Анализ и синтез абстрактных автоматов*

В. Б. КУДРЯВЦЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vbk@lsili.ru

И. С. ГРУНСКИЙ
Институт прикладной математики и механики НАН Украины

В. А. КОЗЛОВСКИЙ
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
e-mail: kozlovskii@iamm.ac.donetsk.ua

УДК 519.95

Ключевые слова: дискретная математика, математическая кибернетика, интеллектуальные системы, автоматы.

Аннотация

Обзор содержит ряд окончательных результатов авторов, относящихся к области анализа и синтеза конечных автоматов по их поведению.

Abstract

V. B. Kudryavtsev, I. S. Grunskii, V. A. Kozlovskii, Analysis and synthesis of abstract automata, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 4, pp. 101—175.

This review contains some final results of research in the area of analysis and synthesis of finite automata by their behavior.

Введение

Обзор содержит результаты, относящиеся к теории конечных автоматов. Конечные автоматы и связанные с ними конструкции относятся к важнейшим понятиям дискретной математики и математической кибернетики. Теория автоматов имеет многочисленные применения в программировании, технической кибернетике, теории динамических систем и т. п. Классическими задачами этой теории являются прямые задачи (анализ процессов преобразования информации, осуществляемых автоматами, и свойств автоматов) и обратные задачи (синтез автоматов с заданными свойствами и идентификация (восстановление, распознавание, расшифровка, контроль и диагностика) автомата путём экспериментов с ним).

*Работа поддерживалась грантом РФФИ № 06-01-00240.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 4, с. 101—175.

Задача синтеза состоит в построении автомата по заданной спецификации — описанию необходимого, возможного и запрещённого поведения. Задача идентификации состоит в построении автомата на основе экспериментов с заданным «чёрным ящиком» — реализацией этого автомата. В процессе эксперимента возникает фрагмент поведения автомата. Поэтому имеется единая исходная основа — фрагмент поведения — для решения задач анализа свойств автомата по его поведению и синтеза автомата, удовлетворяющего заданному поведению с некоторой точностью. Эти задачи и рассматриваются в работе. Описание поведения автомата с заданной степенью точности задаётся дескриптором того или иного вида.

В последние десятилетия активно развиваются два научных направления. Одно из них — формальные методы синтеза программно-аппаратных вычислительных систем. Важную роль в этом играют средства спецификации, их развитию уделяется большое внимание. Растёт число языков спецификации, разрабатываются средства поддержки разработки спецификаций и методики их использования.

Второе направление — теория экспериментов с автоматами. Экспериментом с автоматом называется процесс подачи на автомат последовательности входных сигналов, наблюдения соответствующего поведения автомата и вывода заключений о функционировании и свойствах автомата, основанных на этих наблюдениях и априорной информации об автомате. Основная задача теории экспериментов состоит в разработке эффективных экспериментов, позволяющих получить (распознать) определённые сведения о строении автомата, его функциях, характеристиках процесса преобразования информации, осуществляемого этим автоматом. При этом возникает большой круг задач, связанных с классификацией экспериментов, с вопросами разрешимости задач распознавания тех или иных свойств автомата определёнными видами экспериментов, с оценками сложности минимальных экспериментов, достаточных для решения тех или иных задач распознавания, а также с оценками сложности построения этих экспериментов. Теория экспериментов интенсивно разрабатывается, в ней получен ряд важных и принципиальных результатов [2—4, 8, 18, 37, 50]. Она имеет широкий круг применений и оказывает значительное влияние на развитие ряда математических и технических дисциплин (технической диагностики, теории динамических систем, теории формальных языков и грамматик, теоретического программирования и др.).

Спецификация автомата и фрагменты поведения автомата являются примерами дескрипторов автомата. При исследовании точности описания автомата фрагментами важную роль играют так называемые идентификаторы свойств автомата (состояний, входов, выходов) [18] — фрагменты, позволяющие однозначно идентифицировать эти свойства. Идентификаторы также являются дескрипторами.

При решении задач синтеза и идентификации возникает необходимость описывать потенциально бесконечные классы автоматов финитными средствами.

Одним из основных таких средств являются недетерминированные автоматы — ещё один пример дескриптора.

Таким образом, при исследовании задач синтеза/идентификации автоматов возникли и интенсивно используются определённые виды дескрипторов автомата, и эти дескрипторы изучаются своими особыми методами. В связи с этим возникает необходимость теоретического осмысления и обобщения этих частных случаев для выработки общих методов изучения, создания и использования дескрипторов автомата при решении задач синтеза и идентификации автомата.

Основными задачами описания автоматов являются анализ дескрипторов данного автомата, синтез автомата по заданным дескрипторам, представление автомата дескрипторами с заданной степенью точности. Основное внимание в работе уделяется исследованию последней из них. В качестве основного модельного дескриптора выступают фрагменты автомата. Это объясняется следующими соображениями.

Задача восстановления автомата по заданному фрагменту возникла в теории экспериментов и технической диагностике, когда фрагмент — это тест и реакция на него, полученная в эксперименте, а также при синтезе, когда фрагмент — это задание на функционирование синтезируемого автомата. Эта задача состоит в анализе точности описания автомата фрагментами, априорно заданными и/или полученными в эксперименте, создании методов построения фрагментов, представляющих автомат с заданной степенью точности, создании методов синтеза автомата по фрагментам. Указанная проблематика развивается в рамках четырёх направлений: синтеза управляющих и вычислительных систем, технической диагностики таких систем, синтаксического распознавания образов, теории экспериментов с автоматами. Развитие этих направлений происходит достаточно независимо друг от друга под определяющим влиянием теории экспериментов.

Начало теории экспериментов с автоматами положено Э. Муром, который рассматривал две взаимосвязанные задачи: различимость автоматов кратными и простыми (однократными) экспериментами и распознавание автоматов и их состояний с помощью таких экспериментов. Становление теории экспериментов тесно связано с работами А. М. Богомолова и его учеников, М. П. Василевского, А. Гилла, В. Н. Носкова, Н. В. Евтушенко, А. Ф. Петренко, И. К. Рысцова, В. А. Твердохлебова, С. В. Яблонского, Ф. Хенни и его многочисленных последователей, П. Штарке и многих других. Эти исследования можно разделить на три этапа: комбинаторный, сложностной и характеризационный.

Комбинаторный этап касался построения средств анализа автоматов и алгоритмов проведения экспериментов с ними на основе комбинаторно-мощностных соображений. Методы и результаты этого этапа достаточно полно представлены в [12].

На сложностном этапе основное внимание уделяется построению оптимальных по сложности алгоритмов и нахождению сложности проведения экспериментов, а также разработке оптимальных по сложности методов анализа поведения автомата, что потребовало анализа структуры экспериментов. Этот этап инициирован работами Ф. Хенни и М. П. Василевского, которые строили контрольные эксперименты, помещая во входные последовательности специальные подпоследовательности (диагностические, установочные, локализующие, характеристические и т. п.), по реакции на которые исследуемого автомата можно идентифицировать его внутренние состояния. На этом этапе исследовались различные виды таких последовательностей и способы их размещения в эксперименте. Методы и результаты второго этапа достаточно полно представлены в [37]. Один из авторов настоящего обзора (И. С. Грунский), по-видимому, первым назвал эти последовательности и реакции на них идентификаторами состояний, начал их систематическое изучение [3] и обратил внимание на существование идентификаторов других ненаблюдаемых компонент поведения (например, входных последовательностей [18]). На втором этапе получено большое количество частных способов построения контрольных и распознающих экспериментов для случаев, когда они заведомо существуют. Неисследованными остались условия существования и структура таких экспериментов в общем случае. Очень трудным оказался вопрос, что должно присутствовать в этих экспериментах, а что является издержками алгоритмов их построения, т. е. вопрос характеризации вышеуказанных экспериментов. Появление первых характеризационных теорем [27] можно отнести уже к становлению третьего, характеризационного, этапа.

Как уже говорилось, в последнее время возникло важное и интенсивно развивающееся направление «Формальные методы синтеза компьютерных систем», во многом объединяющее указанные четыре направления. Для него основными задачами являются задачи контроля таких систем на всех этапах их жизни: проектирования, изготовления и эксплуатации (контроль и диагностика). Появилось значительное число средств описания таких систем на различных уровнях (эксперименты, анкетные языки, k-наборы, частичные и недетерминированные автоматы, временные логики и т. п.). Эти средства фактически описывают фрагменты поведения синтезируемого автомата, зачастую порождаемые неклассическим способом фиксации его поведения. При этом каждый вид таких средств изучается своими специальными методами в отрыве от остальных. Такое разнообразие требует создания общего понятия фрагмента, исследования условий существования, структуры, сложности фрагментов, позволяющих описывать, восстанавливать, идентифицировать автомат с заданной точностью, а также разработки методов создания таких фрагментов. Исследование этого комплекса задач составляет, на наш взгляд, содержание третьего этапа — характеризационного. Актуальность исследований в этом направлении всё возрастает. Этим исследованиям, выполненным в значительной степени авторами обзора или под их руководством, посвящена значительная часть работы.

Базовым понятием является «фрагмент»— естественное обобщение большого числа известных фрагментов частного вида. Введено отношение «фрагмент—автомат», рассмотрены свойства классов фрагментов заданного автомата. Введено понятие кофрагмента («запрещённого фрагмента») автомата, рассмотрены свойства классов автоматов, имеющих заданную пару (фрагмент, кофрагмент). Другое ключевое понятие — идентификатор ненаблюдаемых компонент функционирования автомата, т. е. фрагмент, позволяющий однозначно определить значения этих компонент. Показано, что идентификаторы являются мощным инструментом исследования рассматриваемых в работе задач.

Далее введено общее понятие представления автомата-эталона с заданной точностью (подобием) относительно априорного класса автоматов как пара (фрагмент, кофрагмент) автомата-эталона, которая может быть парой (фрагмент, кофрагмент) автомата из априорного класса, только если он подобен эталону. Показано, что это понятие охватывает и обобщает ряд частных понятий (контрольные, распознающие эксперименты, анкетные языки, k-наборы и т. п.), известных в теории автоматов. Проведена естественная классификация представлений. Осуществлено систематическое исследование условий существования и структуры представлений.

Получены точные условия существования представлений общего вида и их частных классов в терминах взаимоотношений свойств априорного класса, класса автоматов, подобных эталону, и класса автоматов, неотличимых от автомата-эталона для соответствующего отношения неотличимости. Получены условия существования нетривиальных представлений различных классов, в том числе анкетных языков и контрольных экспериментов. Исследована структура текстуальных представлений, т. е. представлений, состоящих только из фрагмента автомата и не содержащих кофрагмента. Эта структура описана в терминах наличия и расположения в представлении идентификаторов состояний эталона. Для этого введена операция замыкания фрагмента по так называемым верифицированным идентификаторам эталона, и структура текстуальных представлений описана в терминах этого замыкания. Из этих результатов следует, в частности, обоснование методов построения контрольных экспериментов, предложенных Ф. Хенни, М. П. Василевским и рядом их последователей. Найдены условия, при которых фрагмент является представлением в точности тогда, когда его замыкание по соответствующим идентификаторам изоморфно эталону. Тем самым выделены случаи, когда идентификаторы состояний в представлениях необходимы. Найден ряд критериев (в терминах замыканий), при которых фрагмент является представлением в случае, когда априорный класс конечен и состоит из автоматов, число состояний которых не превосходит числа состояний эталона, а сам эталон обладает дополнительными свойствами, важными в приложениях теории автоматов. Ряд этих критериев был получен с единых позиций сведением задачи анализа фрагментов с целью выявления свойства «быть представлением» к задаче анализа раскрасок некоторых графов. Приведены результаты по оценке сложности задачи распознавания представлений автоматов. Используя полученные характеризационные теоремы, доказана NP-полнота указанной задачи распознавания для ряда случаев. Кроме того, получены неулучшаемые оценки длин контрольных экспериментов, определяющие предельные нижние границы этих длин для экспериментов с любым эталоном относительно рассмотренных классов автоматов.

Как указывалось выше, в последнее время в прикладных задачах возникает необходимость рассматривать потенциально бесконечные классы, заданные финитными дескрипторами. Рассмотрены два типа таких дескрипторов: недетерминированные автоматы и маркеры-идентификаторы состояний специального вида. Введены два вида финитно определённых классов, соответствующие этим дескрипторам. Исследуется структура этих классов. Особое внимание уделяется свойствам контрольных и распознающих экспериментов относительно этих классов.

Предлагаемый обзор содержит ряд окончательных результатов, однако они являются лишь очередным шагом в исследовании задач анализа и синтеза автоматов по их поведению, которые постоянно наполняются новым содержанием и требуют дополнительных усилий и средств их разрешения.

1. Основные определения и базовые результаты

1.1. Автоматы: эксперименты и идентификаторы

Напомним основные понятия теории автоматов, которые можно найти, например, в [37].

