Алгебры автоматов*

В. Б. КУДРЯВЦЕВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vbk@lsili.ru

УДК 519.95

Ключевые слова: алгебры автоматов, проблемы полноты и выразимости, предполные классы.

Аннотация

В работе приведён обзор основных результатов в области теории автоматов, связанных с решением проблем полноты и выразимости, в том числе в ослабленных вариантах постановок.

Abstract

V. B. Kudryavtsev, Automata algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 4, pp. 37—66.

In this paper, we present the main results on problems of the expressibility and completeness for the automata theory, including the results for weakened problem statements.

Введение

Понятие автомата относится к числу важнейших в математике. Оно возникло на стыке разделов математики, используется в технике, биологии и других областях. Содержательно автомат представляет собой устройство с входными и выходными каналами. На входы последовательно поступает информация, которая перерабатывается автоматом с учётом его внутреннего состояния и строения этой последовательности и выдаётся через выходные каналы. Эти устройства могут допускать соединение их каналов между собой, таким образом строятся сети автоматов.

Отображение входных последовательностей в выходные называют автоматной функцией, а возможность получения новых таких отображений в сетях автоматов приводит к алгебре автоматных функций.

Изучение автоматов и их алгебр началось в тридцатые годы прошлого столетия, особенно активным оно стало в 1950-х годах.

Основополагающую роль здесь сыграли работы А. Тьюринга, К. Шеннона, Э. Мура, С. Клини и других авторов знаменитого сборника «Автоматы» [1]. Последующие работы по изучению алгебр автоматов велись под большим влиянием

*Работа поддерживалась грантом РФФИ № 06-01-00240.

известной статьи С. В. Яблонского [25] по теории функций k-значной логики. Такие функции могут рассматриваться как автоматы без памяти, к которым применяются операции суперпозиции.

Задачи о выразимости, полноте, базисах, решётке замкнутых классов для функций k-значной логики, а также развитый аппарат сохранения предикатов, ключевой для решения этих задач, оказались важными и для алгебр автоматов, называемых далее функциональными системами. При этом под выразимостью понимается возможность получения функций одного множества через другие с помощью заданных операций, а под полнотой — выразимость всех функций через заданные.

В обзоре изучение функциональных систем осуществляется на ряде модельных объектов: автоматы без памяти, т. е. функции k-значной логики; автоматы с ограниченной памятью, т. е. функции с временны́ми задержками; конечные автоматы, т. е. автоматные функции общего вида. В качестве операций выступают суперпозиции, а в последнем случае ещё и обратная связь.

Для автоматов без памяти приводятся фундаментальные результаты Э. Поста о строении решётки замкнутых классов булевых функций, знакомство с которыми сегодня затруднено в связи с труднодоступностью книг [26, 28], в которых они содержатся. Затем приводятся наиболее существенные результаты для функций k-значной логики, в основе которых лежит подход, развитый А. В. Кузнецовым и С. В. Яблонским и опирающийся на понятие предполного класса.

Для конечно порождённых систем таких функций семейство предполных классов образует критериальную систему; другими словами, произвольное множество является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного предполного класса. Множество предполных классов оказалось конечным, и из их характеризации вытекает алгоритмическая разрешимость задачи о полноте. С. В. Яблонским путём явного описания всех предполных классов была решена задача о полноте для функций трёхзначной логики, а вместе с А. В. Кузнецовым найдены отдельные семейства предполных классов для произвольной конечной значности. Затем усилиями многих исследователей [11, 19, 20, 22, 23] последовательно были открыты новые семейства, а заключительные построения провёл И. Розенберг [29]. Мы приводим итоговый результат этих построений.

Мы рассматриваем также неоднородные функции — предельное обобщение функций k-значной логики.

Для автоматов с ограниченной памятью приводятся решения задач о полноте и выразимости, в том числе в ослабленных вариантах постановок [16]. Под автоматом такого рода понимается пара (f, t), где f — функция k-значной логики, а t — время её вычисления. Слабая полнота означает возможность получения из исходных пар с помощью суперпозиций любой функции хоть с какой-нибудь задержкой.

Подробно рассматривается случай функций двузначной логики с задержками. В качестве аппарата решения здесь также используются предполные классы.

Отличие этого случая от случая автоматов без памяти состоит в том, что семейство предполных классов оказывается счётным. Вместе с тем задача о слабой полноте остаётся алгоритмически разрешимой.

Другим обобщением автоматов без памяти является класс автоматов с операциями суперпозиции и обратной связи. Для этого класса ситуация оказывается похожей на случай автоматов с ограниченной памятью. Также удаётся описать все предполные классы. Их счётное число, но можно построить алгоритм распознавания полноты конечных систем автоматов [24].

Переход к общему случаю автоматов доставляет уже континуальность множества предполных классов [15] и алгоритмическую неразрешимость задачи о полноте [14]. Поэтому актуальными становятся поиски путей, связанных как с ослаблением свойств полноты, так и, наоборот, обогащением этого понятия.

Первое направление реализуется путём рассмотрения задач о τ-полноте и A-полноте, состоящих соответственно в проверке порождения всех отображений на словах длины τ, а также таких отображений при любом фиксированном τ. Основными результатами здесь являются явное описание всех τ- и A-предполных классов и алгоритмическая неразрешимость задачи об A-полноте [8].

Второе направление реализуется путём разделения всех конечных систем автоматов, исследуемых на полноту, на типы. К одному типу относятся все системы, которые содержат заданный класс Поста автоматов без памяти. Основным результатом является явное указание границы отделимости алгоритмически разрешимых случаев типов систем автоматов на диаграмме Поста. Эта же граница оказывается верной и для случая A-полноты [4].

Наряду с продвижениями в решении основных задач по проблематике, связанной с выразимостью и полнотой, в обзоре обозначаются те направления, которые ещё разработаны слабо или недостаточно. Изложение ведётся только для модельных случаев функциональных систем автоматов. Общие построения, осуществленные автором в [17], здесь не затрагиваются.

Автор благодарит А. В. Галатенко за большую помощь в подготовке статьи к опубликованию.

1. Основные понятия и задачи

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, \}$, $N_0 = \{0\} \cup N$, $N_1 = N \setminus \{1\}$. Для h из N полагаем $N_1^h = \{1, 2, \ldots, h\}$. Рассмотрим некоторое множество M и отображение $\omega\colon M^n \to M$, где M^n — n-я декартова степень множества M и $n \in N$. Пусть P_M — множество всех таких отображений ω при любых n и $\Omega \subseteq P_M$.

Рассмотрим универсальную алгебру $\mathcal{M} = (M, \Omega)$, где M называется носителем, Ω — классом операций. С каждым подмножеством $\bar{M} \subseteq M$ свяжем последовательность множеств $\bar{M}^{(i)}$, $i \in N$, следующим образом.

Положим $\bar{M}^{(1)} = \bar{M}$. Множество $\bar{M}^{(i+1)}$ состоит из всех элементов m из M, для которых найдутся ω из Ω и $m_1, m_2, \ldots, m_n$ из $\bar{M}^{(i)}$, такие что

$m = \omega(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Обозначим через $I_\Omega(\bar{M})$ множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bar{M}^{(i)}$. Нетрудно убедиться, что I_Ω является оператором замыкания на множестве $\mathcal{B}(M)$, образованном всеми подмножествами множества M. Тем самым для I_Ω всегда выполнены условия $I_\omega(\bar{M}) \supseteq \bar{M}$, $I_\omega\big(I_\omega(\bar{M})\big) = I_\omega(\bar{M})$, а также если $\bar{M} \supseteq M'$, то $I_\omega(\bar{M}) \supseteq I_\omega(M')$. Множество $I_\Omega(\bar{M})$ называется замыканием множества $\bar{M}$, а само $\bar{M}$ — порождающим множеством для $I_\Omega(\bar{M})$. Множество $\bar{M}$ называется замкнутым, если $\bar{M} = I_\Omega(\bar{M})$.

Пусть $\Sigma(\mathcal{M})$ — множество всех замкнутых подмножеств в $\mathcal{M}$. Говорят, что $\bar{M}$ выразимо через M', если $\bar{M} \subseteq I_\omega(M')$. Множество $\bar{M}$ называется полным, если $I_\Omega(\bar{M}) = M$. Полное множество называется базисом, если любое его собственное подмножество не является полным.

Основными проблемами для M, которые будут интересовать нас, являются проблемы выразимости и полноты, а также проблемы базисов, решётки замкнутых классов, модификации их и некоторые примыкающие к ним вопросы.

Под проблемой выразимости понимается указание всех пар $(\bar{M}, M')$, таких что $\bar{M}$ выразимо через M'; под проблемой полноты — указание всех полных подмножеств; под проблемой базисов — описание всех базисов, если они существуют; под проблемой решётки — построение решётки всех замкнутых классов и нахождение её свойств.

Знание решётки $\Sigma(\mathcal{M})$ даёт решение проблем выразимости и полноты. Так, проверка выразимости $\bar{M}$ через M' означает проверку равенства $I_\omega(\bar{M}) = I_\omega(M')$ Для решения проблемы полноты используется следующая схема. Систему $\Sigma' \subseteq \Sigma(\mathcal{M})$ назовём критериальной (k-системой), если любое множество $\bar{M}$ полно тогда и только тогда, когда для любого множества M' из Σ' выполнено $\bar{M} \not\subseteq M'$. Ясно, что если $\Sigma(\mathcal{M}) \setminus \{M\} \neq \varnothing$, (что далее и предполагается), то $\Sigma(\mathcal{M}) \setminus \{M\}$ является k-системой. Нетрудно убедиться, что дуальные атомы решётки $\Sigma(\mathcal{M})$, называемые также предполными классами, входят в любую k-систему. Пусть $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ — множество всех предполных классов и $\Sigma_{\bar{\pi}}(\mathcal{M})$ — множество всех классов из $\Sigma(\mathcal{M}) \setminus \{M\}$, не являющихся подмножествами ни одного предполного класса из $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$. Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 1.1. *Множество $\Sigma_\pi(\mathcal{M}) \cup \Sigma_{\bar{\pi}}(\mathcal{M})$ образует k-систему в универсальной алгебре $\mathcal{M}$.*

Особый интерес представляет ситуация, когда $\Sigma_{\bar{\pi}}(\mathcal{M})$ — пустое множество, так как в этом случае система $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ образует k-систему, что означает сведение задачи о полноте к описанию всех предполных классов. Отметим один важный случай такого рода. Универсальная алгебра $\mathcal{M}$ называется конечно порождённой, если существует конечное подмножество $M' \subseteq M$, которое является полным. Известно [13] следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Если универсальная алгебра $\mathcal{M}$ является конечно порождённой, то $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ образует k-систему.*

Отметим, что в общем случае это утверждение не является обратимым.

Рассмотрим теперь случай, когда множество M состоит из функций. Он будет для нас основным. При этом универсальная алгебра $\mathcal{M}$ будет называться функциональной системой.

Пусть E — некоторое множество и задана функция $f\colon E^n \to E$, где $n \in N$. Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ — алфавит переменных u_i со значениями в E, $i \in N$. Для записи функции f будем пользоваться выражением $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$. Класс всех таких функций обозначим через P_E. Во избежание сложных индексов у переменных u_i будем использовать для обозначения переменных метасимволы x, y, z, возможно с индексами.

Следуя А. И. Мальцеву [21], введём в P_E унарные операции η, τ, Δ, ∇ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(\eta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),\\
&(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),\\
&(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad \text{если} \quad n > 1,\\
&(\eta f) = (\tau f) = (\Delta f) = f, \quad \text{если} \quad n = 1,\\
&(\nabla f)(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Форма этих операций уточняет операции из [15].

Введём в P_E бинарную операцию $*$ следующим образом. Для функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ положим

$$(f * g)(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = f(g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}), x_2, \ldots, x_n).$$

Описанные операции называются соответственно сдвигом, транспозицией, отождествлением, расширением и подстановкой, а в совокупности — операциями суперпозиции. Множество этих операций обозначим через Ω_{c}. Пусть $M \subseteq P_E$ и $I_{\Omega_{\mathrm{c}}}(M) = M$, тогда функциональная система $\mathcal{M} = (M, \Omega_{\mathrm{c}})$ называется итеративной функциональной системой Поста.

