией.

Правильные лиевы слова образуют так называемую базу Ширшова—Линдона (см. [4]) в свободной алгебре Ли.

Таким образом, если в свободной алгебре Ли L зафиксировать базис, состоящий из правильных лиевых мономов, индексированных соответствующими правильными ассоциативными словами, то L можно рассматривать как алгебру со строгой фильтрацией.

Используя работу [12], несложно перенести приведённые рассмотрения на цветные супералгебры и p-алгебры Ли.

Литература

[1] Латышев В. Н. Алгебры со строгой фильтрацией и стандартные базисы // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 12. — Казань, 2001. — С. 3—18.

[2] Латышев В. Н. Производные структуры алгебр со строгой фильтрацией // Мат. методы и приложения. Тр. 9-х мат. чтений МГСУ. — М., 2001. — С. 124—127.

[3] Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические проблемы в алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 1, № 3. — С. 292—296.

[4] Ширшов А. И. О базах свободной алгебры Ли // Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1, № 1. — С. 14—19.

[5] Bergman G. The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. — 1978. — Vol. 29, no. 2. — P. 178—218.

[6] Bergman G. Ordering coproducts of groups and semigroups // J. Algebra. — 1990. — Vol. 133, no. 2. — P. 313—339.

[7] Buchberger B. Gröbner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory // Multidimensional Systems Theory — Progress, Directions and Open Problems / N. K. Bose, ed. — Dordrecht: Reidel, 1985. — P. 184—232.

[8] Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involutive bases of polynomial ideals // Math. Comput. Simulation. — 1998. — Vol. 45. — P. 519—542.

[9] Golod E. S. Standard bases and homology // Algebra: Some Current Trends, Proc. 5th Natl. Sch. Algebra, Varna/Bulg. 1986. — Berlin: Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1352). — P. 88—95.

[10] Latyshev V. N. Canonization and standard bases of filtered structures // Lie Algebras, Rings and Related Topics. Papers of the 2nd Tainan—Moscow Int. Algebra Workshop '97. Tainan, Taiwan, January 11—17, 1997 / Y. Fong, ed. — Hong Kong: Springer, 2000. — P. 61—79.

[11] Latyshev V. N. An improved version of standard bases // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Proc. of the 12th Int. Conf., FPSAC '00, Moscow, Russia, June 26—30, 2000 / D. Krob, ed. — Berlin: Springer, 2000. — P. 496—506.

[12] Mikhalev A. A. The composition lemma for color Lie superalgebras and for Lie p-algebras // Algebra, Proc. Int. Conf. Memory A. I. Mal'cev, Novosibirsk/USSR, 1989. Pt. 2. — Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131). — P. 91—104.