Автоматом (Мили) называется система $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y — алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, $\delta \subseteq S \times X \times S$, $\lambda \subseteq S \times X \times Y$ — функции переходов и выходов. Как обычно, через $\delta(s, x)$ ($\lambda(s, x)$) обозначается множество тех элементов $s' \in S$ ($y' \in Y$), для которых $(s, x, s') \in \delta$ ($(s, x, y') \in \lambda$). Автомат называется детерминированным, если δ и λ являются (частичными) отображениями из $S \times X$ в S и Y соответственно. Автомат называется всюду определённым, если $\delta(s, x)$ и $\lambda(s, x)$ определены для всех $s \in S$ и $x \in X$. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы рассматриваем автоматы, у которых области определения функций переходов и выходов совпадают. Для автомата A область определения обозначим через $\mathrm{Dom}\, A$, а область значений функции f через $\mathrm{Im}\, f$.

Пусть $S' \subset S$ и $\delta(S', x) = \bigcup\limits_{s \in S'} \delta(s, x)$, $\lambda(S', x) = \bigcup\limits_{s \in S'} \lambda(s, x)$. Распространим функции автомата на множество X^* по следующим формулам: $\delta(s, e) = s$, $\delta(s, px) = \delta(\delta(s, p), x)$, $\lambda(s, e) = e$, $\lambda(s, px) = \lambda(s, p)\lambda(\delta(s, p), x)$, где $s \in S$, $x \in X$, $p \in X^*$. Будем говорить, что вход-выходное слово $w = (p, q)$ порождается состоянием s автомата A, если $q \in \lambda(s, p)$. С каждым состоянием s ассоциируется множество λ_s всех вход-выходных слов, порождаемых этим состоянием. Если автомат A детерминированный, то λ_s является (частичным) отображением из X^* в Y^* и называется автоматным отображением. Пусть $l(w)$ — длина слова $w \in \lambda_s$. Тогда $l(w) = l(p) = l(q)$. Через λ_s^i обозначим множество всех вход-выходных слов длины i, порождаемых состоянием s. Автомат A удобно задавать в виде графа переходов, вершинами которого являются состояния из S, а дугами — четвёрки (s, x, y, t), где $t \in \delta(s, x)$, $y \in \lambda(s, x)$. Пара (x, y) называется отметкой дуги, s — её началом, а t — концом. В дальнейшем иногда будем отождествлять автомат со списком всех дуг его графа. Если не оговорено противное, считаем, что автомат имеет хотя бы одну дугу. Состояние t называется достижимым из s, если $t \in \delta(s, p)$ для некоторого $p \in X^*$. Автомат называется сильно связным, если его граф переходов сильно связен. Состояние s называется преходящим в A, если s не является концом ни одной дуги автомата A. Автомат, граф переходов которого не имеет циклов, назовём ацикличным. Если необходимо, алфавиты и функции автомата будем снабжать индексами.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$, $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ — некоторые автоматы. Гомоморфизмом автомата A в автомат B называется отображение φ множества S в множество T, для которого если дуга (s_1, x, y, s_2) принадлежит автомату A, то дуга $\big(\varphi(s_1), x, y, \varphi(s_2)\big)$ принадлежит B. Гомоморфизм φ называем моно- или эпиморфизмом, если φ — взаимно-однозначное отображение или отображение на множество T соответственно. Наличие гомоморфизма обозначаем $A \leqslant B$, а мономорфизма — $A \subseteq B$. Гомоморфизм, являющийся одновременно моно- и эпиморфизмом, назовём изоморфизмом.

Гомоморфизм называется полным, если для всех дуг (t_1, x, y, t_2) автомата B, для которых $t_1 \in \varphi(S)$, найдётся дуга (s_1, x, y, s_2) автомата A, для которой $\varphi(s_i) = t_1$, $i = 1, 2$. Автомат A называется подавтоматом автомата B, если существует полный мономорфизм A в B. Если φ является полным эпиморфизмом автомата A на B, то B называется гомоморфным образом A по φ, что обозначается $B = \varphi(A)$. Если φ является полным изоморфизмом автомата A на B, то они называются изоморфными. Полный изоморфизм обозначаем $A = B$. Гомоморфизм автомата в себя называем эндоморфизмом, а изоморфизм в себя — автоморфизмом.

Пусть φ — гомоморфизм автомата A в B и ψ — гомоморфизм автомата B в автомат $C = (U, X, Y, \delta_c, \lambda_c)$. Тогда через $\psi \cdot \varphi$ обозначаем гомоморфизм автомата A в C, для которого, если дуга (s_1, x, y, s_2) принадлежит автомату A, дуга $\Big(\psi\big(\varphi(s_1)\big), x, y, \psi\big(\varphi(s_2)\big)\Big)$ принадлежит C.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый автомат. В дальнейшем считаем, что множества входов и выходов автоматов конечны. Автомат, у которого конечно и множество состояний, называется конечным. Множество $U = X \times Y$ назовём внешним алфавитом автомата, оно всегда конечно. Класс всех автоматов в алфавитах X, Y обозначается через $\mathsf{N}(X, Y)$ или $\mathsf{N}(U)$. Через $\mathsf{D}(X, Y)$ или $\mathsf{D}(U)$ обозначается класс детерминированных автоматов в этих алфавитах. Класс всех конечных детерминированных автоматов обозначаем $\mathsf{D}_k(U)$, а его подкласс всюду определённых приведённых автоматов — $\mathsf{A}(U)$.

С автоматом A ассоциируется автомат Медведева $A_U = (S, U, \Delta_A)$, где U, S — множества входов и состояний соответственно, а $\Delta_A \subseteq S \times U \times S$ — отношение переходов, такое что $t \in \Delta_A\big(s, (x, y)\big)$, если $t \in \delta(s, x)$ и $y \in \lambda(s, x)$. У автоматов A и A_U графы совпадают, поэтому мы будем часто отождествлять эти автоматы.

Поведением автомата обычно называется способ взаимодействия автомата с внешней средой. Известны различные уточнения понятия поведения. В дальнейшем под поведением будут пониматься множества вход-выходных слов в алфавитах автомата, возможно с некоторой дополнительной структурой. Основным понятием при изучении поведения автомата следует считать понятие эксперимента с автоматом. В теории автоматов под экспериментом понимается процесс подачи на исследуемый автомат входных слов, наблюдения соответствующих выходных слов — реакций этого автомата — и вывода заключений об исследуемом автомате на основе априорной информации о нём и полученных вход-выходных слов. При этом функции автомата и его внутренние состояния неизвестны и целью эксперимента является их распознавание. Входные слова подаются на начальные состояния автомата. Процесс экспериментирования осуществляется алгоритмом-экспериментатором.

Уточним понятия эксперимента. Автомат A называется слабо инициальным, если выделено подмножество его возможных начальных состояний (оно обозначается $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, S_0)$). Если S_0 состоит из одного состояния s_0, то автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ называется инициальным. В случае $S_0 = S$ автомат A называется неинициальным.

Рассмотрим слабо инициальный автомат A. Множество W вход-выходных слов назовём экспериментом автомата A, если $W \subseteq \lambda_s$ для некоторого $s \in S_0$. Зафиксируем некоторый эксперимент W автомата A. Множество P всех таких входных слов p, что $(p, q) \in W$ для некоторого $q \in Y^*$, назовём тестом, порождающим эксперимент W. Множество Q всех выходных слов q, когда p пробегает множество P, назовём наблюдением, порождённым тестом P. Эксперимент W будем понимать также как пару, состоящую из теста P и наблюдения Q, и будем писать $W = (P, Q)$.

Автомату A поставим в соответствие множество всех его экспериментов $\mathrm{Ex}(A)$. Это множество является частично упорядоченным по отношению включения $\subseteq$. Через $\mathrm{Ex}^{\max}(A)$ обозначим множество всех максимальных (по этому отношению) экспериментов автомата A. Ясно, что экспериментами этого множества могут быть λ_s для некоторых $s \in S_0$.

Автоматы A и B назовём не отличимыми никаким экспериментом, если $\mathrm{Ex}(A) = \mathrm{Ex}(B)$. Если A и B всюду определены, то последнее равенство равносильно равенству $\mathrm{Ex}^{\max}(A) = \mathrm{Ex}^{\max}(B)$. Для всюду определённых детерминированных неинициальных автоматов эти равенства равносильны соотношению $(A, B) \in \varepsilon$.

Через $\mathrm{Ex}(U)$ обозначим множество всех тех $W \subseteq U^*$, которые являются экспериментами некоторого детерминированного автомата с внешним алфавитом $U = X \times Y$.

Автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ называется инициально связным, если для любого его состояния s существует слово $p \in X^*$, для которого $s \in \delta(s_0, p)$. Класс всех конечных детерминированных инициально связных приведённых инициальных автоматов обозначим через $\mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$.

Слабо инициальному автомату $A \in \mathsf{A}(U)$ поставим в соответствие множество $L_A = \mathrm{Ex}^{\max}(A) = \{\lambda_s\}_{s\in S_0}$. Пусть $L_A^k = \{\lambda_s^k\}_{s\in S_0}$.

Распространим понятие гомоморфизма на слабоинициальные автоматы. Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A, s_0)$, $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B, T_0)$ — детерминированные слабо инициальные автоматы. Отображение $\varphi\colon S \to T$ назовём гомоморфизмом автомата A в B, если $\varphi(s) \in T_0$ для всех $s \in S_0$ и $\varphi\big(\delta_A(s,x)\big) = \delta_B(\varphi(s), x)$, $\lambda_A(s,x) = \lambda_B(\varphi(s), x)$ для всех $s \in S$, $x \in X$. Существование гомоморфизма обозначаем $A \leqslant B$, а изоморфизма — $A = B$. Ясно, что для слабо инициальных автоматов $A, B \in \mathsf{A}(U)$ равенства $A = B$ и $L_A = L_B$ равносильны.

Задачей анализа автомата A будем называть задачу исследования свойств $\mathrm{Ex}(A)$ или L_A, если $A \in \mathsf{A}(U)$. Задачей синтеза автомата будем называть задачу построения автомата (чаще всего из класса $\mathsf{A}(U)$), для которого $\mathrm{Ex}(A)$ равно заданному множеству экспериментов $E \subseteq \mathrm{Ex}(U)$.

При постановке и исследовании задачи синтеза обычно различают две ситуации: а) множество E задаётся на достаточно формализованном языке, б) множество E получено в результате экспериментирования с заданным «чёрным ящиком» — исследуемым автоматом. Последняя ситуация известна как «расшифровка» автоматов. Ей уделяется основное внимание в данной работе.

Алгоритмы-экспериментаторы расшифровки делятся на два класса: распознающие и контрольные. Алгоритм-экспериментатор (или, как обычно говорят, эксперимент) называется распознающим или идентифицирующим относительно класса $F \subseteq \mathsf{A}(U)$, если в результате экспериментирования с «чёрным ящиком» из F этот алгоритм полностью определяет его множество экспериментов, т. е. распознает его с точностью до изоморфизма.

Алгоритм-экспериментатор называется контрольным относительно класса $F \subseteq \mathsf{A}(U)$ и автомата-эталона $A \in \mathsf{A}(U)$, если в результате экспериментирования с «чёрным ящиком» из F этот алгоритм определяет, изоморфны A и «чёрный ящик» или нет.

1.1.1. Контрольные эксперименты

Рассмотрим одно из уточнений понятия «контрольный эксперимент». Контрольным экспериментом относительно $F \subseteq \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$ и $A \in \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$ назовём множество W вход-выходных слов, для которого $W \subseteq L_A = \{\lambda_{S_0}\}$ и если $W \subseteq L_B$, где $B \in F$, то $A = B$. Если W — контрольный эксперимент для A и F, то контрольный алгоритм-экспериментатор состоит в подаче на «чёрный ящик» входных слов $p \in P$, где P — тест, порождающий W, наблюдении реакции q «чёрного ящика» на p и проверке того, принадлежит (p, q) W или нет.

Для исследования свойств экспериментов автомата введём на классе $\mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$ метрику. Функция $\rho\colon \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U) \times \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U) \to \mathbb{R}^+$ с набором аксиом

1) $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$,
2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$,
3) $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$,

где $A, B, C \in \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$, называется метрикой, а пара $(\mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U), \rho)$ — метрическим пространством. Метрику ρ назовём вычислимой, если существует алгоритм вычисления расстояния $\rho(A, B)$ для произвольных $A, B \in \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$.

Метрику в классе автоматов можно вводить различными способами, но особенно отметим метрику β: $\beta(A, B) = 0$, если $A = B$, $\beta(A, B) = \frac{1}{k}$, если $L_A^k \neq L_B^k$ и $L_A^{k-1} = L_B^{k-1}$. Метрику β назовём бэровской.

Бэровская метрика β является вычислимой, поскольку если $A \neq B$, то $L_A^k \neq L_B^k$ для всех $k \geqslant n_A + n_B - 1$, где $n_A = |S|$, и следовательно, $\rho(A, B) \geqslant \frac{1}{k}$ для таких k.

Окрестностью с центром $A \in \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$ и радиусом $r \in \mathbb{R}^+$ назовём множество автоматов

$$O_r(A) = \{B \mid B \in \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U),\ \rho(A, B) < r\}.$$

Автомат A является предельным автоматом класса $F \subseteq \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$, если для любого $r > 0$ класс $O_r(A) \cap (F - \{A\})$ непуст. Через $\lim F$ обозначим множество всех предельных автоматов класса F.