2. Функции l-значной логики

Функции из P_E называются функциями l-значной логики, если $E = E_l = \{0, 1, 2, \ldots, l-1\}$, $l \geqslant 2$. В этом случае вместо P_E употребляется обозначение P_l. Функциональная система $\mathcal{P}_l = (P_l, \Omega_{\mathrm{c}})$ считается одной из основных моделей итеративных функциональных систем Поста, при изучении которой формировались проблематика и методы теории функциональных систем. Если $\mathcal{M} = (M, \Omega_{\mathrm{c}})$ и $M \subseteq P_l$, то $\mathcal{M}$ называем итеративной функциональной системой рода l. Кратко изложим основные итоги изучения $\mathcal{P}_l$, которые будут важны нам для рассмотрения функциональных систем автоматных функций.

Для $\mathcal{P}_2$ Э. Постом [28] дано полное решение упомянутых проблем о полноте, выразимости, базисах и решётке замкнутых классов. Опишем эту решётку, сохраняя его обозначения.

Рассмотрим множество Q классов

$$C_i,\ A_i,\ D_j,\ L_r,\ O_s,\ S_t,\ P_t,\ F_v^m,\ F_v^\infty,$$

где $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3$, $r = 1,2,3,4,5$, $s = 1,2,\ldots,9$, $t = 1,3,5,6$, $v = 1,2,\ldots,8$, $m = 1,2,\ldots$. Функции из P_2 называются функциями алгебры логики. Класс P_2 Э. Пост обозначает через C_1. Класс C_2 содержит все такие функции алгебры логики f, что $f(0,0,\ldots,0) = 0$, C_3 — все такие функции алгебры логики, что $f(1,1,\ldots,1) = 1$, $C_4 = C_2 \cap C_3$. Говорят, что функция алгебры логики f является монотонной, если всегда из неравенства $a_i \leqslant b_i$ при всех $i = 1,2,\ldots,n$ следует, что $f(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leqslant f(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. Класс A_1 состоит из всех монотонных функций алгебры логики, $A_2 = C_2 \cap A_1$, $A_3 = C_3 \cap A_1$, $A_4 = A_2 \cap A_3$. Класс D_3 состоит из всех таких функций алгебры логики f, что $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$, где функция алгебры логики $\bar{x}$ называется отрицанием и задаётся следующим образом: $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$; $D_1 = C_4 \cap D_3$, $D_2 = A_1 \cap D_3$. Класс L состоит из всех функций алгебры логики $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \alpha \pmod 2$, $L_2 = C_2 \cap L_1$, $L_3 = C_3 \cap L_1$, $L_4 = L_2 \cap L_3$, $L_5 = D_3 \cap L_1$. Класс O_9 состоит из всех функций алгебры логики, существенно зависящих не более чем от одной переменной, $O_8 = A_1 \cap O_9$, $O_4 = D_3 \cap O_9$, $O_5 = C_2 \cap O_9$, $O_6 = C_3 \cap O_9$, $O_1 = O_5 \cap O_6$, $O_7 = \{0,1\}$, $O_2 = O_5 \cap O_7$, $O_3 = O_6 \cap O_7$. Класс S_6 состоит из всех функций алгебры логики вида $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ и констант, $S_3 = C_2 \cap S_6$, $S_5 = C_3 \cap S_6$, $S_1 = S_3 \cap S_5$. Класс P_6 состоит из всех функций алгебры логики вида $x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n$ и констант, $P_5 = C_2 \cap P_6$, $P_3 = C_3 \cap P_6$, $P_1 = P_3 \cap P_5$. Говорят, что функция алгебры логики удовлетворяет условию a^μ, если любые μ наборов, на которых она равна 0, имеют общую координату 0. Аналогично с заменой 0 на 1 определяется свойство A^μ. Класс F_4^μ состоит из всех функций алгебры логики со свойством a^μ, $F_1^\mu = C_4 \cap F_4^\mu$, $F_3^\mu = A_1 \cap F_4^\mu$, $F_2^\mu = F_1^\mu \cap F_3^\mu$. Класс F_8^μ состоит из всех функций алгебры логики со свойством A^μ, $F_5^\mu = C_4 \cap F_8^\mu$, $F_7^\mu = A_3 \cap F_8^\mu$, $F_6^\mu = F_5^\mu \cap F_7^\mu$. Функция алгебры логики удовлетворяет условию a^∞, если все наборы, на которых она равна 0, имеют общую координату 0. Аналогично с заменой 0 на 1 вводится свойство A^∞. Класс F_4^∞ состоит из всех функций алгебры логики со свойством a^∞, $F_1^\infty = C_4 \cap F_4^\infty$, $F_3^\infty = A_1 \cap F_4^\infty$, $F_2^\infty = F_1^\infty \cap F_3^\infty$. Класс F_8^∞ состоит из всех функций алгебры логики со свойством A^∞, $F_5^\infty = C_4 \cap F_8^\infty$, $F_7^\infty = A_3 \cap F_8^\infty$, $F_6^\infty = F_5^\infty \cap F_7^\infty$.

Теорема 2.1 [28]. *Для итеративной функциональной системы $\mathcal{P}_2$ справедливы следующие утверждения*:

а) *множество всех замкнутых классов в $\mathcal{P}_2$ счётно и совпадает с множеством Q*;

б) *классы из Q образуют решётку по включению, приведённую на рис.* 1;

в) *в каждом замкнутом классе в $\mathcal{P}_2$, кроме O_1, O_2 и O_3, предполные классы образуют k-систему, в ней не более пяти элементов*;

г) *каждый замкнутый класс в $\mathcal{P}_2$ имеет базис, его мощность всегда не более чем* 4;

д) *проблемы полноты и выразимости для итеративной функциональной системы рода 2 применительно к конечным множествам функций алгебры логики алгоритмически разрешимы.*

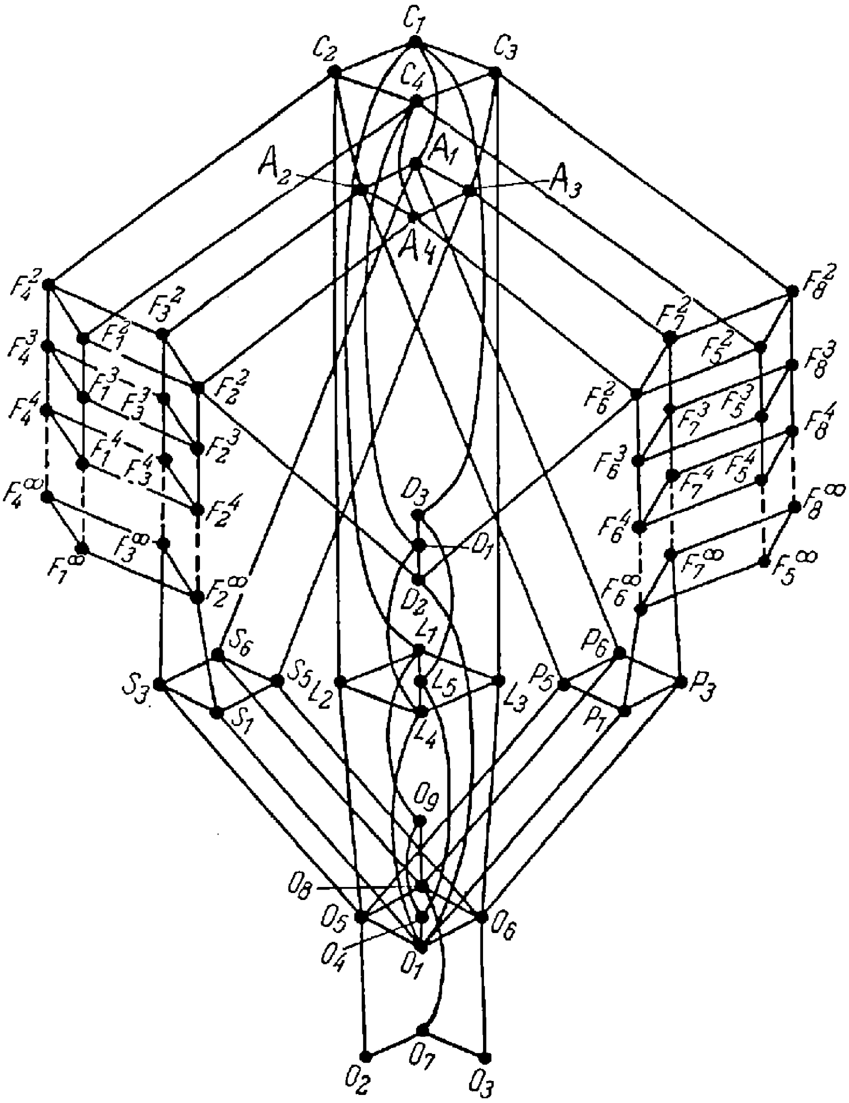

Рис. 1

Теорема 2.2. *Структура по включению классов из Q имеет вид, указанный на рис.* 1.

В этой структуре два класса R и R', такие что $R \supset R'$ и нет класса R'', отличного от R и R', для которого выполнено условие $R \supset R'' \supset R'$, соединяются отрезком, причём R располагается выше R'.

Свойства итеративной функциональной системы рода l при $l > 2$ оказались много сложнее, как показывают приводимые ниже утверждения.

Обозначим через $P_l^{(n)}$ множество всех функций из P_l, зависящих не более чем от n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Ясно, что число $p_l^{(n)}$ функций в $P_l^{(n)}$ равно $\sum\limits_{i=1}^{n} C_n^i l^{l^i}$. Пусть S_l^n — множество всех функций из $P_l^{(n)}$, каждая из которых при некотором i, $i = 1, 2, \ldots, n$, равна u_i. Если $M \subseteq P_l$ и M конечно, то через $\alpha(M)$ обозначим наибольшее число переменных у функций из M.

Для конечно порождённой итеративной функциональной системы $\mathcal{M}$ рода l пусть $\alpha(M)$ — наименьшее число α', такое что для некоторого $M' \subseteq M$ выполнено $I_{\Omega_c}(M') = M$ и $\alpha(M') = \alpha'$. Назовём непустое множество $M' \subseteq P_l^{\alpha(M)} \cap M$ R-множеством в $\mathcal{M}$, если $I_{\Omega_c}(M') \cap P_l^{\alpha(M)} = M'$ и $M' \neq P_l^{\alpha(M)} \cap M$, и обозначим его через $R^{\alpha(M)}$. Пусть $\mathcal{R}^{\alpha(M)} = \bigl(R^{\alpha(M)} \cup S_l^{\alpha(M)}, R^{\alpha(M)}\bigr)$. Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_l сохраняет $\mathcal{R}^{\alpha(M)}$, если для любого набора функций $g_1, g_2, \ldots, g_n$ из $R^{\alpha(M)} \cup S_l^{\alpha(M)}$ будет выполнено $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in R^{\alpha(M)}$. Класс всех функций из M, сохраняющих $\mathcal{R}^{\alpha(M)}$, обозначим через $U\bigl(\mathcal{R}^{\alpha(M)}\bigr)$. Назовём R-множество $R^{\alpha(M)}$ максимальным, если не существует такого R-множества $R_1^{\alpha(M)}$, что $U\bigl(\mathcal{R}_1^{\alpha(M)}\bigr) \supsetneq U\bigl(\mathcal{R}^{\alpha(M)}\bigr)$.

Пусть $\mathbb{R}(M)$ — множество всех максимальных R-множеств, $\mathbb{R}_k(M)$ — множество всех пар $\mathcal{R}^{\alpha(M)}$, для которых $R^{\alpha(M)} \in \mathbb{R}(M)$, и $U\bigl(\mathbb{R}(M)\bigr)$ — множество всех классов сохранения элементов из $\mathbb{R}(M)$. Назовём итеративную функциональную систему $\mathcal{M}$ тривиальной, если $M = I_{\Omega_c}(S_k^1)$ или $M = I_{\Omega_c}(\{c(x)\})$, где $c(x) = c$, $c \in E_l$. Мощность множества A обозначим через $|A|$.

Теорема 2.3 [17]. *Если итеративная функциональная система $\mathcal{M} = (M, \Omega_c)$ рода l нетривиальная и конечно порождённая, то справедливы следующие утверждения*:

а) $U\bigl(\mathbb{R}(\mathcal{M})\bigr) = \Sigma_\pi(\mathcal{M})$;

б) $\bigl|U\bigl(\mathbb{R}(\mathcal{M})\bigr)\bigr| \leqslant 2^{P_l(\alpha(M))}$;

в) $\mathbb{R}(M)$ *строится эффективно.*

Эта теорема является развитием утверждения А. В. Кузнецова из [25].