Для бэровской метрики β и произвольных $F \subseteq \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$, $A \in \mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$ справедлив следующий критерий существования контрольного эксперимента [43].

Теорема 1.1. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *существует контрольный эксперимент относительно F и A*;
2) *множество L_A^k является контрольным экспериментом относительно A и F для некоторого k*;
3) $O_{\frac{1}{k}}(A) \cap F \subseteq \{A\}$ *для некоторого k*;
4) $O_{\frac{1}{k}}(A) \cap F$ — *конечное множество для некоторого k*;
5) $A \notin \lim F$.

Этот критерий показывает, что в бэровской метрике β процесс вывода заключений в процессе экспериментирования сводится к проверке условия 3.

Если класс F конечен, то существует верхняя оценка t числа состояний автоматов из $F \cup \{A\}$, и поэтому L_A^{2t} является контрольным экспериментом. Для произвольного бесконечного класса F критерий неконструктивен, однако далее будут рассмотрены такие бесконечные классы, для которых этот критерий конструктивен.

1.1.2. Фрагменты автомата

Задать автомат — значит задать его алфавиты и функции. Функции автомата удобно задавать графом, который, в свою очередь, задаётся списком дуг. Дуга (s, x, y, t) несёт следующую локальную информацию об автомате: если известно, что он находится в состоянии s, и известен входной сигнал x, то автомат перейдёт в состояние t и выдаст на выходе сигнал y. Поскольку имена начал и концов дуг известны точно, то список дуг однозначно превращается в граф автомата отождествлением вершин с одинаковыми именами.

Если автомат известен частично, то будем считать, что эта частичная информация задана графом, в котором частичность проявляется в том, что

1) некоторые дуги автомата неизвестны полностью;
2) некоторые дуги автомата заданы с неопределённостью: отметка $u = (x, y)$ неизвестна и вместо неё известно некоторое подмножество U' внешнего алфавита U, причём $u \in U'$, а вместо s, t известны $S', S'' \subseteq S$, для которых $s \in S'$, $t \in S''$.

Таким образом, с неопределённостью известны как вход-выходные отметки на дугах, так и связи между дугами. Введём основное понятие — понятие фрагмента автомата.

Пусть $v_i = U_{i1}U_{i2}\ldots U_{ik}$ — слова в алфавите 2^U, $i = 1, 2$, т. е. $U_{ij} \subseteq U$ для всех i, j. Если $U_{1j} \subseteq U_{2j}$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant k$, то первое слово v_1 назовём уточнением второго слова v_2, а второе — расширением первого (обозначение: $v_1 \subseteq v_2$). Если слово v_i понимать как терм в алгебре Клини, определяющий язык в алфавите U, т. е. считать, что $v_i = \{u_1 \ldots u_k \mid u_j \in U_{ik}\}$, то последнее включение совпадает с обычным теоретико-множественным включением. Распространим введённое включение на языки в алфавите 2^U. Пусть V_i — множество слов в этом алфавите, $i = 1, 2$. Если для каждого $v_1 \in V_1$ найдётся его расширение $v_2 \in V_2$, то V_1 назовём уточнением V_2, а V_2 — расширением V_1 (обозначение: $V_1 \subseteq V_2$). Если V_1 понимать как объединение языков $v \in V_i$, то последнее включение не противоречит теоретико-множественному включению.

Пусть $R_i = (T_i, 2^U, \Delta_i)$ — автоматы Медведева, $i = 1, 2$, из класса $\mathsf{N}(2^U)$. Пусть $\varphi\colon T_1 \to T_2$ — отображение, для которого если (t_1, U_1, t_2) — дуга автомата R_1, то найдётся такое уточнение $U_2 \subseteq U_1$, что $\bigl(\varphi(t_1), U_2, \varphi(t_2)\bigr)$ — дуга автомата R_2. В отличие от ранее введённого гомоморфизма, отображение φ будем называть слабым гомоморфизмом. Факт существования слабого гомоморфизма обозначим $R_1 \propto R_2$.

Обозначим $\mathsf{D}_k(X, Y)$ класс всех конечных детерминированных, возможно частичных, автоматов, у которых области определения функций совпадают. Пусть A — некоторый автомат из этого класса. Автомат $R \in \mathsf{N}(2^U)$ назовём фрагментом автомата A, если $R \propto A_u$. Отождествляя A_u и A, последнее включение также будем записывать как $R \propto A$. Фрагмент R назовём непосредственным, если отметка каждой его дуги состоит из одной буквы внешнего алфавита U и R является детерминированным автоматом, т. е. если $R \in \mathsf{D}(U)$. В противном случае фрагмент называется косвенным.

Рассмотрим примеры фрагментов автомата, проясняющие смысл этого понятия. Рассмотрим вначале непосредственные фрагменты. Пусть автомат A порождает вход-выходное слово w. Тогда строчный автомат $R(w)$ является конечным непосредственным фрагментом автомата A, полученным при наблюдении входов и выходов автомата. Ясно, что в общем случае существует несколько гомоморфизмов фрагмента $R(w)$ в автомат A. Для любого множества W вход-выходных слов, порождаемых этим автоматом, автомат $R(W)$ является его фрагментом. Если $W \in \mathrm{Ex}(A)$, то дерево $D(W)$ тоже является фрагментом автомата A. Поскольку переход от $W \in \mathrm{Ex}(A)$ к $D(W)$ взаимно-однозначен, то, используя вольность речи, можно считать, что все эксперименты из $\mathrm{Ex}(A)$ и их прямые суммы являются фрагментами автомата. Ясно, что $D(\lambda_s)$ — фрагмент автомата A для всех $s \in S$. Кроме этого, сам автомат и все его подавтоматы являются его непосредственными фрагментами.

Рассмотрим некоторые косвенные фрагменты автомата A. Если автомат порождает на выходе слово $q = y_1 \ldots y_k$, то q можно понимать как слово $v = (X \times y_1) \ldots (X \times y_k)$ в алфавите 2^U, и строчный автомат $R(v)$ является конечным косвенным фрагментом, полученным при наблюдении только выходов автомата. Если A породил вход-выходные слова w_1, w_2 и известно, что от порождения слова w до начала порождения слова w_2 прошло k тактов работы автомата, то получаем слово $v = w_1 U^k w_2$ в алфавите 2^U, и строчный автомат $R(v)$ является косвенным фрагментом автомата. Из этих примеров ясно, что аналогично строятся косвенные фрагменты, если в процессе экспериментирования с автоматом A в течение некоторого конечного интервала работы автомата не наблюдаются те или иные компоненты входного и выходного векторов (в случае когда автомат имеет структурные входы и выходы).

Из приведённых рассуждений следует, что фрагменты являются гибким средством описания функционирования автомата и охватывают такие важные частные случаи, как эксперименты, ограниченно-детерминированные функции, наблюдения и т. п.

Пусть $\mathsf{F}(A)$ — класс всех фрагментов автомата $A \in \mathsf{D}_k(U)$. Согласно сказанному выше всякий эксперимент входит в этот класс. Если $R \in \mathsf{N}(U)$ конечен, то существует тривиальный алгоритм проверки того, является ли R фрагментом автомата A. Поэтому подкласс $\mathsf{F}_k(A)$ конечных фрагментов автомата A всегда бесконечен и рекурсивен. Пусть $\mathsf{F}(U) = \bigcup \mathsf{F}(A)$, где объединение выполняется по всем $A \in \mathsf{D}_k(U)$, есть класс всех фрагментов в алфавите 2^U. Легко убедиться, что этот класс является собственным подклассом класса $\mathsf{N}(2^U)$ и подкласс $\mathsf{F}_k(U)$ конечных фрагментов бесконечен, рекурсивен и включает в себя класс автоматов $\mathsf{D}_k(U)$.

Таким образом, определены два класса объектов: класс автоматов $\mathsf{D}(U)$ и класс фрагментов $\mathsf{F}(U)$, а также отношение φ дескрипции «автомат—фрагмент», т. е. $(A, R) \in \varphi$, если $A \in \mathsf{D}_k(U)$ и $R \infty A$. В [15] автомату $A \in \mathsf{A}(U)$ ставится в соответствие класс его фрагментов $\mathsf{F}(A)$, а фрагменту R — класс $\mathsf{A}(R) \subseteq \mathsf{A}(U)$ всех конечных детерминированных всюду определённых приведённых автоматов A, для которых $R \infty A$. При этом говорят, что R описывает класс $\mathsf{A}(R)$ или что R определяет A с точностью $\mathsf{A}(R)$. В рамках классов $\mathsf{F}(A)$ и $\mathsf{A}(R)$ в [15, 18] систематически исследуются свойства фрагментов различных видов.

1.1.3. Идентификаторы состояний автомата

Пусть A — некоторый конечный детерминированный автомат с совпадающими областями определения функций переходов и выходов, т. е. $A \in \mathsf{D}_k(U)$. Этот автомат далее будем называть эталоном. Рассмотрим такие фрагменты эталона, которые позволяют однозначно определять его внутренние состояния.

Пусть R — некоторый фрагмент эталона и t — некоторое произвольное зафиксированное состояние фрагмента. Фрагмент с зафиксированным состоянием обозначим R_t. Фрагмент R_t назовём идентификатором состояния s эталона, если для любого слабого гомоморфизма φ фрагмента в эталон выполняется равенство $\varphi(t) = s$. Этот фрагмент назовём идентификатором состояний эталона, если R_t является идентификатором некоторого состояния s эталона A.

С введёнными понятиями фрагмента автомата, отношения дескрипции «фрагмент—автомат», идентификатора состояний автомата связан целый ряд хорошо известных и старейших задач теории автоматов, которые решались для конкретных видов автоматов и их фрагментов. Это задачи определения внутреннего состояния автомата путём эксперимента с ним [12, 55], задачи синтеза автомата по заданному фрагменту (эксперименту [5,43], анкетным языкам [9,10]), задачи сравнения поведения автоматов (эквивалентность, неотличимость при простом или кратном эксперименте), задачи контроля и распознавания автоматов. Более подробно эти связи рассмотрены в [15, 16, 18], где также показано, что идентификаторы являются мощным и адекватным средством исследования свойств фрагментов автомата и особенно его представлений.

1.1.4. Маркеры состояний автомата

Пусть A — некоторый автомат из $\mathsf{A}(U)$, M_A — множество всех вход-выходных сигналов (x, y), для которых существует такое единственное состояние s этого автомата, что $(x, y) \in \lambda_s$. Другими словами, M_A — множество всех начальных идентификаторов состояний длины 1 автомата A. Определим отношение дескрипции правилом $\varphi \in \mathsf{A}(U) \times 2^U$, $\varphi(A) = M_A$. Далее будет рассмотрена следующая задача. Произвольно зафиксируем некоторое множество $M \subseteq U$. Элементы этого множества назовём маркерами. Рассмотрим класс $\mathsf{A}(U, M)$ всех тех автоматов A, для которых $M_A \supseteq M \cap \Phi_A$. Состояние автомата $A \in \mathsf{A}(U, M)$, порождающее некоторый маркер, назовём маркированным (отмеченным). Исследуем структуру класса $\mathsf{A}(U, M)$, его интересные подклассы и его дополнения до $\mathsf{A}(U)$. Рассмотрим также кратные контрольные и распознающие эксперименты для этого класса и его подклассов.

1.1.5. Характеризаторы классов автоматов, не отличимых экспериментами

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ — произвольный детерминированный конечный всюду определённый автомат. Пусть P — некоторое множество входных слов, называемое далее тестом. Каждое состояние s автомата и этот тест порождают эксперимент $W_s = \big\{\big(p, \lambda_A(s, p)\big)\big\}$, $p \in P$. Множество всех экспериментов автомата A, порождённых этим тестом, обозначим через $\mathrm{Ex}_p(A)$, т. е. $\mathrm{Ex}_p(A) = \{W_s\}_{s \in S}$.

Пусть автомат $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ тоже конечный, детерминированный и всюду определённый. Будем говорить, что A не отличим от B экспериментами, порождёнными тестом P, если $\mathrm{Ex}_p(A) \subseteq \mathrm{Ex}_p(B)$. Отношение неотличимости такими экспериментами обозначим γ_P. Оно рефлексивно, транзитивно, в общем случае не антисимметрично и является предпорядком. Этот предпорядок порождает эквивалентность $\rho_P = \gamma_P \cap \gamma_P^{-1}$, т. е. $(A, B) \in \rho_P$, если $\mathrm{Ex}_P(A) = \mathrm{Ex}_P(B)$. Эту эквивалентность назовём P-неотличимостью, а автоматы P-неотличимыми.

Пусть $\mathsf{P} \subseteq 2^{x^*}$ — некоторое множество тестов. Оно порождает предпорядок $\gamma_{\mathsf{P}} = \bigcap\limits_{P \in \mathsf{P}} \gamma_P$ и эквивалентность $\rho_{\mathsf{P}} = \bigcap\limits_{P \in \mathsf{P}} \rho_P$.