Следствие. *Проблема полноты для конечно порождённых итеративной функциональной системы рода l алгоритмически разрешима для любого l.*

Теорема 2.4 [17]. *Проблема выразимости для конечных множеств конечно порождённой итеративной функциональной системы рода l алгоритмически разрешима для любого l.*

Теорема 2.5 [27]. *Для каждого $l \geqslant 3$ существует итеративная функциональная система рода l со следующими свойствами*:

а) *итеративная функциональная система имеет счётный базис*;
б) *итеративная функциональная система имеет базис заданной конечной мощности*;
в) *итеративная функциональная система не имеет базиса.*

Следствие [27]. *Для каждого $l \geqslant 3$ структура замкнутых классов в итеративной функциональной системе $\mathcal{P}_l$ континуальна.*

Как установлено в [25], итеративная функциональная система $\mathcal{P}_l$ является конечно порождённой, поэтому для неё справедливы теоремы 2.3 и 2.4. В [29] найдено явное описание множества $U\big(\mathbb{R}(\mathcal{P}_l)\big)$. Нам удобнее привести его в предикатной форме.

Пусть $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — h-местный предикат, аргументы которого принимают значения из E_l. Если $\rho(a_1, a_2, \ldots, a_h) = a$, то при $a = 1$ набор называем истинным, а при $a = 0$ — ложным. Множество всех истинных наборов обозначим через ρ_1, а ложных — через ρ_0. Говорим, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_l сохраняет ρ, если из истинности каждого элемента строки

$$\rho(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_h^1), \rho(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_h^2), \ldots, \rho(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_h^n)$$

вытекает истинность

$$\rho\big(f(a_1^1, a_2^2, \ldots, a_h^n), f(a_1^1, a_2^2, \ldots, a_h^n), \ldots, f(a_1^1, a_2^2, \ldots, a_h^n)\big).$$

Множество M функций из P_l сохраняет ρ, если каждая функция из M сохраняет ρ. Класс всех функций, сохраняющих ρ, обозначим через $U(\rho)$. Опишем шесть специальных семейств предикатов.

Семейство P. Пусть область истинности предиката $\rho(y_1, y_2)$ является графиком подстановки $\sigma(x)$ из P_l, разлагающейся в произведение циклов одинаковой простой длины p, $p \geqslant 2$. P состоит в точности из всех таких предикатов.

Семейство E. Пусть $E_l = E^1 \cup E^2 \cup \ldots \cup E^t$, где $1 < t < l$, $E^i \cap E^j = \varnothing$ при $i \neq j$. Рассмотрим предикат $\rho(y_1, y_2)$, истинный в точности на тех наборах, для которых при некотором i имеет место $a, b \in E^i$. E состоит в точности из всех таких предикатов для указанных разбиений.

Семейство $\mathcal{L}$. Пусть $l = p^m$, где p — простое число, $G = \langle E_l, + \rangle$ — абелева группа, в которой каждый ненулевой элемент имеет порядок p, т. е. G является элементарной p-группой.

При $p = 2$ рассмотрим предикат $\rho_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$, истинный в точности на тех наборах, для которых выполнено равенство $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$. В этом случае $\mathcal{L}$ состоит в точности из тех предикатов ρ_G, которые соответствуют всем указанным элементарным 2-группам G.

При $p \neq 2$ рассмотрим предикат $\rho_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$, истинный в точности на тех наборах, для которых $y_3 = 2^{-1}(y_1 + y_2)$, где 2^{-1} — такое число из E_p, для которого $2 \cdot 2^{-1} \equiv 1 \pmod p$. В этом случае $\mathcal{L}$ состоит в точности из тех предикатов ρ_G, которые соответствуют всем указанным элементарным p-группам.

Семейство B. Пусть h, m — натуральные числа, такие что $h \geqslant 3$, $m \geqslant 1$, $h^m \leqslant l$, а $\varphi(x)$ — произвольное отображение E_l на E_{h^m}. Пусть $a \in E_{h^m}$. Обозначим через $[a]_l$ l-й коэффициент в разложении

$$a = \sum_{l=0}^{m-1} [a]_l h^l, \quad \text{где} \quad [a]_l \in E_{h^m}.$$

Рассмотрим предикат $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, истинный в точности на тех наборах, для которых набор $([\varphi(a_1)]_l, [\varphi(a_2)]_l, \ldots, [\varphi(a_h)]_l)$ является неразнозначным при любых l из E_m, т. е. ρ определяется тройкой (h, m, φ); при этом если $\varphi(x) = x$, то ρ называется элементарным. Семейство B состоит в точности из предикатов ρ, определяемых всеми указанными тройками (h, m, φ).

Семейство Z. Предикат $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$, $h \geqslant 1$, называется рефлексивным, если из неразнозначности набора значений переменных следует его истинность, и является симметричным, если для любой подстановки $t(u)$ чисел $1, 2, \ldots, h$ имеет место равенство

$$\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h) = \rho\big(y_{t(1)}, y_{t(2)}, \ldots, y_{t(h)}\big).$$

Непустое множество всех элементов c из E_l, таких что для всех значений переменных выполнено $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_{h-1}, c) = 1$, называется центром симметричного предиката ρ. Предикат ρ называется центральным, если он симметричен, рефлексивен и имеет такой центр C, что $C \subset E_l$. Семейство Z состоит в точности из всех центральных предикатов $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$, где $1 \leqslant h \leqslant l-1$.

Семейство M. Частичный порядок на множестве E_l с одним наибольшим и одним наименьшим элементами можно задать бинарным предикатом $\rho(y_1, y_2)$. Семейство M состоит в точности из всех таких предикатов.

Пусть

$$W = P \cup E \cup \mathcal{L} \cup B \cup Z \cup M$$

и $U(W)$ состоит из всех классов сохранения предикатов из W.

Теорема 2.6. *Имеют место следующие соотношения*:

а) $U(W) = \Sigma_\pi(\mathcal{P}_l)$;

б) $|U(W)| \sim l(l \pmod 2) + 1) \cdot 2^{C_{l-1}^{[\frac{l-1}{2}]}}$ *при* $l \to \infty$.

Часть а) этого утверждения постепенно определялась в [11, 19, 20, 22, 23, 26, 28, 29], заключительная работа проведена в [29]. Часть б) установлена в [12].

Резкое отличие свойств $\mathcal{P}_l$ при $l = 2$ и $l > 2$ привело к рассмотрению разных вариаций основных задач для итеративной функциональной системы, таких как исследование на полноту систем функций с заданными свойствами, например систем Слупецкого, содержащих все одноместные функции; изучение строения фрагментов решётки замкнутых классов и др. Кроме того, изучались обобщения $\mathcal{P}_l$ в виде итеративной функциональной системы неоднородных функций, т. е. функций, зависящих от разных групп переменных, области определения которых различны [17], а также функций, переменные которых, как и сами функции, принимают счётное число значений.

3. Неоднородные функции

Модификацией l-значных логик является итеративная функциональная система $\mathcal{P}_\Sigma = (P_\Sigma, \Omega)$. Определим класс P_Σ. Пусть $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$, где $\Sigma_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$, $\Sigma_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$, $A_i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{r_i}^i\}$, $B_j = \{b_1^j, b_2^j, \ldots, b_{r_j}^j\}$, $A_i \neq A_k$, $B_j \neq B_l$ при $i \neq k$ и $j \neq l$, и пусть $X_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i, \ldots\}$, $1 \leqslant i$, $k \leqslant s$, $1 \leqslant j$, $l \leqslant t$. Множество X_i состоит из переменных, принимающих значения из A_i. Пусть $P_\Sigma^{B_j}$ — множество всех функций

$$f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{n_s}^s),$$

принимающих значения из B_j. Обозначим через P_Σ множество $\bigcup\limits_{j=1}^{t} P_\Sigma^{B_j}$, элементы которого называются неоднородными функциями. Операции, образующие множество Ω, являются естественными обобщениями операций η, τ, Δ, ∇, $*$ l-значной логики. Множество значений функции g обозначим $\hat{g}$.

Каждая из операций O, $O \in \{\eta, \tau, \nabla, \Delta\}$, заменяется набором операций $O_1, O_2, \ldots, O_s$ таким образом, что операция O_i действует как операция O на множестве переменных X_i функции f. Операция $*$ также заменяется на набор операций $*_{ij}$ таким образом, что для функций

$$f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{n_s}^s)$$

и

$$g(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{m_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{m_s}^s)$$

применимость операции $*_{ij}$ означает, что $g \in P_\Sigma^{B_j}$, $\hat{g} \subseteq A_i$. Результатом применения операции $*_{ij}$ к функциям f и g является функция

$$\begin{aligned} &h(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{m_1+n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{m_2+n_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{m_s+n_s}^s) = \\ &\quad = f(x_{m_1+1}^1, x_{m_1+2}^1, \ldots, x_{m_1+n_1}^1, \ldots, x_{m_{i-1}+1}^{i-1}, x_{m_{i-1}+2}^{i-1}, \ldots, x_{m_{i-1}+n_{i-1}}^{i-1}, \\ &\qquad g(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{m_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{m_s}^s), \\ &\qquad x_{m_i+1}^i, \ldots, x_{m_i+n_i-1}^i, x_{m_i+1}^{i+1}, x_{m_i+2}^{i+1}, \ldots, x_{m_{i+1}+n_{i+1}}^{i+1}, \ldots, \\ &\qquad x_{m_s+1}^s, x_{m_s+2}^s, \ldots, x_{m_s+n_s}^s). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Sigma = \langle P_\Sigma, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s, \\ \nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_s, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s, *_{11}, *_{12}, \ldots, *_{st}\rangle. \end{aligned}$$

Операции в $\mathcal{P}_\Sigma$ по аналогии с l-значными логиками будем называть операциями суперпозиции. Естественно далее считать, что для $\mathcal{P}_\Sigma$ выполнены условия $|A_i| > 1$, $|B_j| > 1$, $B_j \not\subseteq B_l$ при любых i, j, l, таких что $j \neq l$. По аналогии с l-значной логикой введём понятия замыкания, замкнутого, предполного и полного множеств в $\mathcal{P}_\Sigma$, обозначая соответствующий оператор замыкания J_{Ω_c}.

Теорема 3.1. *Множество предполных классов в $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно и строится эффективно.*

Теорема 3.2. *Существует алгоритм, который для любой функциональной системы $\mathcal{P}_\Sigma$ и любого конечного множества $M \subseteq P_\Sigma$ устанавливает, полно ли множество M в $\mathcal{P}_\Sigma$.*

Теорема 3.3.

1. *Функциональная система $\mathcal{P}_\Sigma$ правильная тогда и только тогда, когда существуют A_i в Σ_1 и B_j в Σ_2, такие что $|A_i \cap B_j| \geqslant 2$.*
2. *Функциональная система $\mathcal{P}_\Sigma$ содержит предполные классы и замкнутые классы, отличные от P_Σ и не содержащиеся ни в одном предполном классе, тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ справедливо неравенство $|A_i \cap B_j| \leqslant 1$ и существуют такие $A_{i'} \in \Sigma_1$ и $B_{j'} \in \Sigma_2$, что $|A_{i'} \cap B_{j'}| = 1$.*
3. *Функциональная система $\mathcal{P}_\Sigma$ не содержит предполных классов тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ имеет место $A_i \cap B_j = \varnothing$.*

Теорема 3.4. *Функциональная система $\mathcal{P}_\Sigma$ является конечно порождённой тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ правильная.*

Полное множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется базисом, если любое его собственное подмножество не полно.

Теорема 3.5. *Функциональная система $\mathcal{P}_\Sigma$ имеет базис тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ является конечно порождённой.*

Теорема 3.6. *Минимальная мощность базиса в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна $|\Sigma_2|$.*

Теорема 3.7. *Мощность множества замкнутых классов в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна континууму тогда и только тогда, когда $\Sigma \neq (\{\{a,b\}\}, \{\{a,b\}\})$, где $a \neq b$.*

Замкнутое множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется открыто-замкнутым, если его дополнение замкнуто. По определению считаем пустое множество также замкнутым. Опишем все открыто-замкнутые множества в $\mathcal{P}_\Sigma$. На множестве Σ_2 введём такое отношение эквивалентности R, что $B_j \, R \, B_{j'}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_l}$ элементов B_{j_u} из Σ_2, такая что $B_{j_1} \cap B_j \neq \varnothing$, $B_{j_l} \cap B_{j'} \neq \varnothing$ и для любого p, $1 \leqslant p \leqslant l-1$, справедливо $B_{j_p} \cap B_{j_{p+1}} \neq \varnothing$. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_q$ — соответствующие классы эквивалентности. Если $f \in P_\Sigma$, то через K_f обозначим множество всех таких функций g из P_Σ, что при помощи только отождествления и переименования переменных из g может быть получена функция f. Пусть $C = \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{s}\Big) \cap \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{t}\Big)$. Элементы непустого множества C назовём абсолютными константами. Пусть Q — множество всех таких функций f из P_Σ, которые зависят только от переменных $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s$, пусть $Q' \subseteq Q$, $C' \subseteq C$ и каждое множество A_i содержит не более одной абсолютной константы. Обозначим через $C'(Q')$ множество всех функций из Q, которые получаются из функций множества Q' путём обязательной подстановки всех абсолютных констант из C' вместо всех возможных переменных.

Если $Q'' \subseteq C'(Q)$, то через $(C')^{-1}(Q'')$ обозначим множество всех тех функций f из Q, для которых $C'(\{f\}) \subseteq Q''$ (вместо $C'(\{f\})$ будем использовать обозначение $C'(f)$, понимая под этим функцию, из которой состоит множество $C'(\{f\})$). В случае когда $C' = \varnothing$, по определению полагаем $C'(Q') = Q' = (C')^{-1}(Q')$.

Теорема 3.8. *Множество $M \subseteq P_\Sigma$ является открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

а) *если каждое множество A_i содержит не более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $S \subseteq C(Q)$ справедливо $M = \bigcup\limits_{f \in C^{-1}(S)} K_f$;*

б) *если некоторое множество A_i содержит более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $T \subseteq \{1, 2, \ldots, q\}$ справедливо $M = \bigcup\limits_{r \in T} \bigcup\limits_{B_j \in E_r} P_\Sigma^{B_j}$.*

Теорема 3.9. *Проблема полноты для итеративной функциональной системы $\mathcal{P}_\Sigma$ алгоритмически разрешима.*

Указанные результаты получены в [17], там же решены задачи о полноте для $\mathcal{P}_\Sigma$ при малых мощностях множеств Σ_1 и Σ_2.

4. Функции с задержками

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_l$ и $t \in N_0$. Пару $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$ называем функцией f с задержкой t и множество всех таких пар обозначаем через $\tilde{P}_l$. Распространим на $\tilde{P}_l$ операции η, τ, Δ и ∇, полагая $\mu\big((f,t)\big) = (\mu(f), t)$, где μ — любая из этих операций. Введём ещё одну операцию $*_\text{c}$, называемую синхронной подстановкой. Для пар

$$(f, t),\ (f_1, t'),\ (f_2, t'), \ldots, (f_n, t'),$$

в которых множества переменных у функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ попарно не пересекаются, положим

$$(f, t) *_\text{c} \big((f_1, t'), (f_2, t'), \ldots, (f_n, t')\big) = (f(f_1, f_2, \ldots, f_n), t + t').$$

Множество операций η, τ, Δ, ∇, $*_\text{c}$ обозначим через $\Omega_\text{сс}$ и назовём эти операции операциями синхронной суперпозиции. Пусть $M \subseteq \tilde{P}_l$ и $J_{\Omega_\text{сс}}(M) = M$. Тогда функциональную систему $\mathcal{M} = (M, \Omega_\text{сс})$ называем итеративной функциональной системой Поста функций с задержками рода l.

Кратко изложим основные итоги изучения этих функциональных систем [16, 17].

Теорема 4.1. *В конечно порождённой итеративной функциональной системе $\mathcal{M}$ функций с задержками рода l множество $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ строится эффективно для любого l.*

Теорема 4.2. *Для конечно порождённой итеративной функциональной системы функций с задержками рода l проблемы полноты и выразимости алгоритмически разрешимы для любого l.*

Теорема 4.3. *Для каждого l из N_1 существуют итеративная функциональная система функций с задержками рода l, для которой выполнены следующие условия*:

а) *имеется счётный базис*;

б) *имеется конечный базис заданной мощности*;

в) *не имеется базиса.*

Следствие. *Решётка замкнутых классов в $\tilde{\mathcal{P}}_l$ континуальна для всех l.*

Примером конечно порождённой итеративной функциональной системы функций с задержками является $\tilde{\mathcal{P}}_l = (\tilde{P}_l, \Omega_{\text{сс}})$.

Для $\tilde{\mathcal{P}}_l$ теорема 4.1 уточняется следующим образом. Обозначим через $M^{(1)}$ множество всех таких функций f, что при некотором t выполнено $(f,t) \in M$.

Теорема 4.4. *Множество $M \subseteq \tilde{P}_l$ является полным в $\tilde{\mathcal{P}}_l$ тогда и только тогда, когда $J_{\Omega_{\text{с}}}\bigl(M^{(1)}\bigr) = P_l$ и $M \supseteq \{(f,1)\}$, где $f \notin E_l$.*

Пусть $\mathcal{M} = (M, \Omega_{\text{сс}})$ и $M' \subseteq M$. Говорят, что множество M' является слабо полным в M, если для всякой функции f из $M^{(1)}$ найдётся t, такое что $(f,t) \in J_{\Omega_{\text{сс}}}(M')$. Множество M' называется слабо предполным, если оно не слабо полное, но превращается в таковое при добавлении любой пары из $M \setminus M'$. Класс всех таких множеств обозначим через $\Sigma_{\text{с}\pi}(\mathcal{M})$. Класс $K \subseteq \Sigma(\mathcal{M})$ называем слабо критериальным, если множество M' является слабо полным тогда и только тогда, когда для любого T из $\Sigma(\mathcal{M})$ выполнено $M' \nsubseteq T$. Очевидно, для слабо критериальной системы K всегда выполнено $K \supseteq \Sigma_{\text{с}\pi}(\mathcal{M})$.

Теорема 4.5. *Для конечно порождённой итеративной функциональной системы $\mathcal{M} = (M, \Omega_{\text{сс}})$ функций с задержками рода l выполнены следующие утверждения*:

а) *множество $\Sigma_{\text{с}\pi}(\mathcal{M})$ конечно или счётно*;

б) *множество $\Sigma_{\text{с}\pi}(\mathcal{M})$ слабо критериально*;

в) *множество $\Sigma_{\text{с}\pi}(\mathcal{M})$ строится эффективно.*

Теорема 4.6. *Для конечно порождённых итеративных функциональных систем функций с задержками рода l проблема слабой полноты алгоритмически разрешима для любого l.*

Явное описание множества $\Sigma_{\text{с}\pi}(M)$ получено для $l = 2$ и много позже для $l = 3$ [16, 30]. Приведём описание случая $l = 2$.

Пусть $M \subseteq P_2$ и $M \in \{C_2, C_3, D_3, A_1, L_1\}$. Обозначим через $\tilde{M}$ множество всех таких пар (f,t), что $f \in M$ и $t \in N_0$.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_2 называется α-, β-, γ- или δ-функцией, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна x, 1, 0 или $\bar{x}$ соответственно. Пусть A, B, Γ, D — классы всех α-, β-, γ-, δ-функций соответственно.

Обозначим через $\tilde{C}$ множество всех пар вида $(f, t+1)$, $(\varphi, t+1)$, $(\psi, 0)$, где $f \in B$, $\varphi \in \Gamma$, $\psi \in A$, $t \in N_0$.

Пусть $i \in \{0,1\}$. Обозначим через E_i множество всех пар вида $(f, 0)$, $(\bar{i}, t+1)$, (i, t), где $f \in C_{i+2}$, $t \in N_0$.

Назовём функцию f чётной, если выполнено равенство $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Пусть Y — множество всех чётных функций.

Пусть $\tilde{H}$ — множество всех пар вида $(f, 0)$, $(\varphi, t+1)$, где $\varphi \in Y$, $f \in S$, $t \in N_0$.

Для каждого r из N_0 обозначим через $\tilde{W}_r$ множество пар вида $(f, (2t+1)2^r)$, $(\varphi, (2t+1)2^s)$, $(\psi, 0)$, где $f \in D$, $\varphi \in A$, $\psi \in A$, $t \in N_0$, $s \in N_0 \setminus \{0, 1, 2, \ldots, r\}$.

Для каждого r из N_0 обозначим через $\tilde{Z}_r$ множество пар вида $(f, (2t+1)2^r)$, $(0, t)$, $(1, t)$, $(\varphi, (2t+1)2^s)$, $(\psi, 0)$, где $\bar{f} \in M$, $\varphi \in M$, $\psi \in M$, $t \in N_0$, $s \in N_0 \setminus \{0, 1, 2, \ldots, r\}$.

Пусть

$$\tilde{W} = \{\tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{D}_3, \tilde{A}_1, \tilde{L}_1, \tilde{C}, \tilde{E}_0, \tilde{E}_1, \tilde{H}, \tilde{Z}_0, \tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \ldots\}.$$

Теорема 4.7 [16]. *Имеет место равенство* $\Sigma_{\text{с}\pi}(\tilde{\mathcal{P}}_2) = \tilde{W}$.

Заметим, что явное описание $\Sigma_{\text{с}\pi}(\tilde{\mathcal{P}}_l)$ для любого l имеется пока лишь в виде отдельных семейств слабо предполных классов [2, 17].

Содержательный интерес представляют другие модификации проблемы полноты для итеративной функциональной системы функций с задержками, рассмотренные в [17].

5. Автоматные функции

Рассмотренное в предыдущем разделе обобщение функций l-значной логики до функций с задержками является промежуточным при переходе к классу автоматных функций, свойства которого логически выглядят существенно сложнее, чем у функций с задержками. Для введения понятия автоматной функции потребуются вспомогательные обозначения и определения.

Пусть C — конечное или счётное множество, которое будем называть алфавитом. Последовательность букв из C будем называть словом, если она конечна, и сверхсловом, если она бесконечна. Класс всех слов обозначим через C^*, а класс сверхслов — через C^ω. Пусть $\bar{C} = C^* \cup C^\omega$ и $\xi \in \bar{C}$. Слово, образованное первыми r буквами ξ, будем называть префиксом ξ и обозначать через $\xi]_r$. Пусть A и B — алфавиты и $f\colon A^* \to B^*$. Если $\xi = c(1)c(2)\ldots c(r)$, то r будем называть длиной слова ξ и обозначать через $\|\xi\|$. Функцию f назовём детерминированной, если для любого ξ из A справедливо $\|f(\xi)\| = \|\xi\|$, а для любых ξ_1 и ξ_2 из A^* и любого i, такого что $1 \leqslant i \leqslant \min(\|\xi_1\|, \|\xi_2\|)$, если $\xi_1]_i = \xi_2]_i$, то $f(\xi_1)]_i = f(\xi_2)]_i$.

Известно, что детерминированная функция f может быть рекуррентно задана с помощью так называемых канонических уравнений вида

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi\big(q(t), a(t)\big), \\ b(t) = \psi\big(q(t), a(t)\big), \quad t = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

где параметр q называется состоянием f и принимает значения из алфавита Q. Эта рекуррентность определяется следующим образом. Если $\alpha \in A^*$, $\beta \in B^*$, $\varkappa \in Q^*$ и $\alpha = a(1)a(2)\ldots a(r)$, $\beta = b(1)b(2)\ldots b(r)$, $\varkappa = q(1)q(2)\ldots q(r)$, то при $f(\alpha) = \beta$ слово β индуктивно вычисляется по α следующим образом:

а) $b(1) = \psi\big(q(1), a(1)\big)$, где $q(1) = q_0$;

б) если при $1 \leqslant t \leqslant r-1$ вычислено $q(t)$, то $q(t+1) = \varphi\big(q(t), a(t)\big)$ и $b(t) = \psi\big(q(t), a(t)\big)$.