Легко убедиться, что класс $\varepsilon(A)$ конечных детерминированных всюду определённых автоматов, не отличимых от A никаким экспериментом, бесконечен. Поскольку $\varepsilon \subseteq \rho_{\mathsf{P}}$ для любых P, то класс $\rho_{\mathsf{P}}(A)$ тоже бесконечен. Для того чтобы сделать более прозрачной структуру этого класса, в дальнейшем факторизуем его по ε, т. е. будем считать, что ρ_{P} задано на классе приведённых автоматов.

В [18] осуществляется общий подход к изучению свойств класса $\rho_{\mathsf{P}}(A)$ автоматов, P-неотличимых от A, для различных видов тестов P, т. е. автоматов, не отличимых экспериментами различного вида. Рассматривались отношения неотличимости автоматов экспериментами ограниченных высоты и кратности, экспериментами ограниченной высоты, простыми экспериментами и т. п.

При рассмотрении неотличимых автоматов основное внимание уделяется следующим задачам. Пусть α — некоторое отношение неотличимости автоматов. Задачей характеризации отношения α назовём задачу нахождения конструктивных условий, при которых автоматы находятся в этом отношении. Эти условия могут быть выражены в различных терминах. Наш подход к характеризации заключается в следующем: изучение исходного отношения α заменяется изучением другого, в некотором смысле более «удобного», хорошо известного характеристического отношения β. Для этого автомату ставится в соответствие (зависящий от α и β) некоторый автомат-характеризатор $\chi(A)$ так, чтобы $(A, B) \in \alpha$ выполнялось тогда и только тогда, когда $\big(\chi(A), \chi(B)\big) \in \beta$. В связи с этим возникают задача анализа (перехода от A к характеризатору) и обратная ей задача синтеза (построения A по заданному характеризатору). Вторая цель, для которой строится характеризатор, — исследование структуры класса $\alpha(A)$. Для вышеуказанных отношений удалось построить характеризаторы и с их помощью найти критерии конечности этих классов, выделить общую часть всех автоматов из класса. При этом важную роль играют соответствующие идентификаторы.

Определим характеризатор для отношения неотличимости автоматов экспериментами кратности не больше r и высоты не больше i. Пусть $A, B \in \mathsf{A}(U)$. Пусть

$$\mathrm{Ex}_{ri}(A) = \{w \mid w \in \mathrm{Ex}(A),\ r(w) \leqslant r,\ h(w) \leqslant i\}.$$

Тогда полагаем $(A, B) \in \rho_{ri}$, если $\mathrm{Ex}_{ri}(A) = \mathrm{Ex}_{ri}(B)$. Введённое отношение назовём отношением (r, i)-неотличимости.

Напомним, что $v \leqslant w$ означает, что слово v является начальным отрезком слова w. Пусть $W \subseteq U^*$. Тогда $W^{\max}$ обозначает множество всех максимальных экспериментов (по $\leqslant$) из множества W. Пусть $E = \{W_1, \ldots, W_k\}$ — некоторое множество экспериментов. Эксперимент W_j назовём максимальным в E, если $W_j = W_j^{\max}$ и $W_j \leqslant W_i$ влечёт $W_i \subseteq W_j$.

Рассмотрим множество $\mathrm{Ex}_{ri}(A)$. Оно конечно, поэтому для каждого $W \in \mathrm{Ex}_{ri}(A)$ найдётся максимальный эксперимент из этого множества. Подмножество всех максимальных экспериментов обозначим Φ_A^{ri}. Каждый такой максимальный эксперимент W состоит из попарно несравнимых по $\leqslant$ слов длины i и кратности

$$r(W) = \begin{cases} r & \text{при} \quad m^i \geqslant r, \\ m^i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $m = |X|$. По автомату A построим $\chi(A, \rho_{ri})$ следующим образом. Множество $W = W_1 \cup \ldots \cup W_k$, где $W_j \in \Phi_A^{ri}$ для всех j, $i \leqslant j \leqslant k$, называется полным относительно Φ_A^{ri}, если одновременно выполняются три условия:

1) для всякого входного слова p длины i найдётся выходное слово q такой же длины, что $(p, q) \in W$;
2) если $(p, q_1), (p, q_2) \in W$, то $q_1 = q_2$;
3) если $Q \leqslant W$ и $r(Q) = r$, то $Q \in \Phi_A^{ri}$.

Первые два условия равносильны существованию такого конечноавтоматного отображения $\lambda\colon X \to Y$, что $\lambda^i = W$.

По множеству Φ_A^{ri} построим возможно недетерминированный автомат $G_{ri}(A) = (G, X, Y, \Lambda, B, \Delta, \Lambda)$, у которого множество состояний G равно множеству всех полных множеств вход-выходных слов, составленных из экспериментов, входящих в Φ_A^{ri}, всеми возможными способами. Функции переходов Δ и выходов Λ этого автомата определяются следующими формулами. Пусть $W, Q \in G$ и $x \in X$, $y \in Y$. Тогда

$$\Delta(W, x) = \bigl\{Q \mid \exists\, y\ \bigl[\bigl((x, y) \setminus W\bigr) \leqslant Q\bigr]\bigr\}, \quad \Lambda(W, x) = \{y \mid (x, y) \leqslant W\}.$$

Напомним, что $v \setminus W = \{w \mid vw \in W\}$. В случае когда $i = 1$ и $(x, y) \in W$, имеем $(x, y) \setminus W = e$, где e — пустое вход-выходное слово. В теории автоматов принято, что $e \leqslant Q$ для всех Q. Поэтому в этом случае $\Delta(W, x) = G$ для всех $x \in X$. Из условия 1) для полных относительно Φ_A^{ri} множеств следует, что $|\Delta(W, x)| = 1$ для всех $W \in G$ и $x \in X$.

В [18] показано, что автомат $G_{ri}(A)$ является приведённым, в общем случае недетерминированным и справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *$(A, B) \in \rho_{ri}$ тогда и только тогда, когда $G_{ri}(A) = G_{ri}(B)$.*

Это утверждение даёт конструктивный критерий (r, i)-неотличимости двух автоматов. Оно показывает, что $G_{ri}(A)$ является характеризатором автомата A относительно ρ_{ri}, поэтому обозначения $G_{ri}(A)$ и $\chi(A, \rho_{ri})$ будем считать синонимами. Заметим, что построенный характеризатор не является единственно возможным.

Таким образом, можно определить отношение дескрипции: $(A, G) \in \varphi$, если $G = G_{ri}(A)$. По определению $\varphi(A) = G_{ri}(A)$ и $\varphi^{-1}\bigl(G_{ri}(A)\bigr) = \rho_{ri}(A)$.

Аналогичные характеризаторы определены в [15, 18] для классов $\upsilon_r(A)$, где $\upsilon_r = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \rho_{ri}$, для $\upsilon_1(A)$, для классов $\varepsilon_i(A)$, где $\varepsilon_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \rho_{ri}$, и ряда других отношений. Для этих способов дескрипции рассмотрены и в основном решены проблемы анализа дескриптора и представления автомата дескриптором с точностью до изоморфизма.

1.1.6. Спецификация автоматов с помощью недетерминированного автомата

При синтезе автоматов рассматриваются различные ограничения на свойства синтезируемого автомата (верхняя граница числа состояний, функция неисправностей и др. [15]). Одним из наиболее естественных является ограничение на возможное поведение автомата, задаваемое множеством W вход-выходных слов во внешнем алфавите автомата. При этом множеству W ставится в соответствие класс инициальных автоматов $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, a_0) \in \mathsf{A}(U)$, для которых $\lambda_{a_0} \subseteq W$, или класс инициальных автоматов $A \in \mathsf{A}(U)$, для которых $W \subseteq \lambda_{a_0}$. Во втором случае $D(W)$ является фрагментом автомата A, и эта ситуация рассматривалась ранее. Рассмотрим первый случай. Событие W часто задаётся с помощью слабоинициального недетерминированного автомата-спецификации, а автоматы A, у которых $\lambda_{a_0} \subseteq W$, называются реализациями этой спецификации.

Пусть $C = (S, X, Y, \delta_c, \lambda_c, S_0)$ — слабоинициальный конечный недетерминированный автомат, у которого области определения функций совпадают. Автомат C порождает событие $L(C) = \bigcup\limits_{s \in S_0} \lambda_s$. Инициальный автомат $A \in \mathsf{A}(U)$ называется реализацией автомата C, если выполняется соотношение $\lambda_{a_0} \subseteq L(C)$. Таким образом, имеет место отношение дескрипции: $(A, C) \in \varphi$, если A — реализация спецификации C. Тогда $\varphi^{-1}(C)$ определяет класс реализаций автомата C, а $\varphi(A)$ — класс спецификаций автомата A.

Понятие, аналогичное реализации, первоначально исследовалось в теории сверхъязыков А. Чёрчем, Б. А. Трахтенбротом, Р. Макнотоном (см. [50, гл. 2]). В [49] введено понятие реализации (в оригинале — интеграла) множества W и найдена характеризация наименьшей в некотором смысле спецификации для заданного класса реализаций. Реализации данной спецификации неоднократно применялись при сертификации протоколов (см., например, [22]). В [40] найдены критерии пустоты, одноэлементности класса $\varphi^{-1}(C)$, предложен алгоритм синтеза минимальной по числу состояний реализации.

Далее будет рассмотрено несколько отличное понятие реализации и исследована структура класса реализаций данной спецификации.

1.2. Фрагменты автоматов

Пусть A — некоторый инициальный автомат из класса $\mathsf{D}_k(U)$ детерминированных конечных автоматов во внешнем алфавите $U = X \times Y$. Пусть также

$\mathsf{F}(A)$ — класс всех фрагментов этого автомата. Рассмотрим их простейшие свойства. Пусть R, Q — фрагменты автомата A.

Легко убедиться, что $R \propto Q$ влечёт $\mathsf{A}(R) \supseteq \mathsf{A}(Q)$. Поэтому можно говорить, что Q содержит не меньше информации об автомате, чем R. Напомним, что $\mathsf{A}(R) \subseteq \mathsf{A}(U)$ — класс всех конечных всюду определённых приведённых автоматов, фрагментом которых является R.

Отношение $\propto$ является предпорядком и порождает эквивалентность: $R \equiv Q$, если $R \propto Q \propto R$. Класс всех фрагментов, эквивалентных R, обозначим $\mathsf{K}(R)$. Из определения следует, что если $Q \propto R$, то $(R + Q) \in \mathsf{K}(R)$. Таким образом, класс $\mathsf{K}(R)$ замкнут по сложению автоматов.

Рассмотрим конечные фрагменты. Пусть фрагмент R конечен и $\mathsf{K}_K(R)$ — класс всех конечных фрагментов, ему эквивалентных. По сказанному выше этот класс рекурсивен. Множество $\{nR\}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует бесконечную цепь фрагментов из $\mathsf{K}_K(R)$, и следовательно, этот класс бесконечен. Обозначим через $\mathsf{M}(R)$ класс всех конечных Q, не эквивалентных R, для которых $Q \propto R$. Рассмотрим отображение φ: $\mathsf{M}(R) \to \mathsf{K}_K(R)$, для которого $\varphi(Q) = Q + R$. Из определения следует, что если $Q_1 \neq Q_2$, то $\varphi(Q)_1 \neq \varphi(Q)_2$. Поскольку $R \notin \mathsf{M}(R)$, фрагменты nR не имеют прообразов по φ. Следовательно, φ — инъекция, но не биекция. Так как $\mathsf{M}(R) = \bigcup \mathsf{K}(A)$, где объединение происходит по всем $Q \in \mathsf{M}(R)$, то $\left|\bigcup \mathsf{K}_K(Q)\right| \leqslant |\mathsf{K}_K(R)|$.

Ядром конечного фрагмента R назовём такой его подавтомат Q, для которого существует полный слабый гомоморфизм φ, причём $Q = \varphi(R)$, а всякий слабый эндоморфизм фрагмента Q в себя является полным автоморфизмом. По определению ядро фрагмента входит в $\mathsf{K}_K(R)$.

Теорема 1.3. *Для каждого конечного фрагмента существует единственное с точностью до изоморфизма ядро.*

Операция выделения ядра R' фрагмента R является операцией открывания, так как для неё выполняются соотношения направленности (т. е. $R' \propto R$), идемпотентности (т. е. $(R') = R$) и изотонности (т. е. $R_1 \propto R_2$ влечёт $R_1' \propto R_2'$).

Из теоремы 1.3 вытекает ряд следствий, характеризующих эквивалентные фрагменты.

Следствие 1.4.

1. *Конечные фрагменты эквивалентны тогда и только тогда, когда их ядра равны (изоморфны).*
2. *Ядро конечного фрагмента является наименьшим по включению элементом в классе $\mathsf{K}_K(R)$.*

Фрагмент, совпадающий со своим ядром, называем ядерным. Очевидно, что всякий древовидный непосредственный фрагмент является ядерным, но ациклический непосредственный фрагмент ядерным может не быть. В случае когда автомат принадлежит $\mathsf{A}(X, Y)$, он является ядерным фрагментом самого себя. Класс всех ядерных фрагментов автомата A в силу следствия 1.4 частично упорядочен отношением $\propto$. Ядро автомата $A \in \mathsf{D}_K(U)$ является его наибольшим элементом, а фрагмент, состоящий из одной дуги с отметкой $X \times Y$, — наименьшим элементом.