Часто предполагают, что алфавиты A и B являются декартовыми степенями E_l, т. е. $A = (E_l)^n$ и $B = (E_l)^m$, где $n, m, p \in N$. В этом случае от рассмотрения одноместной детерминированной функции

$$f(x)\colon \big((E_l)^n\big)^* \to \big((E_l)^m\big)^*$$

удобно перейти к n-местной детерминированной функции

$$f'(x_1, x_2, \ldots, x_n)\colon \big((E_l)^*\big)^n \to \big((E_l)^*\big)^m$$

следующим образом.

Пусть $\zeta^n \in (E_k^*)$ и $f(\zeta^n) = \zeta'^m$, где $\zeta^n = c^n(1)c^n(2)\ldots c^n(r)$ и $\zeta'^m = c'^m(1)c'^m(2)\ldots c'^m(r)$; при этом $c^n(t) = \big(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t)\big)$ и $c'^m(t) = \big(e'_1(t), e'_2(t), \ldots, e'_m(t)\big)$, где $1 \leqslant t \leqslant r$. Пусть $\zeta_i = e_i(1)e_i(2)\ldots e_i(r)$ и $\zeta'_j = e'_j(1)e'_j(2)\ldots e'_j(r)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$. Положим $f'(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = (\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_m)$. Функция f' получается из f фактически только за счёт перехода от рассмотрения матриц, образованных вектор-буквами (строками) слов ζ^n (и соответственно слов ζ'_m) к их представлению в виде столбцов. Канонические уравнения (2) для f' получаются из (1) заменой всех параметров на соответствующие векторные значения:

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi\big(q(t), e_1(t), \ldots, e_n(t)\big), \\ b_j(t) = \psi\big(q(t), e_1(t), \ldots, e_n(t)\big), \quad t = 1, 2, \ldots, \; j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{2}$$

Функцию f' будем считать интерпретацией f и называть автоматной.

Параметры n и m назовём соответственно местностью и размерностью автоматной функции, а мощность множества значений параметра q — числом её состояний. Содержательным толкованием автоматной функции $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ является функционирование технического устройства F указанного на рис. 2 вида. Здесь входные стрелки обозначены буквами x_i, а выходные — буквами y_j. Считается, что F функционирует в дискретные моменты времени $t = 1, 2, \ldots$. В эти моменты входы x_i и выходы y_j могут принимать значения из E_l; само же устройство может находиться в состояниях, кодируемых значениями из Q, называемых также памятью F. По

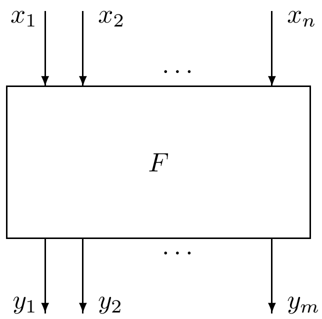

Рис. 2

набору значений входов и состоянию в момент t устройства F по правилам (2) определяют значения его выходов и состояние в момент $t+1$.

Обозначим через $P_{a,l}^{n,m}$ класс всех автоматных функций с заданными параметрами n и m из N. Пусть

$$P_{a,l} = \bigcup_{n,m\geqslant 1} P_{a,l}^{n,m}.$$

Распространим на $P_{a,l}$ операции η, τ, Δ, ∇, а также введём другие операции.

Пусть $f'(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_m)$. Тогда

$$(\pi_j f')(x_1, x_2, \dots, x_n) = f'_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $f'_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ совпадает со значением y_j в $f'(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть $f''(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+v}) = (y_{m+1}, \dots, y_{m+w})$. Тогда

$$\begin{aligned}(f' \,\sigma\, f'')(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+v}) &= \\ = \big(f'(x_1, x_2, \dots, x_n), f''(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+v})\big) &= \\ = (y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+w}).&\end{aligned}$$

Пусть u такое, что $m+1 \leqslant u \leqslant m+u$. Тогда

$$\big(f' *_u f''(x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+v}\big) = (z_1, z_2, \dots, z_{m+w-1}),$$

где $z_j = f'_j * f''_u$ при $j = 1, 2, \dots, m$ и $z_{j'} = f''_{j'}(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+v})$ при $j' = m+2, m+3, \dots, m+t$.

Операции π и σ называются соответственно проектированием и объединением, а операция вида $*_u$ является распространением операции $*$ с одномерного случая функций на вектор-функции и по-прежнему называется подстановкой.

В совокупности операции η, τ, Δ, ∇, π, σ и $*_u$ называем операциями расширенной суперпозиции и обозначаем через $\Omega_{\text{рс}}$.

Введём ещё одну операцию над автоматными функциями, которую назовём обратной связью и обозначим через O.

Будем говорить, что автоматная функция f' имеет тип $i-j$, если для f' найдётся система вида (2), такая что функция $\psi_j(q, e_1, e_2, \dots, e_n)$ фиктивно зависит от значений e_i. Пусть f' — такая автоматная функция. Рассмотрим функцию вида

$$(\mathrm{O}_j^i f')(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m),$$

которая определяется следующим образом. Пусть заданы слова вида

$$\xi_l = e_l(1)e_l(2)\ldots e_l(r),$$

где $l = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Тогда с помощью (2) по набору

$$\big(e_l(1), e_2(1), \ldots, e_{i-1}(1), e_{i+1}(1), \ldots, e_n(1)\big)$$

можно вычислить значение $b_j(1)$. Подставим теперь в (2) вместо $e_i(1)$ значение $b_j(1)$, после чего можно вычислить наборы $\big(q(2)\big)$ и $\big(b_1(1), b_2(1), \ldots, b_m(1)\big)$. Далее можно по набору

$$\big(e_1(2), e_2(2), \ldots, e_{i-1}(2), e_{i+1}(2), \ldots, e_n(2)\big)$$

вычислить значение $b_j(2)$. Далее, подставив значение $b_j(2)$ вместо $e_i(2)$ в (2), можно вычислить наборы $\big(q(3)\big)$ и $\big(b_1(2), b_2(2), \ldots, b_m(2)\big)$ и т. д.

Теперь полагаем

$$(\mathrm{O}_j^i f')(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+2}, \ldots, \zeta_n) = (\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_{i-1}', \zeta_{i+2}', \ldots, \zeta_m'),$$

где $\zeta_{l'}' = b_{l'}(1)b_{l'}(2)\ldots b_{l'}(r)$ и $l' = 1, 2, \ldots, j-1, j+2, \ldots, m$. Положим $\Omega_{\text{рс},\mathrm{O}} = \Omega_{\text{рс}} \cup \{\mathrm{O}\}$. Класс операций $\Omega_{c,\mathrm{O}}$ называется композицией.

Будем говорить, что автоматная функция f' из $P_{a,l}$ является конечно автоматной, если алфавит Q некоторой системы (2), задающей эту функцию, конечен. Класс всех конечно автоматных функций с параметрами n и m обозначим через $P_{a,l,k}^{n,m}$. Полагаем далее, что

$$P_{a,l,k} = \bigcup_{n,m\geqslant 1} P_{a,l,k}^{n,m}.$$

Будем говорить, что автоматная функция является истинностной, если в системе (2), задающей её, алфавит Q одноэлементный. Обозначим через $P_{a,l,\text{и}}^{n,m}$ и $P_{a,l,k,\text{и}}^{n,m}$ соответственно классы всех истинностных автоматных функций и истинностных конечно автоматных функций с параметрами n и m. Положим

$$P_{a,l,\text{и}} = \bigcup_{n,m\geqslant 1} P_{a,l,\text{и}}^{n,m}, \quad P_{a,l,k,\text{и}} = \bigcup_{n,m\geqslant 1} P_{a,l,k,\text{и}}^{n,m}.$$

Содержательно истинностные автоматные функции интерпретируются, с одной стороны, как функционирование устройства F без памяти, а с другой стороны, они могут считаться реализациями функций из P_l с учётом времени t, которое пробегает значения $1, 2, \ldots$, причём в каждый момент времени зависимость значения функции от значений переменных одна и та же.

Таким образом, итеративная функциональная система $(P_l, \Omega_\text{с})$ при расширении в ней объекта P_l до множества вектор-функций l-значной логики и расширении множества операций до $\Omega_{\text{рс}}$ фактически становится истинностной функциональной системой $\mathcal{P}_{a,l,\text{и}} = (P_{a,l,\text{и}}, \Omega_{\text{рс}})$.

Заметим также, что функция с задержкой интерпретируется как функционирование устройства F с n входами и одним выходом, значение $b(t)$ которого при некоторых τ из N_0 и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_l в каждый момент $t \geqslant \tau + 1$ определяется таким соотношением $b(t) = f\big(a_1(t-\tau), a_2(t-\tau), \ldots, a_n(t-\tau)\big)$, которое, очевидно, может быть описано системой вида (2).

Пусть $M \subseteq P_{a,l}$. Тогда при $J_{\Omega_{\text{рс}}}(M) = M$ функциональная система $\mathcal{M} = (M, \Omega_{\text{рс}})$ и при $J_{\Omega_{\text{рс,O}}}(M) = M$ функциональная система $M = (\mathcal{M}, \Omega_{\text{рс,O}})$ называются итеративными функциональными системами Поста автоматных функций. Примерами таких функциональных систем являются функциональные системы вида $\mathcal{P}_{a,l,\text{и}}$. При заданном l из N_1 назовём основными итеративными функциональными системами автоматных функций следующие:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{a,l,k} = (P_{a,l,k}, \Omega_{\text{рс}}), \qquad &&\mathcal{P}^*_{a,l,k} = (P_{a,l,k}, \Omega_{\text{рс},0}), \\ &\mathcal{P}_{a,l} = (P_{a,l}, \Omega_{\text{рс}}), &&\mathcal{P}^*_{a,l} = (P_{a,l}, \Omega_{\text{рс},0}). \end{aligned} \tag{3}$$

Изложим главные результаты по нашей проблематике для итеративных функциональных систем автоматных функций.

Теорема 5.1 [18]. *Для любого l из N_1 среди основных итеративных функциональных систем автоматных функций конечно порождённой является только функциональная система $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$.*

Теорема 5.2 [15]. *Для любых l из N и m из N_1 в $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ существует счётное множество базисов мощности m.*

Автоматная функция, образующая полную систему в $\mathcal{M}$, называется шефферовой. Дальнейшее упрощение базиса достигается за счёт минимизации числа переменных, размерности и числа состояний шефферовой автоматной функции. Следующее утверждение даёт окончательный ответ о виде простейших в этом смысле шефферовых автоматных функций.

Теорема 5.3 [10]. *Для любого l из N_1 в $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ существуют шефферовы одномерные автоматные функции от двух переменных с двумя состояниями.*

Для других основных итеративных функциональных систем автоматных функций ответ по проблеме базисов даёт следующее утверждение.

Теорема 5.4 [18]. *Для любого l из N_1 в $\mathcal{P}_{a,l}$ и $\mathcal{P}^*_{a,l}$ базисов не существует, в $\mathcal{P}_{a,l,k}$ существует счётный базис, а также полная система, не содержащая в себе базиса.*

По проблеме полноты ситуацию описывают следующие утверждения.

Теорема 5.5 [17]. *Для основных итеративных функциональных систем автоматных функций множество $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ образует k-систему только при $\mathcal{M} = \mathcal{P}^*_{a,l,k}$ для любого l из N_1.*

Теорема 5.6 [15]. *Множество $\Sigma_\pi(\mathcal{M})$ континуально при $\mathcal{M} \in \{\mathcal{P}_{a,l,k}, \mathcal{P}^*_{a,l,k}\}$ и гиперконтинуально при $\mathcal{M} \in \{\mathcal{P}_{a,l}, \mathcal{P}^*_{a,l}\}$ для любого l из N_1.*

В качестве следствия получаем, что указанными в теореме 5.6 мощностями обладают соответствующие решётки замкнутых классов в основных итеративных функциональных системах автоматных функций.

Назовём систему $\Sigma' \subseteq \Sigma(\mathcal{P}^*_{a,l,k})$ k-критериальной, если всякое конечное множество $M \subseteq \mathcal{P}_{a,l,k}$ является полным тогда и только тогда, когда для любого множества $K \in \Sigma'$ выполнено $M \nsubseteq K$.

Теорема 5.7 [15]. *В $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ существуют счётные k-критериальные системы вида $\Sigma' \subseteq \Sigma_\pi(\mathcal{P}^*_{a,l,k})$ для любого l из N_1.*

Отметим, что в общем случае задание автоматных функций из $\mathcal{P}_{a,l}$ не является эффективным, поэтому проблема выразимости и полноты может ставиться лишь для эффективно задаваемых систем.

Теорема 5.8 [14]. *Проблема выразимости для эффективно задаваемых конечных систем автоматных функций в основных итеративных функциональных системах автоматных функций и проблема полноты в $\mathcal{P}_{a,l}$ алгоритмически неразрешимы для любого l из N_1.*

Таким образом, расширение функциональных возможностей автоматных функций по сравнению с функциями l-значной логики и функциями с задержками резко усложняет решение интересующих нас проблем для алгебр автоматных функций. Изучение природы этой сложности осуществлялось в разных направлениях.

Мы остановимся на задаче о приближённой полноте и на задаче о полноте специально обогащённых систем автоматных функций.

Первая из этих задач имеет две модификации: задача о τ-полноте ($\tau \in N$) и задача об аппроксимационной полноте (A-полноте), которым посвящается следующий раздел. Обратим внимание на специальные функциональные системы $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ и $\mathcal{P}_4$, которые являются подалгебрами соответствующих основных итеративных функциональных систем автоматных функций из (3). Каждая из них состоит из всех одноместных и одномерных автоматных функций из носителей указанных основных итеративных функциональных систем, а в качестве операций в них выступают те же операции, что и в соответствующих итеративных функциональных системах автоматных функций, кроме операций σ и π. Как установлено в [3, 18], они не имеют базисов. Кроме того, $\mathcal{P}_1$ содержит подалгебру $\mathcal{P}'_1$ всех взаимно-однозначных отображений, которая является группой с операцией подстановки, моделируя частью себя группу бернсайдовского типа [2], т. е. такую конечно порождённую группу, в которой порядки элементов конечны, но в совокупности не ограничены. Открытыми остаются вопросы о наличии базисов в $\mathcal{P}'_1$, а также задачи об алгоритмической разрешимости свойства конечности порядков её элементов и выразимости этих элементов через другие. В заключение отметим, что теоремы 5.1, 5.2, 5.5, 5.6 и упомянутые здесь факты об одноместных алгебрах остаются справедливыми и в случае расширения значения l до счётного в функциональных системах функций, которые тем самым обобщают автоматные функции.

6. Условия τ- и A-полноты для автоматных функций

Будем говорить, что автоматные функции f и g τ-эквивалентны, если они совпадают на всех входных словах длины τ (обозначение: $f\ \tau\ g$), и A-эквивалентны, если $f\ \tau\ g$ для любого τ из N.

На множестве $B(P_{a,l})$ введём отношение Δ_τ, полагая, что для $M, M' \subseteq P^*_{a,l}$ выполнено $M \Delta_\tau M'$, если для всякой функции f из M найдётся g из M', такое что $f\ \tau\ g$. Ясно, что это отношение образует предпорядок, а значит, может быть представлено как отношение частичного порядка на классах эквивалентности, включающих в себя все такие элементы M и M', для которых выполнены соотношения $M\ \Delta_\tau\ M'$ и $M'\ \Delta_\tau\ M$. Это отношение мы обозначим $M\ \tau\ M'$, а сами элементы будем называть τ-эквивалентными.

На $B(P_{a,l})$ введём ещё одно отношение, полагая, что для $M, M' \subseteq P^*_{a,l}$ выполнено $M\ \Delta_A\ M'$, если для всякого τ из N справедливо $M\ \tau\ M'$. Это отношение также является предпорядком для представителей M и M' его класса эквивалентности, и когда тем самым выполнено $M\ \Delta_A\ M'$ и $M'\ \Delta_A\ M$, мы будем писать $M\ A\ M'$, а сами представители называть A-эквивалентными.

Теорема 6.1 [8]. *Для любых $M \subseteq P_{a,l}$ и $\tau \in N$ справедливо*

$$J_{\Omega_{\text{рс}}}(M)\ \tau\ J_{\Omega_{\text{рс},\text{O}}}(M), \quad J_{\Omega_{\text{рс}}}(M)\ A\ J_{\Omega_{\text{рс},\text{O}}}(M).$$

Таким образом, действия операторов $J_{\Omega_{\text{рс}}}$ и $J_{\Omega_{\text{рс},\text{O}}}$ с точностью до τ- и A-эквивалентностей совпадают, поэтому в этом смысле операция обратной связи O оказывается моделируемой операциями расширенной суперпозиции, чем мы в дальнейшем будем пользоваться.

Пусть $M, M' \subseteq P_{a,l}$. Говорят, что M является τ-выразимым через M', если $M\ \Delta_\tau\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M')$, и A-выразимым через M'', если $M\ \Delta_A\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M'')$.

Теорема 6.2. *Для эффективно задаваемых конечных множеств $M, M' \subseteq P_{a,l}$ отношение $M\ \Delta_\tau\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M')$ алгоритмически разрешимо для любого τ из N.*

Теорема 6.3 [9]. *Для конечных множеств $M, M' \subseteq P_{a,l,k}$ отношение $M\ \Delta_A\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M')$ алгоритмически неразрешимо.*

Пусть $M \subseteq P_{a,l}$ и $M\ A\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M)$. Назовём множество $M' \subseteq M$ τ-полным в M, если $J_{\Omega_{\text{рс}}}(M')\ \tau\ M$, и A-полным, если $J_{\Omega_{\text{рс}}}(M')\ A\ M$.

Теорема 6.4. *Если $M \subseteq P_{a,l}$, $M\ A\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M)$, M разрешимо, в M есть конечное A-полное подмножество и $\tau \in N$, то существует алгоритм, устанавливающий по любому конечному разрешимому подмножеству $M' \subseteq M$, является ли оно τ-полным в M.*

На самом деле эта теорема следует из теоремы 2.2, в чём можно убедиться следующим образом. Пусть $f \in P_{a,l}$ и $\tau \in N$. Рассмотрим множество E_l^τ в предположении, что его элементы кодируются словами длины τ в алфавите E_l. Тогда, рассматривая функцию f из $P_{a,l}$ только на словах длины τ, можно считать, что она принадлежит P_l^τ. Таким образом от рассмотрения автоматных функций мы перешли к функциям l^τ-значной логики. Остаётся заметить, что операции расширенной суперпозиции в вопросах выразимости и полноты фактически редуцируются к операциям суперпозиции. Из теоремы 6.1 и соотношения $P_{a,l,k}\ A\ P_{a,l}$ вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.5. *Условия τ-полноты и A-полноты совпадают для всех основных итеративных функциональных систем автоматных функций.*

Следующее утверждение отмечает существенное отличие понятий τ-полноты и A-полноты.

Теорема 6.6. *В каждой из основных итеративных функциональных систем автоматных функций существуют конечные A-полные системы, а также счётные A-полные системы, не содержащие конечных A-полных подсистем.*

Следующее утверждение отмечает отличие понятий τ-полноты и A-полноты.

Теорема 6.7 [9]. *Если $M \subseteq P_{a,l,k}$ и множество M конечно, то не существует алгоритма, устанавливающего по M, является ли оно A-полным в $P_{a,l,k}$.*

В то же время имеется определённое сходство понятий τ- и A-полноты, и оно проявляется прежде всего в подходе к решению задач о τ- и A-полноте в терминах предполных классов.

Если $M \subseteq P_{a,l}$, $M\ A\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M)$ и $M' \subseteq M$, то будем называть множество M' τ-предполным в M, если оно не является τ-полным в M, но для любой функции f из $M \setminus M'$ множество $M' \cup \{f\}$ является τ-полным в M. Аналогично вводится понятие A-предполного множества. Пусть $\Sigma_{\pi,\tau}(M)$ и $\Sigma_{\pi,A}(M)$ — множества всех τ-предполных и A-предполных множеств в M соответственно.

Теорема 6.8. *Если $M \subseteq P_{a,l}$ и $M\ A\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M)$, то $\Sigma_{\pi,A}(M) = \bigcup\limits_{\tau\geqslant 1} \Sigma_{\pi,\tau}(M)$.*

Теорема 6.9. *Если $\lambda \in \{\tau, A\}$, $\tau \in N$, $M \subseteq P_{a,l}$, $M\ A\ J_{\Omega_{\text{рс}}}(M)$, в M есть конечное λ-полное подмножество и $M' \subseteq M$, то M' является A-полным в M тогда и только тогда, когда для любого $K \in \Sigma_{\pi,\lambda}(M)$ справедливо $M' \not\subseteq K'$.*

Это утверждение с учётом теорем 6.5 и 6.8 сводит решение задач о τ- и A-полноте в основных итеративных функциональных системах автоматных функций к описанию множества $\Sigma_{\pi,\tau}(P_{a,l})$, которое было получено в [8]. Приведём это описание.

Пусть $t \in N$. Обозначим через E_l^t множество всех слов $\varepsilon = e(1)e_2\ldots e(t)$ длины t в алфавите E_l. При $h \in N$ и $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, где $t_i \in N$ при $t \in N_1^h$, положим $E_l^T = E_l^{t_1} \times E_l^{t_2} \times \ldots \times E_l^{t_h}$. Пусть $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — h-местный предикат, аргументы y_i которого принимают значения из $E_l^{t_i}$. Как и выше, пусть ρ_1 и ρ_0 — множества истинных и ложных наборов значений переменных для ρ соответственно. Будем говорить, что автоматная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $P_{a,l}$ сохраняет ρ, если из истинности каждого элемента строки

$$\rho(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_h^1), \rho(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_h^2), \ldots, \rho(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_h^n)$$

вытекает истинность выражения

$$\rho\big(f(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^n), f(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_2^n), \ldots, f(\alpha_h^1, \alpha_h^2, \ldots, \alpha_h^n)\big).$$

Класс всех таких автоматных функций обозначим через $U_a(\rho)$.

Введём функцию $\nu\colon E_l^* \times E_l^* \to N_0$. Пусть $\varepsilon_1 = E_l^{t_1}$, $\varepsilon_2 = E_l^{t_2}$, $t = \min\{t_1, t_2\}$. Тогда

$$\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } e_1(1) = e_2(1), \ldots, e_1(t) = e_2(t), \\ i, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant t-1 \text{ и } \varepsilon_1(1) = \varepsilon_2(1), \ldots, \\ & \varepsilon_1(t-i) = \varepsilon_2(t-i), \text{ но } e_1(t-i+1) \neq e_2(t-i+1), \\ t, & \text{если } \varepsilon_1(1) \neq \varepsilon_2(2). \end{cases}$$

На множестве E_l^T определим отношение предпорядка $\leqslant$.

Пусть $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ и $A' = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_h')$ — элементы из E_l^T. Будем писать $A' \leqslant A$, если из включения $i, j \in N_1^h$ следует, что $\nu(\alpha_i', \alpha_j') \leqslant \nu(\alpha_i, \alpha_j)$.

Пусть $t' = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\}$, $h \leqslant l^t$ и $t' \geqslant 2$. Если $l = 2$, положим $h = 2$. Пусть в A при $h \geqslant 2$ и условии, что $i \neq j$, выполнено $\nu(\alpha_i, \alpha_j)$. Множество всех A', таких что $A' \leqslant A$, будем называть ν-множеством, задаваемым элементом A, и обозначать через ξ. Такое множество ξ разобьём на два подмножества: $\xi^{(m)}$, состоящее из всех максимальных по отношению $\leqslant$ элементов, и $\xi^{(\underline{m})}$, включающее остальные элементы из ξ. Тогда при $h = 1$ имеем $\xi^{(\underline{m})} = \varnothing$. Ясно, что значение $\nu(\alpha_i, \alpha_j)$ не зависит от выбора A из $\xi^{(\underline{m})}$, поэтому вместо $\nu(\alpha_i, \alpha_j)$ будем писать $\nu(i, j)$.

Для $l \geqslant 2$ и $t \geqslant 1$ укажем семь семейств предикатов.

Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$ и $\xi \subseteq E_l^T$. Подстановку γ чисел $1, 2, \ldots, h$ назовём ξ-подстановкой, если для $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ из ξ выполнено $\alpha_{\gamma(1)}, \alpha_{\gamma(2)}, \ldots, \alpha_{\gamma(h)}) \in \xi$.