Конечный непосредственный фрагмент назовём правильным. Класс правильных фрагментов автомата A обозначим $\mathrm{Fr}(A)$. Выше было сказано, что отношение $\subseteq$ на нём совпадает с $\leqslant$. Класс правильных фрагментов, эквивалентных правильному фрагменту R, обозначим $\mathsf{K}_\Pi(R)$. Этот класс частично упорядочен отношением включения. Поскольку $\{nR\} \subseteq \mathsf{K}_\Pi(R)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\mathsf{K}_\Pi(R)$ бесконечен и ядро фрагмента R является его наименьшим (по следствию 1.4) элементом. Ясно, что класс $\mathsf{K}_\Pi(R)$ рекурсивен. Класс всех правильных ядерных фрагментов изоморфен $\mathrm{Fr}(A)/\!\equiv$. Ядро автомата A является его наибольшим элементом, а каждая дуга автомата A — минимальным элементом, причём других минимальных нет.

Теорема 1.5. *Класс ядерных правильных фрагментов автомата A конечен тогда и только тогда, когда A — ациклический автомат.*

Из этой теоремы следует, что для всюду определённого автомата A (поскольку он имеет циклы) класс $\mathrm{Fr}(A)$ состоит из бесконечного числа (так как класс $\mathrm{Fr}(A)/\!\equiv$ бесконечен) бесконечных классов правильных эквивалентных фрагментов.

Фрагмент R автомата A назовём тривиальным, если существует всюду определённый конечный подавтомат B автомата R, для которого $(A, B) \in \varepsilon$. Тривиальный фрагмент явно содержит в себе полное «глобальное» описание автомата A. Легко убедиться, что класс тривиальных и класс нетривиальных правильных фрагментов замкнуты по операции сложения и поэтому бесконечны. Кроме того, в классе эквивалентных фрагментов либо все фрагменты тривиальны, либо все нетривиальны.

Рассмотрим структуру класса $\mathsf{A}(R)$, который описывается некоторым фрагментом R. Назовём его классом автоматов, не отличимых этим фрагментом. Этот класс замкнут по операции объединения. Эта операция ассоциативна, коммутативна и идемпотентна, следовательно, $\mathsf{A}(R)$ является (верхней) полурешёткой. Автоматы этой полурешётки, минимальные по включению $\subseteq$, будем называть тупиковыми, а автоматы с наименьшим числом состояний — минимальными. Автомат A из этого класса назовём неразложимым, если $A = B \cup C$, где $B, C \in \mathsf{A}(R)$, влечёт $A = B$ или $A = C$.

Рассмотрим свойства порождающих множеств полурешётки неотличимых автоматов. Вначале рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть $\langle L, + \rangle$ — произвольная полурешётка, в которой операция связана с некоторым частичным порядком $\leqslant$. Подмножество $K \subseteq L$ называется порождающим для этой полурешётки, если каждый её элемент можно представить суммой конечного числа элементов из K. Минимальное по включению порождающее множество назовём базисом. Множество всех неразложимых элементов обозначим через M. Ясно, что M содержит все тупиковые элементы. Очевидно, что если K — порождающее множество, то $M \subseteq K$. Если полурешётка L конечна, то из последнего включения следует, что K — порождающее множество.

Отображение φ полурешётки L в множество $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел называется изотонным, если $l_1 \leqslant l_2$ влечёт $\varphi(l_1) \leqslant \varphi(l_2)$. Если, кроме этого, $l_1 < l_2$ влечёт $\varphi(l_1) < \varphi(l_2)$, то назовём φ не сжимающим цепи в L гомоморфизмом. Не сжимающий цепи гомоморфизм называется высотой, если $\varphi(l) = 0$ тогда и только тогда, когда l — тупиковый элемент, и $\varphi(l) = n$, если для некоторого $l_1 < l$ выполняется $\varphi(l_1) = n - 1$. В этом случае $\varphi(l)$ называется высотой элемента l. Известно [45], что для любой полурешётки несжимающий гомоморфизм существует тогда и только тогда, когда существует высота.

Пусть $\langle \mathsf{A}, U \rangle$ — произвольная полурешётка, где $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}(X, Y)$. Отображение φ этой полурешётки в $\mathbb{N}$, для которого $\varphi(A)$ равно числу состояний автомата A, является несжимающим гомоморфизмом.

Следствие 1.6. *Множество неразложимых элементов полурешётки является единственным её базисом, а порождающие её множества образуют булеву алгебру.*

Полурешётка $\mathsf{A}(R)$ является интересным примером полурешётки, для которой выполняется это следствие. В бесконечной полурешётке A высота её элементов не является ограниченной. Покажем, что высота её неразложимых элементов в общем случае тоже не является ограниченной.

Пусть $A \in \mathsf{A}(X, Y)$. Множество $\Phi_A = \bigcup\limits_{s \in S} \lambda_{As}$ называется множеством всех простых экспериментов этого автомата. Пусть $R = R(\Phi_A)$ — бесконечный непосредственный фрагмент автомата A. Рассмотрим бесконечную цепь $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$, где $A_k \in \mathsf{A}(RA)$ и $R = R(\Phi_A)$ имеет множество состояний $\{0, 1, \ldots, k\}$ и представлен на рис. 1. Класс $\mathsf{A}(R)$ бесконечен и имеет

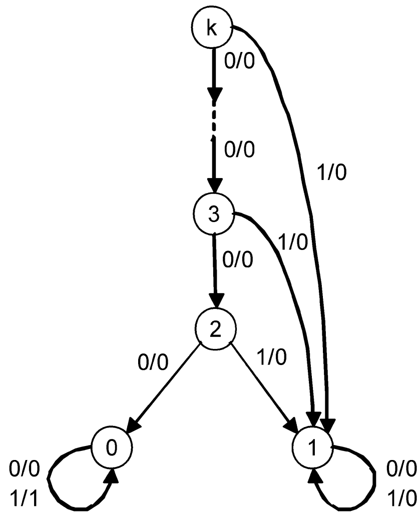

Рис. 1

единственный тупиковый автомат A_1. Напомним, что цепь $l_1 < l_2 < \ldots < l_k$ называется максимальной в L, если для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$, из включения $l_i \leqslant l \leqslant l_{i+1}$ следует, что $l_i = l$ или $l_{i+1} = l$. Автоматы $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ образуют единственную максимальную цепь от A_1 до A_k, и все эти автоматы неразложимы. Отсюда следует, что в данной полурешётке высота неразложимых элементов может быть сколь угодно большой.

Продолжим рассмотрение свойств полурешётки A. Далее считаем, что полурешётка A выпукла, т. е. если $A \subseteq B$ и $A, B \in \mathsf{A}$, то для всех $C \in \mathsf{A}(X, Y)$ из $A \subset C \subset B$ следует $C \in \mathsf{A}$. Рассмотрим свойства A как системы $(\mathsf{A}, \cup, \cap)$. Операция пересечения на A в общем случае частична. Пусть B — некоторый автомат из этой системы. Множество всех автоматов $A \in \mathsf{A}$, для которых $A \supseteq B$, называется главным двойственным идеалом (или фильтром) [45], порождённым автоматом B. Главный двойственный идеал, порождённый тупиковым автоматом, называется максимальным.

Следствие 1.7. *Каждое выпуклое и замкнутое по объединению множество* $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{A}(X, Y)$ *равно объединению дистрибутивных решёток с нулём, каждая из которых является максимальным двойственным идеалом, порождённым тупиковым элементом.*

Класс $(\mathsf{A}(R), U)$ является выпуклой полурешёткой, т. е. является примером системы, для которой условие следствия выполняется, и тем самым $\mathsf{U}(R)$ является объединением таких решёток.

Ядром системы A назовём пересечение всех автоматов из этого класса, т. е. наибольший автомат, включающийся во все автоматы класса. Для некоторых систем ядро может быть пусто. Класс $\mathsf{A}(R)$ характеризует «размытость», с которой фрагмент R описывает автомат, а ядро класса определяет ту часть автомата, которую фрагмент описывает однозначно. Из следствия 1.7 вытекает, что класс $\mathsf{A}(R)$ является дистрибутивной решёткой тогда и только тогда, когда он имеет единственный тупиковый автомат, совпадающий с ядром. На рис. 1 автомат A_1 является единственным тупиковым в классе $\mathsf{A}(R)$, где $R = R(\Phi_{A_1})$, поэтому этот класс является дистрибутивной решёткой.

Обычно представляет интерес не сам класс $\mathsf{A}(R)$, а некоторый его подкласс (например, подкласс минимальных автоматов). Одним из способов выделения такого подкласса является запрещение некоторого поведения у его элементов. Пусть $R = (T, 2^U, \Lambda)$ — некоторый автомат Медведева. Назовём R кофрагментом автомата $A \in \mathsf{A}(X, Y)$, если никакая компонента связности $V \subseteq R$ не является фрагментом автомата A. Через $\mathsf{A}(R, Q)$ обозначим класс всех автоматов из $\mathsf{A}(X, Y)$, для которых R является фрагментом, а Q — кофрагментом. Ясно, что $\mathsf{A}(R, Q) = \mathsf{A}(R) - \left(\bigcup \mathsf{A}(V)\right)$, где объединение выполняется по всем компонентам связности V кофрагмента Q.

Всякий класс $\mathsf{A}(R, Q)$ является выпуклым. Действительно, если $A, B \in \mathsf{A}(R, Q)$ и $A \subseteq C \subseteq B$, то $R\,f\,A$ влечёт $R\,f\,C$, а $V \prec B$ влечёт $V \prec C$.

Пусть класс $\mathsf{A}(R, Q)$ замкнут по объединению. По следствию 1.7 он является объединением дистрибутивных решёток. Рассмотрим условия, когда этот класс является булевой алгеброй. Для этого вернёмся к рассмотрению свойств системы $(\mathsf{A}, \cup, \cap)$.

Если система A конечна и имеет единственный тупиковый автомат, то она является дистрибутивной решёткой с нулём (тупиковым автоматом) и единицей (объединение всех автоматов из A). Бесконечная система A единицы никогда не имеет. Рассмотрим условие, когда эта система является булевой алгеброй. Пусть $A \in \mathsf{A}$. На множестве S состояний автомата A введём отношение достижимости состояний: $(s_1, s_2) \in \tau$, если $\delta_A(s_1, p) = s_2$ для некоторого слова $p \in X^*$. Это отношение порождает эквивалентность $\eta = \tau \cap \tau^{-1}$, классы которой называются слоями [3]. Они являются максимальными (по $\subseteq$) сильно связными подмножествами состояний. Каждый слой S' определяет подграф $Q' = (S', U')$ (но не подавтомат) графа автомата A, где U' — множество всех тех дуг автомата A, начало и конец которых — вершины из S'. Заметим, что может быть $|S'| = 1$ и $U' = \Phi$. Граф G' для простоты тоже будем называть слоем. Слой будем называть внешним, если в автомате не существует дуги, которая начинается в другом слое, но оканчивается в G'.

Теорема 1.8. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *система* A *является булевой алгеброй*;
2) *система конечна, имеет единственный тупиковый автомат и для всех* C, D, *для которых* $B \subseteq D \subseteq C$, *если слой в автомате* D *является внешним, то и в* C *он является внешним*;
3) *система имеет единственный тупиковый автомат* B, *а множество всех неразложимых автоматов, отличных от* B, *конечно и состоит из попарно несравнимых по включению автоматов.*

Рассмотрим пример класса $\mathsf{A}(R, Q)$, для которого выполняются условия теоремы 1.8, т. е. который является булевой алгеброй. Пусть $(A, B) \in \nu_1$, если $A, B \in \mathsf{A}(U)$ и $\Phi_A = \Phi_B$. Изучение класса $\nu_1(A)$ автоматов, не отличимых никакими простыми экспериментами, начато ещё Э. Муром [44]. Легко убедиться, что $\nu_1(A) = \mathsf{A}(R, Q)$, где $R = R(\Phi_A)$, $Q = R(U^* - \Phi_A)$. Пусть A задан рисунком 2, $\Phi_A = \big((0,0) \cup (1,0)\big)^* \cup \big((0,1) \cup (1,1)\big)^*$. Нетрудно убедиться, что A является наибольшим автоматом в этом классе. Сам класс состоит из четырёх

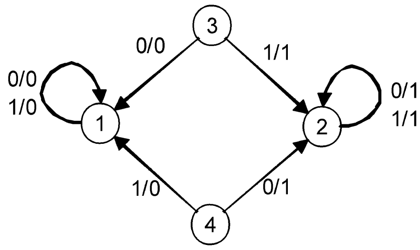

Рис. 2

автоматов: самого A и его подавтоматов, порождённых множествами состояний $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$. По теореме 1.8 этот класс является булевой алгеброй.