Пусть $s \geqslant 1$. Назовём множество

$$\{(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_h^1), (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_h^2), \ldots, (\alpha_1^s, \alpha_2^s, \ldots, \alpha_h^s)\}$$

элементов из $\xi^{(m)}$ ξ-совместимым, если существует такая совокупность ξ-подстановок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, что для любых q и p из N_1^s, а также i и j из N_1^h выполнено $\nu_\xi(i, j) \leqslant \nu\big(\alpha_{\gamma q}^q(i), \alpha_{\gamma p}^p(j)\big)$.

Пусть $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ — предикат, для которого $\rho_1 \subseteq \xi$. Назовём ρ ξ-рефлексивным, если $\xi^{(m)} \subseteq \rho_1$, и ξ-симметричным, если для $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ из ρ_1 и ξ-подстановки γ всегда выполнено $\big(\alpha_{\gamma(1)}, \alpha_{\gamma(2)}, \ldots, \alpha_{\gamma(h)}\big) \in \rho_1$.

ξ-рефлексивный и ξ-симметричный предикат ρ назовём ξ-элементарным, если множество $\xi \setminus \rho_1$ является ξ-совместимым. Для такого ρ при $A \in \xi \setminus \rho_1$ и $i \in N_1^h$ определим подмножества $C_\rho^i(A)$, $Q_\rho^i(A)$ и $\varepsilon_\rho^i(A)$ множества E_l следующим образом:

- $a \in C_\rho^i(A)$ тогда и только тогда, когда найдётся такой $\alpha_i' \in E_l^{ti}$, что $\nu(\alpha_i, \alpha_i') \leqslant 1$, $\alpha_i'(t_i) = a$, а любой элемент $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_h')$ из ξ содержится в ρ_1;

- $b \in Q^i_\rho(A)$ тогда и только тогда, когда в $\xi \setminus \rho_1$ найдётся такой элемент $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha''_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_h)$, что $\nu(\alpha_i, \alpha''_i) \leqslant 1$ и $\alpha''_i(t_i) = b$;
- множество $\varepsilon^i_\rho(A)$ совпадает с C^i_ρ, если $C^i_\rho \neq \varnothing$, и с $Q^i_\rho(A)$ в противном случае.

Пусть $n \geqslant 1$ и $R = \{\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n\}$ — произвольная система ξ-элементарных предикатов. Назовём систему R T-совместимой, если для любых $\sigma \in N^n_1$, $i \in N^h_1$ и $A \in \xi \setminus \rho^\sigma_1$ выполнено $Q^i_\rho(A) \neq E_l$. Назовём систему R W-совместимой, если для всех $\sigma, \sigma' \in N^n_1$, $i \in N^h_1$, $A \in \xi \setminus \rho^\sigma_1$, $A' \in \xi \setminus \rho^\sigma_1$ множества $C^{i\sigma}_\rho(A)$ и $C^{i\sigma'}_\rho(A)$ одновременно либо пусты, либо непусты, причём при $C^{i\sigma}_\rho(A) = \varnothing$ для всякого $b \in E_l$ существует такой $j \in N^h_1$, что $t_j = t_i$, $\nu_\xi(i,j) \leqslant 1$, $a \in Q^{j\sigma}_\rho(A)$.

Пусть $n \geqslant 1$, $\sigma_i \in N^q_1$, $A_i = (\alpha^i_1, \alpha^i_2, \ldots, \alpha^i_n)$, $A^i \in \xi \setminus \rho^{\sigma_i}_1$ и $j_i \in N^h_1$ при $i \in N^n_1$. Тогда если $\sigma_i \neq \sigma'_i$ при $i \neq i'$ и $t_{j_i} = t_{j_{i'}}$, а также $\nu(\alpha^1_{j_1}, \alpha^2_{j_{i''}}) \leqslant 1$ для всех $i, i' \in N^q_1$ и $i'' \in N^n_1 \setminus \{1\}$ и выполнено $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varepsilon^{j_i}_{\rho^{q_i}_1}(A^i) = \varnothing$, то систему R назовём Q-совместимой.

Пусть $n \geqslant 2$, $i \in N^n_1$, $\sigma_j \in N^q_1$ и $A^i \in \xi \setminus \rho^{\sigma_i}_1$. Положим, что для всех $j, j' \in N^n_1$ при $j \neq j'$ выполнено $\nu(\alpha^j_1, \alpha^{j'}_1) \neq 1$. Пусть для всех $i_j, i_{j'} \in N^h_1$ выполнено $t_{i_j} = t_{i_{j'}}$ и при $j > 1$ имеет место неравенство $\nu(\alpha_{i_{j'}}, \alpha_{i_j}) \leqslant 1$, а также выполнено $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \varepsilon^{i_j}_{\rho^{\sigma_j}}(A^j) = \varnothing$. Предположим, что при этих условиях существуют $l_v \in N^n_1$, $v \in N^q_1$, такие что $i_{l_v} \in N^2_1$, множества A^{l_v} являются ξ-совместимыми и $\bigcap\limits_{v=1}^{q} \varepsilon^{i_{l_v}}_{\rho^{\sigma_{l_v}}} = \varnothing$. Тогда говорим, что система R является D-совместимой.

Семейство предикатов $Z_l(\tau)$. Это семейство непусто при $l \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $Z_l(\tau)$ в точности тогда, когда $\rho_1 \subseteq E^T_l$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, $h \geqslant 1$, $\max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$ и для некоторого $m \geqslant 1$ выполнено $\rho_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho^i_1$, где предикат ρ^i является ξ-элементарным, а сами ρ^i образуют T-, W-, Q-совместимую систему, а для любых $j \in N^h_1$ и $A \in \xi \setminus \rho_1$ множество $C^i_\rho(A)$ непусто.

Семейство предикатов $J_l(\tau)$. Это семейство непусто при $\tau \geqslant 1$ и $l > 2$, а также при $\tau \geqslant 2$ и $l = 2$. Предикат ρ входит в $J_l(\tau)$ в точности тогда, когда $\rho_1 \subseteq \xi \subseteq E^T_l$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, $h \geqslant 3$, $\max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$, для некоторого $m \geqslant 1$ выполнено $\rho_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho^i_1$, где предикат ρ^i является ξ-элементарным, а сами ρ^i образуют T-, W-, Q-совместимую систему; существуют такие числа $i, j, l \in N^h_1$, $i \neq j$, $i \neq l$, $j \neq l$, что для A из $\xi \setminus \rho^1_1$ множество $C^u_\rho(A)$ пусто при $u \in \{i, j, l\}$.

Семейство предикатов $D_l(\tau)$. Это семейство непусто при $\tau \geqslant 1$, если $l > 2$, и при $\tau \geqslant 2$, если $l = 2$. Предикат ρ входит в $D_l(\tau)$ в точности тогда, когда $\rho_1 \subseteq \xi \subseteq E^T_l$, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_h)$, $h \geqslant 2$, $\max\{t_1, t_2, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$, для некоторого $m \geqslant 1$ выполнено $\rho_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \rho^i_1$, где предикат ρ^i является ξ-элементарным, а сами ρ^i образуют T-, W- и D-совместимую систему; для любого $A \in \xi \setminus \rho$ множества

$C^1_\rho(A)$ и $C^2_\rho(A)$ пустые; если $h \geqslant 3$, то для i из N^h_1 выполнено $C^i_\rho(A) \neq \varnothing$; если $h = 2$, то $\rho_1 \cap \xi^{(M)} \neq \varnothing$.

Пусть далее $l \geqslant 2$, $t \geqslant 1$, $T = (t,t)$, $\xi_t \subseteq E^T_l$, ξ_t — ν-подмножество и $\nu_{\xi_t}(1,2) = 1$.

Семейство предикатов $M_l(\tau)$. Это семейство непусто при $l \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $M_l(\tau)$ в точности тогда, когда $\rho_1 \subset \xi_t$, $t \leqslant \tau$, ρ_1 совпадает с отношением частичного порядка, определённым на E^T_l и имеющим ровно l^{t-1} минимальных и l^{t-1} максимальных элементов.

Семейство предикатов $S_l(\tau)$. Это семейство непусто при $l \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $S_l(\tau)$ в точности тогда, когда $\rho_1 \subset \xi_t$, $t \leqslant \tau$, существует подстановка σ_ρ на E^T_l, разлагающаяся в произведение циклов одинаковой простой длины $p \geqslant 2$, график которой совпадает с ρ_1, т. е. если $a \in E^T_l$, то $\big(a, \sigma_\rho(a)\big) \in \rho_1$, и если $(a_1, a_2) \in \rho_1$, то $a_2 = \sigma_\rho(a_1)$.

Пусть $t \geqslant 1$, $\Phi^\sim_t$ — класс всех отображений φ множества E^T_l в множество подстановок на E_l. Значение φ на a обозначим φ_a.

Пусть $\Phi_t \subseteq \Phi^\sim_t$ и Φ_t состоит из всех таких φ, что $\varphi_a = \varphi_{a'}$ при $\nu(a, a') \leqslant 1$. Пусть $h \in \{3, 4\}$, $T_h = \{t, t, \ldots, t\}$, $K^h_t \subseteq E^{T_h}_l$ и K^h_t состоит из всех таких элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$, что при $i, j \in N^h_1$ выполнено $\nu(a_i, a_j) \leqslant 1$. Пусть $l = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$, $G = \langle E_l, +\rangle$ — абелева группа, в которой каждый ненулевой элемент имеет простой порядок p. При $p \neq 2$ пусть $l_p \in N^{p-1}_1$ и $2l_p = 1 \pmod p$.

Семейство предикатов $L_l(\tau)$. Это семейство непусто только при $l = p^m$, p — простое число, $m \geqslant 1$, $\tau \geqslant 1$. Предикат ρ входит в $L_l(\tau)$ в точности тогда, когда для некоторого φ из Φ_t, $t \leqslant \tau$, справедливо следующее.

1. Пусть $k = p^m$, $p > 2$. Тогда $\rho_1 \subset K^3_t$ и (a_1, a_2, a_3) из K^3_t входит в ρ_1, если и только если $\varphi_{a_1}\big(a_3(t)\big) = l_p\Big(\varphi_{a_1}\big(a_1(t)\big) + \varphi_{a_1}\big(a_2(t)\big)\Big)$.
2. Пусть $k = 2^m$. Тогда $\rho_1 \subset K^h_t$ и (a_1, a_2, a_3, a_4) из K^4_t входит в ρ_1, если и только если $\varphi_{a_1}\big(a_1(t)\big) + \varphi_{a_1}\big(a_2(t)\big) = \varphi_{a_1}\big(a_3(t)\big) + \varphi_{a_1}\big(a_4(t)\big)$.

Отметим, что указанные семейства при $\tau = 1$ совпадают с известными семействами для P_l из раздела 2.

Пусть $t \geqslant 2$, $T = (t,t)$, $\xi^\sim_t$ есть такое ν-подмножество E^T_l, что $\nu_{\xi^\sim_t}(1,2) = 2$.

Семейство предикатов $V_l(\tau)$. Это семейство непусто при $l \geqslant 2$, $\tau \geqslant 2$. Предикат ρ входит в $V_l(\tau)$ в точности тогда, когда $\rho_1 \subset \xi^\sim_t$, $t \leqslant \tau$, и $(a_1, a_2) \in \xi^\sim_t \cap \rho_1$ тогда и только тогда, когда $a_1(t) = a_2(t)$; существует такое φ из Φ_t, что включение $(a_1, a_2) \in \xi^{\sim(M)}_t \cap \rho_1$ эквивалентно существованию α из E_l, такого что $a_1(t) = \varphi_{a_1}(\alpha)$ и $a_2(t) = \varphi_{a_2}(\alpha)$.

Пусть

$$W_l(\tau) = Z_l(\tau) \cup J_l(\tau) \cup D_l(\tau) \cup M_l(\tau) \cup S_l(\tau) \cup L_l(\tau) \cup V_l(\tau)$$

и $U\big(W_l(\tau)\big)$ — множество классов автоматных функций, сохраняющих предикаты из $W_l(\tau)$.

Теорема 6.10 [8]. *Имеет место равенство* $\Sigma_{\pi,\tau}(P_{a,l}) = U\big(W_l(\tau)\big)$.

7. Условия полноты для специальных систем автоматных функций

Другой путь изучения свойств полноты систем автоматных функций состоит в рассмотрении новых операций над автоматными функциями и более широких систем автоматных функций, исследуемых на полноту. Остановимся на второй ситуации. Здесь обращают на себя внимание два подхода. Первый подход состоит в рассмотрении задачи Слупецкого для функциональной системы $\mathcal{P}_{a,l,k}$, а второй — в рассмотрении систем автоматных функций из $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$, которые содержат некоторый замкнутый класс истинностных автоматных функций.

Следуя [31], назовём конечную систему T конечно автоматных функций из $\mathcal{P}_{a,l,k}$ системой Слупецкого, если $J_{\Omega_{\text{рс}}}(P^{1,1}_{a,l,k} \cup T) = P_{a,l,k}$.

Теорема 7.1 [6]. *Для любых l из N_1 системы Слупецкого конечно автоматных функций из $P_{a,l,k}$ существуют.*

Предполный класс основной итеративной функциональной системы автоматных функций называем классом Слупецкого, если он содержит все однородные функции из носителя итеративной системы автоматных функций.

Теорема 7.2. *Мощность множества классов Слупецкого равна континууму в функциональных системах $\mathcal{P}_{a,l,k}$ и $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$ и равна гиперконтинууму в функциональных системах $\mathcal{P}_{a,l}$ и $\mathcal{P}^*_{a,l}$ при любом l из N_1.*

Заметим, что свойство гиперконтинуальности в этой теореме сохраняется и для функциональных систем функций, получающихся из автоматных функций расширением значения параметра l до счётного.

Второй подход сначала был реализован как следующее утверждение.

Теорема 7.3 [5]. *Для любого l из N_1 существует алгоритм, который для любого конечного множества $M \subseteq P_{a,l,k}$ устанавливает, является ли множество $M \cup P_{a,l,k}$ полным в $\mathcal{P}^*_{a,l,k}$.*

Затем этот подход был развит для $l = 2$ до следующего положения. Пусть T — замкнутый класс Поста функций алгебры логики, которые будем интерпретировать как истинностные конечно автоматные функции. Обозначим через K_T класс всех конечных множеств M конечно автоматных функций из $P_{a,2,k}$, таких что $M \supseteq T$. Нас будет интересовать вопрос существования алгоритма, который для любого M из K_T устанавливает, полно ли это множество в $\mathcal{P}^*_{a,2,k}$. Точнее, для каких T этот алгоритм существует. Ясно, что если для некоторого T такой алгоритм существует, то и для всякого класса Поста T', такого что $T' \supseteq T$, он также существует. Наоборот, если такого алгоритма нет, то для всякого класса Поста $T'' \subseteq T$ его также нет. Тем самым отделимость алгоритмически разрешимых случаев от неразрешимых достигается указанием такого семейства Φ классов Поста T, для которых свойство полноты алгоритмически неразрешимо, но для любого класса Поста, такого что $T' \supset T$, оно уже разрешимо.

Теорема 7.4 [4]. *Справедливо соотношение*

$$\Phi = \{F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_8^\infty, L_2, L_3, L_5, S_6, P_6, \mathrm{O}_9\}.$$

Частным случаем этого утверждения является теорема 7.3 при $l = 2$. Отметим, что, как показывается в [4], утверждение теоремы 7.4 остаётся справедливым и для случая A-полноты при соответствующей интерпретации множества Φ.

8. Линейные автоматные функции

Назовём автоматную функцию из $P_{a,l,k}$ линейной, если в её системе (1) вектор-функции φ и ψ являются линейными по модулю l относительно своих переменных. Класс всех линейных автоматных функций обозначим через $L_{a,l,k}$. Нетрудно убедиться, что $I_{\Omega_{\text{pc},\text{O}}}(L_{a,l,k}) = L_{a,l,k}$. Рассмотрим функциональные системы $\mathcal{L}_{a,l,k} = (L_{a,l,k}, \Omega_{\text{pc}})$ и $\mathcal{L}^*_{a,l,k} = (L_{a,l,k}, \Omega_{\text{pc},\text{O}})$.

Теорема 8.1. *Из функциональных систем $\mathcal{L}_{a,l,k}$ и $\mathcal{L}^*_{a,l,k}$ конечно порождённой является только $\mathcal{L}^*_{a,l,k}$.*

Решение задачи о полноте для $\mathcal{L}^*_{a,l,k}$ получено при $l = 2$ (см. [24]). Мы приведём его, используя далее обозначение L_a вместо $L_{a,l,k}$ и $\mathcal{L}_a$ вместо $\mathcal{L}_{a,l,k}$.

Пусть Γ_a, $a \in E_2$, — класс всех таких линейных автоматных функций $f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, что $f(a, a, \ldots, a) = (a, a, \ldots, a)$.

Говорят, что линейная автоматная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со сдвигом зависит от переменной x_i, если в некоторой её системе (1) в уравнениях для ψ x_i отсутствует; в противном случае называем x_i непосредственной. Пусть V_1 — класс всех линейных автоматных функций, имеющих не более одной непосредственной переменной. Пусть V_2 — класс всех линейных автоматных функций, имеющих нечётное число непосредственных переменных. Обозначим через R_C класс всех линейных автоматных функций, имеющих ровно одну существенную переменную, а через R_H — класс всех линейных автоматных функций ровно с одной непосредственной переменной. Класс всех линейных автоматных функций без существенных переменных обозначим через C.

Под $a^s[0]$ будем понимать слово длины s вида $00\ldots0$. Обозначим через L^0 класс всех таких линейных автоматных функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $f(a^s[0], a^s[0], \ldots, a^s[0]) = (a^s[0], a^s[0], \ldots, a^s[0])$ для любых s из N. Пусть L_1 — класс всех линейных автоматных функций от одной переменной и $L_1^0 = L^0 \cap L_1$. Через $E_2[z]$ обозначим кольцо многочленов переменной z над полем E_2 с обычными операциями сложения и умножения многочленов. Для $\{u, v, u', v'\} \subset E_2[z]$ рассматриваем дроби $\frac{u}{v}, \frac{u'}{v'}$, которые считаем равными, если для некоторых u_1, u_2 из $E_2[z] \setminus \{0\}$ справедливы равенства $uu_1 = u'u_2$ и $vu_1 = v'u_2$. Степень многочлена u обозначим через $\deg(u)$. Пусть $Q_2(z)$ — множество всех дробей $\frac{u}{v}$, причём $u \in E_2[z] \setminus \{0\}$ и если $\frac{u}{v}$ несократимая, то v' не делится на z. Можно показать, что L_1^0 и $Q_2(z)$ изоморфны (обозначение: $\sim$) с сохранением операций умножения и сложения, поэтому допускают определённое отождествление.

Пусть $\frac{u}{v} \in Q_2(z)$, $f \in L_a$ и $\frac{u}{v} \sim f$. Будем говорить, что f обладает O-свойством, если или $\frac{u}{v} \in R_H$ и $\deg u = \deg v$, или $\frac{u}{v} \notin R_H$ и $\deg u < \deg v$. Будем считать многочлены p_i из $Q_2(z)$ упорядоченными по возрастанию степеней, т. е. при $i \in N$ выполнено $\deg p_i \leqslant \deg p_{i+1}$, причём $p_1 = \xi$. Если $u+v$ или v делится на ξp_i, то будем говорить, что f обладает i-свойством. Если $\deg u < \deg v$, то f обладает O'-свойством; если $\deg u \leqslant \deg v$, то f обладает O''-свойством. Если u делится на p_i, то f обладает i'-свойством; если v не делится на P_i, то f обладает i''-свойством. Пусть $M_i^{(1)}$ состоит из всех линейных автоматных функций f, обладающих i-свойством, $i \in N_0$, $R_i^{(1)}$ состоит из всех линейных автоматных функций f с i'-свойством.

Для линейных автоматных функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всегда найдутся такие функции $f_1(x_1, f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ из L_1 и γ из C, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + \gamma \pmod 2.$$

Обозначим множество функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ через $\nu(f)$. Пусть M_i состоит из всех таких линейных автоматных функций f, что $\nu(f) \subset M_i^{(1)}$.

Пусть для линейной автоматной функции f выполнено следующее: если x_j — единственная существенная переменная, то f_j из $\nu(f)$ обладает i''-свойством, в противном случае f_j обладает i'-свойством. Класс всех таких f обозначим через R_i^C. Пусть для линейной автоматной функции f выполнено следующее: если x_j — единственная непосредственная переменная, то f_j из $\nu(f)$ обладает i''-свойством, в противном случае f_j обладает i'-свойством. Класс всех таких f обозначим через R_i^H. Обозначим через J семейство, состоящее из всех классов J_0, J_1, V_1, V_H, M_i, R_j^C, R_j^H при $i \in N_0$, $j \in N_0 \setminus \{1\}$.

Теорема 8.2 [24]. *Справедливо соотношение* $\Sigma_\pi(\mathcal{L}_a^*) = J$.

Тем самым в функциональной системе $\mathcal{L}_a^*$ имеется лишь счётное множество предполных классов, и они в силу конечной порождённости $\mathcal{L}_a^*$ образуют критериальную систему. По аналогии со случаем функций с задержками для $\mathcal{L}_a^*$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.3 [24]. *Существует алгоритм, устанавливающий для любой конечной системы линейных автоматных функций из* $\mathcal{L}_a^*$*, полна ли она.*

Литература

[1] Автоматы / Под ред. Дж. Маккарти, К. Шеннона. — М.: Изд. иностр. лит., 1956.

[2] Алёшин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 3. — С. 319—328.

[3] Алёшин С. В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов // Проблемы кибернетики. — 1970. — Вып. 22. — С. 67—75.

[4] Бабин Д. Н. Неразрешимость полноты и A-полноты автоматных функций с истинностной системой типа F^∞, S, P, O // Дискрет. мат. — 1995. — Т. 6, вып. 1.

[5] Бабин Д. Н. Неразрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискрет. мат. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 41—55.

[6] Бабин Д. Н. О полноте двухместных о. д. функций относительно суперпозиций // Дискрет. мат. — 1989. — Т. 1, вып. 4. — С. 86—91.

[7] Бабин Д. Н. О суперпозициях ограниченно-детерминированных функций // Мат. заметки. — 1990. — Т. 47, вып. 3. — С. 3—10.

[8] Буевич В. А. О τ-полноте в классе детерминированных функций // ДАН. — 1992. — Т. 326, № 3. — С. 399—404.

[9] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для ограниченно-детерминированных функций // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 6. — С. 687—697.

[10] Ветренникова Е. В. Один простой пример универсальной о. д. функции // Дискретный анализ. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. — С. 5—11.

[11] Захарова Е. Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. — 1967. — Вып. 18. — С. 5—10.

[12] Захарова Е. Ю, Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k-значных логиках // ДАН СССР. — 1969. — Т. 186, № 3. — С. 509—512.

[13] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[14] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 35—37.

[15] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. — 1965. — Вып. 13. — С. 45—74.

[16] Кудрявцев В. Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей // Проблемы кибернетики. — 1962. — Вып. 8. — С. 91—115.

[17] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[18] Кудрявцев В. Б, Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[19] Ло Чжу-Кай. Предполные классы, определяемые k-арными отношениями в k-значной логике // Acta Sci. Natur. Univ. Jilin. — 1964. — Vol. 3.

[20] Ло Чжу-Кай, Лю Сюй Хуа. Предполные классы, определяемые бинарными отношениями в многозначной логике // Acta Sci. Natur. Univ. Jilin. — 1963. — Vol. 4.

[21] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, вып. 2.

[22] Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — 1960. — Вып. 3. — С. 49—60.

[23] Пан Юн-Цзе. Один разрешающий метод для отыскания всех предполных классов в многозначной логике // Acta Sci. Natur. Univ. Jilin. — 1962. — Vol. 2.

[24] Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. — 1995. — Вып. 3. — С. 140—166.

[25] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5—142.

[26] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.

[27] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса // ДАН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 144—146.

[28] Post E. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. — Princeton, 1941.

[29] Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1965. — Vol. 260. — P. 3817—3819.

[30] Rosenberg I., Hikata T. Completeness for uniformly delayed circuits // Proc. of the 13th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic. Kyoto, Japan, May 23—25, 1983. — P. 1—9.

[31] Slupecki J. Kriterium pelnosci wielowar tosciowych systemow logiki zdan // C. R. Séances Soc. Sc. Lettr. Varsovie. — 1939. — Cl. III, Vol. 32. — P. 102—128.