1.3. Идентификаторы состояний

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый конечный детерминированный неинициальный автомат-эталон, у которого области определения функций совпадают, т. е. $A \in \mathsf{D}_k(U)$. Пусть R_t — идентификатор некоторого состояния $s \in S$ эталона.

Рассмотрим взаимосвязь между идентификаторами, предпорядком ∞ и эквивалентностью $\equiv$, порождаемой этим предпорядком.

Если φ — слабый гомоморфизм фрагмента R во фрагмент Q эталона и, кроме того, $\varphi(t) = q$, то Q_q является идентификатором состояния s эталона. Следовательно, либо все фрагменты из класса эквивалентности $K(R)$ являются идентификаторами одного и того же состояния эталона, либо ни один не является идентификатором. Из бесконечности этого класса следует, что множество идентификаторов любого состояния эталона либо пусто, либо бесконечно.

Из сказанного следует простой конструктивный критерий существования идентификаторов. Пусть R_t — идентификатор состояния s эталона и φ — некоторый слабый гомоморфизм R_t в A_s. Пусть также $B_s = \varphi(R_t)$.

Теорема 1.9. *Идентификатор состояния эталона A существует тогда и только тогда, когда существует $B_s \subseteq A_s$, являющийся таким идентификатором.*

Из сказанного следует, что для каждого автомата $A \in \mathsf{A}(U)$ и каждого состояния $s \in S$ существуют идентификаторы s. Действительно, так как автомат $A \in \mathsf{A}(U)$ всюду определён и приведён, то $s \neq t$ влечёт $\lambda_s \nsubseteq \lambda_t \nsubseteq \lambda_s$. Поэтому подавтомат B_s, порождённый всеми состояниями эталона, достижимыми из s, является идентификатором состояния s.

Рассмотрим частный вид идентификаторов состояний эталона, связанный с экспериментами. С каждым состоянием s эталона ассоциируются два множества вход-выходных слов: λ_s — множество всех вход-выходных слов, начинающихся в s, т. е. порождённых состоянием s, и двойственное множество ϕ_s всех вход-выходных слов, оканчивающихся в s, т. е. таких $(p, q) \in (X \times Y)^*$, для которых найдётся такое состояние $s' \in S$, что $\delta_A(s', p) = s$ и $\lambda_A(s', p) = q$. Пусть V_1, V_2 — некоторые множества слов в алфавите 2^U. Пару (V_1, V_2) назовём окрестностью состояния s эталона, если для каждого слова $v \in V_1$ найдётся его сужение $w \in \phi_s$ и для каждого $v \in V_2$ найдётся его сужение $w \in \lambda_s$. Множество V_2 определяет автомат Медведева $D(V_2)$, V_1 — возможно бесконечный автомат Медведева $R(V_1)$. Отождествим начальное состояние автомата $D(V_2)$ и все висячие состояния автомата $R(V_1)$. Полученный автомат обозначим $D(V_1, V_2)$, а отождествлённое состояние — d. Из построения следует, что если (V_1, V_2) — окрестность состояния s эталона, то существует слабый гомоморфизм φ автомата $D(V_1, V_2)$ в A, причём $\varphi(d) = s$. Поэтому, используя вольность речи, окрестность (V_1, V_2) состояния s будем называть идентификатором состояния s эталона, если $D(V_1, V_2)$ является таким идентификатором.

Идентификатор (V_1, V_2) будем называть начальным (конечным), если $V_1 = \varnothing$ $(V_2 = \varnothing)$. Начальный (конечный) идентификатор эталона называется простым, если кратность множества V_1 (множества V_2) равна единице.

Рассмотрим примеры идентификаторов состояний. Множество вход-выходных слов $P \subseteq X^*$ называется диагностическим [12] для эталона A, если для всех состояний $s \in S$ и всех $p \in P$ реакция $\lambda(s,p)$ определена и если $s \neq t$, $s, t \in S$, то $\lambda(s,p) \neq \lambda(t,p)$ для некоторого $p \in P$. Другими словами, если P — диагностическое множество, то эксперимент λ_s/P — сужение λ_s на P — является начальным идентификатором для всех $s \in S$.

Входное слово p называется установочным [12] для A, если реакция $\lambda(s,p)$ определена для всех $s \in S$ и равенство $\lambda(s,p) = \lambda(t,p)$ влечёт равенство $\delta(s,p) = \delta(t,p)$. Ясно, что для установочного слова p вход-выходное слово $\big(p, \lambda(s,p)\big)$ является конечным идентификатором состояния $\delta(s,p)$ эталона.

Известно [12,37], что для всюду определённого приведённого эталона всегда существуют диагностические множества и установочные слова. Поэтому для такого эталона существует начальный идентификатор каждого состояния и простой конечный идентификатор хотя бы одного состояния. В [12, 37] приведены методы построения таких входных слов.

Рассмотрим условия существования окрестностей состояний, являющихся идентификаторами состояний эталона. Ясно, что если (V_1, V_2) — идентификатор состояния s, то (ϕ_s, λ_s) тоже идентификатор этого состояния. Для конечного эталона множества ϕ_s, λ_s регулярны в алгебре Клини, поэтому существует алгоритм проверки того, является ли окрестность (ϕ_s, λ_s) идентификатором состояния s.

Сформулируем более простой критерий существования идентификаторов состояний. Пусть n — число состояний эталона.

Теорема 1.10. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *существует окрестность состояния s, являющаяся его идентификатором*;
2) (ϕ_s, λ_s) *является идентификатором состояния s*;
3) *существует идентификатор (V_1, V_2) состояния s, для которого $|V_1| + |V_2| \leqslant$ $\leqslant n - 1$ и $h(V_2) \leqslant 2^{2n}$*.

По эталону построим проверочный граф $G = (T, V, \Delta)$, где $T = 2^s \times 2^s$, $V = \{+, -\} \times U$. Функцию переходов Δ определим по следующему правилу: $\Delta\big((S_1, S_2),\, +(x,y)\big) = (S_1', S_2')$, где $s \in S_i'$, если $\delta_A(t,x) = s$ и $\lambda_A(t,x) = y$ для некоторого $t \in S_i$, $i = 1,2$, $\Delta\big((S_1, S_2), -(x,y)\big) = (S_1'', S_2'')$, где $t \in S_i''$, если $\delta_A(t,x) = s$ и $\lambda_A(t,x) = y$ для некоторого $s \in S_i$, $i = 1,2$.

Проверочный граф является достаточно общей конструкцией и позволяет находить идентификаторы состояний более общего вида, чем окрестности. Для этого в проверочном графе выбираются слова $v = (\alpha_1, u_1) \ldots (\alpha_k, u_k)$, где $\alpha_j \in \{+, -\}$ и $\Delta\big((s,t), v\big) = (S_1, \varnothing)$, $S_i \neq \varnothing$. По слову v строится ациклический граф $R(v)$, множество вершин которого равно $\{1, 2, \ldots, k+1\}$, и по (α_j, u_j) строится дуга $(j, u_j, j+1)$ при $\alpha_j = +$ или дуга $(j+1, u_j, u_j)$ в противном случае. Вершина 1 называется начальной. Пусть множество $V' = (v_1, \ldots, v_i)$ такое, что для каждого $t \in S$, отличного от s, найдётся слово $v \in V'$, для которого $\Delta\big((s,t), v\big) = (S_1, \varnothing)$. Тогда в графе $R(V') = \sum\limits_{i=1}^{1} R(V_i)$ отождествим все начальные вершины и детерминизируем полученный граф. Легко убедиться, что детерминизированный граф с выделенной начальной вершиной является правильным ациклическим идентификатором состояния s эталона. Поэтому множество V' будем называть идентификатором. Класс всех таких идентификаторов состояния эталона обозначим через I_s. Каждый идентификатор W из класса I_s является множеством слов в алфавите $\{+,-\} \times U$. Пусть $W_1 \leqslant W_2$ означает, что каждое слово из W_1 является начальным отрезком некоторого слова из W_2. Это отношение является предпорядком и порождает эквивалентность $\equiv$. Через $K(W)$ обозначим класс всех идентификаторов из I_s, эквивалентных (по $\equiv$) идентификатору W.

Идентификатор W назовём минимальным в I_s, если для всех идентификаторов $W' \in I_s$ из $W' \leqslant W$ следует $W' \subseteq W$.

Теорема 1.11. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *идентификатор W минимален в $(I_s, \leqslant)$*;
2) *идентификатор W минимален в $(K(W), \subseteq)$, $K(W)$ минимален в $(I_s/{\equiv}, \leqslant)$*;
3) *множество W', полученное из W удалением хотя бы одного слова или заменой хотя бы одного слова его собственным начальным отрезком, идентификатором состояния s не является.*

Из приведённых теорем следует, что кратность минимального идентификатора не превосходит $n-1$.

Оценим высоту минимальных идентификаторов.

Теорема 1.12. *Высота минимальных идентификаторов состояний в общем случае не ограничена.*

Эта теорема показывает, что множество минимальных идентификаторов в общем случае бесконечно. В связи с этим представляет интерес задача его эффективного описания. Пусть $V = \{+,-\} \times X \times Y$. Рассмотрим вначале один способ представления конечного множества слов в алфавите одним словом в специальном алфавите.

Обозначим через Z множество всех пар (i, v), где $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $v \in V$. Пусть $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ и $w_j = v_{j1} \ldots v_{jl_j}$. Множеству W поставим в соответствие слово

$$z(W) = (1, v_{1i})(2, v_{2i}) \ldots (k, v_{ki})(1, v_{12}) \ldots (f, v_{jf})$$

в алфавите Z. Здесь g — наибольший номер слова из W, имеющего наибольшую длину $f = \max l_j$. Слово $z(W)$ назовём свёрткой множества W.

Рассмотрим преобразование χ, определённое следующим образом. Пусть $(i, w_i)(j, w_j)$ — выражение, для которого $w_i w_j \in V^*$ и $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$. Тогда

$$\chi\big((i,w_i)(j,w_j)\big)=\begin{cases}(i,w_i,w_j), & \text{если } i=j,\\ (i,w_i)(j,w_j), & \text{если } i<j,\\ (j,w_j)(i,w_i), & \text{если } j<i.\end{cases}$$

С помощью этого преобразования любое слово в алфавите Z можно единственным образом представить в виде $(i_1,w_{i1})\ldots(i_k,w_{ik})$, где $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n-1$, w_{ij} — слова в алфавите V. Таким образом, каждому слову в алфавите Z ставится в соответствие семейство $(w_{i1},\ldots,w_{ik})$ слов в алфавите V. Это семейство назовём разложением слова $z\in Z$ и обозначим его $W(z)$.

Перейдём к конструктивному описанию минимальных идентификаторов. Через Γ обозначим множество всех бинарных отношений $\gamma\subseteq\{1,\ldots,n\}\times S$. Пусть теперь Γ_n — множество всех семейств $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, где $m\leqslant n-1$ и $\gamma_i\in\Gamma$. Семейство $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ назовём определяющим, если существует и единственно такое l, $1\leqslant l<n$, что $\gamma_i(1)\neq\varnothing$ для всех $l\leqslant i\leqslant m$. Семейство $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ назовём категоричным, если оно определяющее, но никакое его собственное подсемейство определяющим не является. Произвольно зафиксируем взаимно-однозначное отображение γ_0 множества $\{1,\ldots n\}$ на S. Построим частичный конечный детерминированный акцептор $H(A)=(\Gamma_n,Z,\Delta_H,(\gamma_0),F_H)$, где Γ_n — множество состояний, Z — множество входных символов, (γ_0) — начальное состояние, F_H — множество представляющих состояний, Δ_H — функция переходов. Акцептор порождается по шагам из состояния (γ_0) по автомату A следующим образом.

Правило 1.

$$\Delta_H\big((\gamma_0),(i,v)\big)=\begin{cases}(\gamma_i) & \text{при } i=1,\\ \text{не определено} & \text{при } i>1.\end{cases}$$

Здесь $(j,s)\in\gamma$ при $v=+(x,y)$, если $\delta(\gamma_0(j),x)=s$, $\lambda(\gamma_0(j),x)=y$, и $(j,s)\in\gamma_1$ при $v=-(x,y)$, если $\delta(s,x)=\gamma_0(j)$, $\lambda(s,x)=y$.

Правило 2. Пусть состояние $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ достижимо из начального. Если $i>m+1$, то $\Delta_H\big((\gamma_1,\ldots,\gamma_m),(i,v)\big)$ не определено. Функция переходов для состояния $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ не определена также, если выполняется одно из следующих условий:

1) для некоторого $j\leqslant m$ отношение γ_j пусто;
2) семейство $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ определяющее.

В противном случае при $i\leqslant m+1$

$$\Delta_H\big((\gamma_1,\ldots,\gamma_m),(i,v)\big)=\begin{cases}(\gamma_1,\ldots,\gamma_{i-1},\gamma',\gamma_{i+1},\ldots,\gamma_m & \text{при } i\leqslant m_j,\\ (\gamma_1,\ldots,\gamma_m,\gamma'_{m+1}) & \text{при } i=m+1.\end{cases}$$

При этом в случае $i\leqslant m$ $(j,s)\in\gamma'_i$ при $v=+(x,y)$, если $\delta(\gamma_i(j),x)=s$, $\lambda(\gamma_i(j),x)=y$, и $(j,s)\in\gamma'_i$ при $v=-(x,y)$, если $\delta(s,x)\in\gamma_i(j)$, $\lambda(s,x)=y$. В случае $i=m+1$ бинарное отношение γ'_{m+1} вычисляется точно так же, как отношение γ_1. Таким образом, при $i\leqslant m$ элемент γ_i заменяется элементом γ'_i, а при $i=m+1$ в семействе $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$ добавляется элемент γ'_{m+1}. Поскольку

$i \leqslant n-1$, в последнем случае $m+1 \leqslant n-1$. Из конечности множеств Γ_n, V и неравенств вытекает конечность акцептора $H(A)$. Состояние $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ будет представляющим (т. е. будет принадлежать F_H), если это семейство категорично. Пусть $\bar{Z} \subseteq Z^*$ — событие, представленное в акцепторе $H(A)$.

Теорема 1.13. *Если $\bar{z} \in \bar{Z}$, то $W(\bar{z}) \in I_s$ и $W(\bar{z})$ является минимальным идентификатором состояний эталона. Если $W \in I_s$ — минимальный идентификатор состояний эталона, то $\bar{z}(W) \in \bar{Z}$.*

Таким образом, автомат $H(A)$ эффективно описывает класс минимальных идентификаторов всех состояний автомата A. При этом каждой нумерации слов из некоторого минимального идентификатора W соответствует своя свёртка и идентификатору W соответствует множество слов из $\bar{z}$, разложение которых равно W.

Следствие 1.14. *Если слово $\bar{z}$ принадлежит событию $\bar{Z}^+$, представленному в автомате $H^+(A)$, то разложение $W(\bar{z})$ является минимальным из I_s начальным идентификатором некоторого состояния автомата A. Если W — минимальный начальный идентификатор из I_s некоторого состояния автомата A, то свёртка $\bar{z}(W)$ принадлежит событию $\bar{Z}^+$.*

Аналогично строится автомат $H^-(A)$, и аналогичное утверждение устанавливает связь между событием $\bar{Z}^-$ и минимальным конечным идентификатором состояний автомата A. Событие $\bar{Z}^+ \cup \bar{Z}^-$ регулярно и является эффективным описанием множества начальных и минимальных конечных идентификаторов. Сложность автоматов $H(A)$, $H^+(A)$, $H^-(A)$ может значительно превосходить сложность автомата A, поэтому представляет интерес разработка правил упрощения этих автоматов без изменения событий, представленных в них. Правила 1, 2 построения функции Δ_H и являются такими упрощениями. Некоторые дополнительные правила упрощения акцептора $H^+(A)$ рассмотрены в [3]. Там же приведён пример такого акцептора.

Рассмотрим теперь взаимосвязь между множествами идентификаторов состояний автоматов, поведение которых в той или иной мере подобно.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ — конечные автоматы Мили, всюду определённые и детерминированные, но не обязательно приведённые. Тогда λ_{As} является конечноавтоматным отображением. Напомним некоторые определения. Состояния $s \in S$ и $t \in T$ называются эквивалентными, если $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$. Автоматы A и B называются эквивалентными (не отличимыми никаким экспериментом), если $\{\lambda_{As}\}_{s \in S} = \{\lambda_{Bt}\}_{t \in T}$. Автомат A называется приведённым, если из $s_1 \neq s_2$ следует, что $\lambda_{As_1} \neq \lambda_{As_2}$. Автоматы A, B назовём эквивалентными по предыстории, если $\{\phi_{As}\}_{s \in S} = \{\phi_{Bt}\}_{t \in T}$. Автомат A назовём приведённым по предыстории, если из $s_1 \neq s_2$ следует, что $\phi_{As} \nsubseteq \phi_{As_2}$. Из определения следует, что если автомат A приведённый (приведённый по предыстории), то для всех состояний s множество начальных (конечных) идентификаторов непусто. Известно, что для каждого автомата существует эквивалентный ему единственный приведённый автомат. Если автомат A имеет преходящее состояние s, то он не является приведённым по предыстории, так как $\phi_{As} = \varnothing$ и тем самым $\phi_{As_1} \subseteq \phi_{As_2}$ для всех $t \in S$. Если, кроме этого, A приведённый, то любой автомат B, $(B, A) \in \varepsilon$, имеет преходящие состояния, и следовательно, в классе $\varepsilon(A)$ нет приведённых по предыстории автоматов.

Пусть $\Phi_A = \bigcup\limits_{s \in S} \lambda_{As}$. Автоматы A, B называются не отличимыми никаким простым экспериментом, если $\Phi_A = \Phi_B$. Рассмотрим взаимосвязь между множествами простых конечных идентификаторов состояний двух автоматов, не отличимых никаким простым экспериментом.

Известно, что для каждого приведённого автомата A существует простой установочный эксперимент, т. е. существует такое слово p, что для всех состояний s_1, s_2 из равенства $\lambda_A(s_1, p) = \lambda_A(s_2, p)$ следует равенство $\delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$. Поэтому вход-выходное слово $\big(p, \lambda_A(s_1, p)\big)$ в этом случае является простым конечным идентификатором состояния $\delta(s, p)$.

Из определения конечных идентификаторов следует, что если для некоторого состояния автомата существует (простой) конечный идентификатор, то (простой) конечный идентификатор существует и для всякого состояния, достижимого из s. Таким образом, множество состояний, имеющих конечные идентификаторы, образуют подавтомат. Этот подавтомат приведён по предыстории. Подавтомат, образованный всеми состояниями автомата, имеющими простой конечный идентификатор, назовём конечным фактором автомата. Из вышесказанного следует, что конечный фактор приведённого автомата непуст и содержит все сильно связные автоматы этого автомата.

Следствие 1.15.

1. *У всякого приведённого автомата существует приведённый по предыстории подавтомат, содержащий конечный фактор этого автомата.*
2. *Конечные факторы приведённых неотличимых автоматов изоморфны.*
3. *Всякий сильно связный приведённый автомат приведён по предыстории.*

Известна задача, поставленная ещё Э. Муром [44], о нахождении минимального (по числу состояний) автомата, неотличимого от данного. Приведённые рассуждения позволяют сформулировать достаточное условие минимальности в классе неотличимых автоматов. Если приведённый автомат совпадает со своим конечным фактором, то он является единственным минимальным автоматом в классе неотличимых автоматов. Из этого следствия вытекает известный результат Э. Мура [44] о том, что приведённый сильно связный автомат является единственным минимальным в классе неотличимых автоматов.

Пусть $W \subseteq U^*$. Через $[W]$ обозначим пополнение множества слов W начальными отрезками этих слов. Обозначим через K_A множество всех правильных простых конечных идентификаторов всех состояний автомата A, $K_A \subseteq \Phi_A$.

Полученные результаты позволяют сформулировать критерий неотличимости приведённых автоматов в терминах конечных идентификаторов.

Следствие 1.16. *Приведённые автоматы A и B не отличимы никаким простым экспериментом тогда и только тогда, когда $K_A = K_B$.*

Приведённость автоматов является существенным условием. Действительно, легко привести пример неприводимого автомата, у которого множество простых конечных идентификаторов меньше, чем у приведённого автомата, эквивалентного (а значит, не отличимого никаким экспериментом) исходному.

Теорема 1.17. *Приведённые автоматы не отличимы никаким (как простым, так и кратным) экспериментом тогда и только тогда, когда у них равны множества правильных начальных идентификаторов.*

В заключение заметим, что ни начальные, ни конечные идентификаторы состояний при гомоморфизме автоматов в общем случае не сохраняются.

2. Представления автоматов фрагментами

Раздел посвящён изучению представлений автомата фрагментами с заданной точностью.

Проблема представления автомата фрагментами рассматривается с двух точек зрения. Первая — эксперименты с автоматами. Постановка задачи в этом случае такова. Задан класс автоматов F, в котором выделен «исправный» автомат-эталон A. Остальные автоматы из F называются «неисправностями» эталона. Кроме того, предъявлен чёрный ящик B, о котором известно, что он принадлежит классу A. Требуется найти такое множество P входных слов (тестовых последовательностей), по реакции на которые автомата B можно определить

а) совпадает ли B с эталоном (контрольный эксперимент);

б) функции автомата B (распознающий эксперимент).

В этом случае тест P вместе с соответствующими реакциями автомата B является искомым фрагментом поведения. Известен ряд работ, в которых предложены различные алгоритмы построения таких экспериментов и найдены оценки их сложности [2—4, 18, 37]. В последнее время появился ряд неклассических видов экспериментов с более сложными степенями точности, определяемыми приложениями (сертификацией протоколов в сетях ЭВМ [47, 48], тестированием компоненты сети автоматов [57] и т. п.).

Вторая точка зрения связана с описанием исходного задания автомата при его синтезе. При этом автомат задаётся в виде системы вход-выходных слов, которая представляет информацию двоякого вида: то, что должен реализовывать автомат (предписанное поведение) и то, чего автомат не должен реализовывать (запрещённое поведение) [26, 36]. Известен ряд вариантов такого описания: анкетные языки [26], k-наборы [9], языки эквивалентных преобразований [36]. Предложены алгоритмы получения таких описаний по заданному автомату и алгоритмы синтеза автомата по заданным описаниям.

Оба этих подхода естественно сливаются в формирующемся направлении «Формальные методы анализа свойств систем», объединяющем проблемы спецификации, анализа, верификации и тестирования программно-аппаратных дискретных систем.

Анализ полученных результатов показывает, что до сих пор мало изучены следующие вопросы.

1. Какова та граничная информация об автомате и классе, относительно которого описывается автомат, при которой вышеуказанное описание того или иного вида (эксперимент, анкетный язык) существует, а без которой не существует.
2. Какова структура вышеуказанного описания автомата: что обязательно должно присутствовать в описании, а что является издержками алгоритма его получения.
3. Какова сложность описаний, сложность их построения и сложность восстановления автомата по его описанию.

Эти вопросы являются актуальными не только для теории автоматов, но и для смежных дисциплин, таких как техническая диагностика [46, 53], идентификация систем управления [35] и др.

Введём необходимые определения. Пусть F — некоторый класс конечных детерминированных всюду определённых автоматов, $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{A}(X, Y)$. Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый автомат, называемый эталоном. Пусть τ — бинарное отношение подобия на классе $\mathsf{A}(X, Y)$. Если $(A, B) \in \tau$, то автомат B назовём подобным эталону. Обычно $A \in \mathsf{F}$.

Пусть R, Q — возможно бесконечные автоматы Медведева в алфавите 2^U, где $U = X \times Y$. Пару $\langle R, Q\rangle$ назовём представлением эталона A относительно F с точностью τ, если одновременно выполняются следующие условия:

1) R является фрагментом, а Q — кофрагментом эталона;
2) для любого $B \in \mathsf{F}$, если R является фрагментом, а Q — кофрагментом автомата B, то $B \in \tau(A)$.

Класс всех представлений эталона относительно A и τ обозначим $\mathsf{R}(A, \mathsf{F}, \tau)$. Представление назовём текстуальным, когда Q пусто, и информаторным в противном случае. Класс всех текстуальных представлений обозначим $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$.

Из определения представлений эталона следует, что $(R, Q) \in \mathsf{R}(A, \mathsf{F}, \tau)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

1) $A \in \mathsf{A}(R, Q) \cap \mathsf{F}$;
2) $\mathsf{A}(R, Q) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Пусть $Q = \sum Q_i$, $i \in I$, — разложение кофрагмента в прямую сумму его компонент связности. Тогда эти условия равносильны соотношениям

1) $A \in \mathsf{F} \cap \mathsf{A}(R) \cap \Big(\bigcap\limits_i \bar{\mathsf{A}}(Q_i)\Big)$;
2) $(\mathsf{F} \cap \mathsf{A}(R) \cap \Big(\bigcap\limits_i \bar{\mathsf{A}}(Q_i)\Big) \subseteq \tau(A)$.

Здесь $\bar{\mathsf{A}}(Q_i)$ — дополнение класса $\mathsf{A}(Q_i)$ до $\mathsf{A}(X, Y)$.

Если выходной алфавит Y содержит только один символ, то $\mathsf{A}(X, Y) = \{A\}$ и класс представлений совпадает с классом всех фрагментов эталона. Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, считаем, что $|Y| \geqslant 2$.

Рассмотрим примеры представлений.

1. Пусть F состоит из всех автоматов с числом состояний, не превосходящим числа состояний эталона, т. е., как говорят в технической диагностике, «неисправность не увеличивает числа состояний автомата» [53]. Пусть отношение τ является отношением равенства (изоморфизма) автоматов. Пусть p — контрольная в смысле Хенни [54] последовательность для A. Это значит, что если исследуемый «чёрный ящик» B, принадлежащий F, отреагировал на слово p словом q, для которого (p, q) может быть порождено эталоном, то $A = B$. Тогда строчный автомат $R(p, q)$ является представлением.

Следуя [54], можно выбрать F равным классу всех автоматов, число состояний которых не превосходит удвоенного числа состояний эталона, и считать, что B подобен A, если $A \subseteq B$, т. е. если B является реализацией A. Такое τ соответствует проверке работоспособности автомата [53], и в этом случае для контрольного эксперимента (p, q) автомат $R(p, q)$ является представлением.

2. В [11] рассматривается проблема контроля (обнаружения) неисправностей, если F — класс всех автоматов, число состояний которых не превосходит заданного натурального числа. Этот класс содержит в себе большинство естественно определяемых классов неисправностей. Предложен алгоритм построения такого множества входных слов $P = \{p_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что если «чёрный ящик» B в состоянии t порождает эксперимент $Q = \{p_i, q_i\}$, для которого $Q \subseteq \lambda_{As}$, то $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$. Таким образом, древовидный фрагмент $D(Q)$, полученный из $\sum\limits_i R(p_i, q_i)$, является представлением эталона относительно указанного F и τ, определяемого соотношением $(A, B) \in \tau$, если $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$, где s и t — начальные состояния автоматов.

Можно считать, что кратные и простые контрольные эксперименты являются частным видом представлений. Аналогичные рассуждения можно провести для распознающих экспериментов [2—4, 18, 37, 50] и анкетных языков [26].

3. Рассмотрим k-набор, являющийся конечным множеством вход-выходных слов вида

$$(p, q) = (x_1, y_1) \ldots (x_i, y_i) * (x_{i-1}, y_{i-1}) \ldots (x_k, y_k)$$

и описывающий сильно связные автоматы с точностью до $\tau = \nu_1$. Звёздочка показывает, что начальный отрезок слова (p, q), стоящий слева от неё, оканчивается в том же состоянии автомата, в котором оканчивается все слово. Если по слову (p, q) построить $R(p, q)$ и отождествить в нём состояния $l + 1$ и $k + 1$ и провести такое построение для каждого слова из k-набора, то получим представление R сильно связного эталона A относительно бесконечного класса сильно связных автоматов.

4. В [3] предложена методика анализа вход-выходных слов с помощью идентификаторов состояний. В результате этого анализа получается так называемый предельный автомат, который в случае, если анализировался контрольный или распознающий эксперимент, является представлением автомата A относительно заданных F и τ.

5. В [7] рассмотрен случай, возникающий при сертификации протоколов [47] и контроле компоненты сети автоматов [57], когда класс A исправных автоматов задан в виде класса реализаций недетерминированного автомата A, а класс неисправных B — в виде класса реализаций недетерминированного автомата B. В [7] строится эксперимент, определяющий, является ли «чёрный ящик» реализацией автомата A или реализацией автомата B. В процессе проведения этого эксперимента получается множество W вход-выходных слов, порождённых «чёрным ящиком». Автомат $R(W)$ является текстуальным представлением «чёрного ящика», а точность определяется разбиением $\{A, B\}$. Заметим, что в этом случае эти классы могут быть как конечными, так и бесконечными.

Рассмотренные примеры показывают важность и актуальность исследования проблемы представления фрагментами. В [15, 18] заложены основы такого исследования. В данном разделе изложены основные результаты: условия существования представлений различного вида при различных предположениях на свойства эталона, класса F и точности представления τ; структура представлений в случае, когда представлением является только фрагмент R эталона; сложность представлений, как метрическая, так и их распознавания. Эти задачи рассматривались в первую очередь для определённо диагностируемых порядка k автоматов. Такие автоматы интенсивно изучались в теории экспериментов с автоматами [3, 12, 18, 52, 55] и часто встречаются в прикладных исследованиях. В разделе приведены необходимые и достаточные условия, при которых фрагмент является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно класса F_n всех автоматов с числом состояний, не превосходящим числа n состояний эталона. Для случая $\tau = \varepsilon$ (изоморфизма автоматов) описана структура минимальных представлений. Получены необходимые и достаточные условия для автомата быть представлением такого же эталона относительно класса автоматов, порождённых из эталона локальными преобразованиями последнего, и τ, равного отношению неотличимости различного вида. Наконец, найден критерий, при котором вход-выходное слово является контрольным экспериментом для определённо диагностируемого порядка k, $1 \leqslant k \leqslant 11$, эталона относительно F_n и $\tau = \varepsilon$.

2.1. Условия существования представлений

Укажем простейшие свойства представлений, полезные в дальнейшем. Пусть даны система $\langle A, \mathsf{F}, \tau \rangle$ и пара (R, Q), для которой выполняется условие 1) определения представлений, т. е. R — фрагмент и Q — кофрагмент эталона A. По кофрагменту Q определим класс автоматов F_Q следующим образом: $B \in F_Q$, если существует автомат $C \in \mathsf{F}$, для которого B является компонентой связности, и существует компонента связности H кофрагмента Q, для которой $H \infty B$. Через B_Q обозначим возможно бесконечный автомат, являющийся прямой суммой всех автоматов из F_Q. По классу F определим класс B следующим образом:

$B \in \mathsf{B}$, если существует автомат $C \in \mathsf{F}$, для которого B является его компонентой связности, и $B \prec A$. По классу B определим возможно бесконечный автомат $B_{\max}$, являющийся прямой суммой всех автоматов из B.

Можно показать, что в классе $K(R)$ всех фрагментов, эквивалентных по $\equiv$ фрагменту R, либо все элементы из $K(R)$ являются текстуальными представлениями, либо ни один из них не является текстуальным представлением. Выше было показано, что ядро конечного фрагмента R является наименьшим (по включению $\subseteq$) элементом в классе $K(R)$. Текстуальное представление, совпадающее со своим ядром, назовём ядерным. Ядерными представлениями являются сам эталон и контрольные эксперименты (древовидные представления).

Рассмотрим условия существования представлений общего вида.

Пусть s — некоторое состояние эталона, λ_s^k — множество всех вход-выходных слов длины не больше k, порождаемых s, и $D(\lambda_s^k)$ — древовидный фрагмент, соответствующий этому множеству. Пусть $D_A^k = \sum D(\lambda_s^k)$ — прямая сумма всех $D(\lambda_s^k)$, $s \in S$. Пусть также $\bar{D}_A^k$ — прямая сумма всех $D(\lambda^k)$, для которых λ — конечноавтоматное отображение, λ^k не реализуется ни одним состоянием эталона, $\lambda \subseteq U^*$. Через ε обозначим отношение эквивалентности автоматов из $\mathsf{A}(U)$. Пусть $n = |S|$ — число состояний эталона.

Теорема 2.1. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *представление эталона A относительно* F *и τ существует*;
2) *класс всех представлений для A, F, τ бесконечен*;
3) $\langle A, B_{\max}\rangle$ *является представлением*;
4) $\varepsilon(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$;
5) $(D_A^k, \bar{D}_A^k)$ *является представлением при $k \geqslant n$.*

Теорема характеризует существование представлений с разных точек зрения. Утверждение 4) определяет максимальную точность τ, для которой представления существуют. Она равна ε, и так как $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{A}(X, Y)$, то представления общего вида могут определить автомат с точностью до изоморфизма (поскольку $\varepsilon(A) = A$). Кроме того, это утверждение показывает, что для рефлексивных τ представления общего вида всегда существуют для всех классов F и эталонов $A \in \mathsf{F}$. Утверждения 3) и 5) указывают канонические в некотором смысле представления. Представление из утверждения 5) конечно и состоит из двух правильных фрагментов.

Далее мы приведём ряд теорем существования различных представлений, аналогичных теореме 2.1. В них проверка существования представлений сводится к проверке, является ли некоторая каноническая система представлением, или к проверке включения в класс $\tau(A)$ некоторого класса автоматов, неотличимых от эталона соответствующим образом. Они определяют для каждого вида представлений максимальную точность представления эталона системой фрагмент—кофрагмент.

Рассмотрим условия существования текстуальных представлений общего вида. Текстуальное представление назовём правильным, если оно конечно и является непосредственным фрагментом эталона.

Введём отношение γ_{ri} неотличимости автоматов из $\mathsf{A}(U)$ экспериментами ограниченной высоты и кратности: $(A, B) \in \gamma_{ri}$, если всякий эксперимент автомата A кратности не больше r и высоты не больше i является экспериментом автомата A. Ясно, что $\rho_{ri} = \gamma_{ri} \cap \gamma_{ri}^{-1}$.

Пусть $(A, B) \in \gamma$, если всякий эксперимент автомата A является экспериментом автомата B. Ясно, что последнее соотношение равносильно включению $\{\lambda_s As\}_{s \in S} \subseteq \{\lambda_t Bt\}_{t \in T}$, где T — множество состояний автомата B и $\gamma = \cap \gamma_{ri}$, где пересечение выполняется по всем r, $i \geqslant 1$. Очевидно, что $\varepsilon = \gamma \cap \gamma^{-1}$.

Теорема 2.2. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *текстуальное представление относительно* F *и* τ *существует*;
2) *класс всех текстуальных представлений для* A, F, τ *бесконечен*;
3) *класс всех текстуальных правильных ядерных представлений бесконечен*;
4) *эталон* A *является представлением для* A, F, τ;
5) $\gamma(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Теорема 2.2 показывает, что текстуальные представления в общем случае определяют автомат с точностью не больше γ, т. е. с точностью до реализации эталона или, в технических терминах [53], с точностью до работоспособности эталона. Таким образом, как следовало ожидать, информаторные представления являются более точными дескрипторами автомата, чем текстуальные.

Текстуальное представление R назовём тривиальным, если существует всюду определённый автомат $B \subseteq R$, эквивалентный эталону, т. е. $B \in \varepsilon(A)$. Тривиальное представление явно содержит в себе полное «глобальное» описание эталона. Контрольные эксперименты являются нетривиальными представлениями. Легко заметить, что класс тривиальных и класс нетривиальных представлений замкнуты относительно операции сложения и поэтому бесконечны. Кроме того, в классе эквивалентных по представлению все элементы либо тривиальны, либо нетривиальны.

Рассмотрим непустой класс $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$. В силу теоремы 2.2 в нём всегда существуют тривиальные представления, например сам эталон. $D_A = \sum\limits_{s \in S} D(\lambda_s)$ является бесконечным нетривиальным непосредственным представлением. Если класс F конечен и N — верхняя оценка числа состояний автоматов этого класса, то D_A^{2N-1} является нетривиальным конечным непосредственным (т. е. правильным) представлением в силу известных результатов Мура [37, 44]. Однако для бесконечных классов F правильные нетривиальные представления в $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$ существуют не всегда.

Класс F назовём замкнутым по γ, если $\gamma(B) \subseteq \mathsf{F}$ для всех $B \in \mathsf{F}$. Ясно, что при $|Y| > 1$ непустой замкнутый по γ класс F бесконечен.

Теорема 2.3. *Пусть эталон* A *сильно связен, класс* F *непуст, замкнут по* γ *и не равен* $\tau(A)$. *Тогда в непустом классе* $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$ *все правильные представления тривиальны.*

Из теоремы 2.3 следует, что для сильно связных эталонов не существует правильных текстуальных нетривиальных представлений для $\mathsf{A}(U)$ и $|Y| > 1$.

Рассмотрим условия существования правильных текстуальных нетривиальных представлений. Важным частным случаем таких представлений являются древовидные представления, у которых каждая компонента связности является деревом.

Пусть $\chi_k = \bigcap \gamma_{rk}$, где объединение выполняется по всем $r \geqslant 1$. Ясно, что $\varepsilon_k = \chi_k \cap \chi_k^{-1}$. Поскольку автоматы из $\mathsf{A}(U)$ являются приведёнными, то $(A, B) \in \chi_k$ равносильно включению $L_A^k \subseteq L_B^k$.

Теорема 2.4. *Эквивалентны следующие утверждения*:

1) *правильные древовидные текстуальные представления для A, F, τ существуют*;
2) *D_A^k является таковым для некоторого k*;
3) *$\chi_k(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$ для некоторого k.*

Важным частным случаем является случай, когда автоматы из F не сравнимы по γ, т. е. $\gamma(B) = B$ для всех $B \in \mathsf{F}$. Примером является класс F, все автоматы которого сильно связны. Как показано ранее, в этом случае текстуальные представления существуют для всех $A \in \mathsf{F}$ и τ. Наибольшая точность при этом равна ε. В случае этой точности непосредственно из теоремы 2.4 вытекает следствие.

Следствие 2.5. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *класс $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \varepsilon)$ содержит правильные древовидные представления*;
2) *D_A^k входит в этот класс для некоторых k*;
3) *$\varepsilon_k(A) \cap \mathsf{F} = A$ для некоторых k*;
4) *множество $\varepsilon_k(A) \cap \mathsf{F}$ конечно для некоторых k.*

Из-за важности древовидных текстуальных представлений (включающих в себя, например, контрольные эксперименты) в [18] класс F, для которого выполняется утверждение 3) теоремы 2.4, назван классом, отличимым от A по τ. Наименьшее k, для которого выполняется указанное утверждение, называется порядком отличимости. Такие классы могут быть как конечными, так и бесконечными. Всякий конечный класс F, для которого существует текстуальное представление эталона A относительно F и τ, является классом, отличимым от A по τ.

Рассмотрим условия существования минимальных представлений.

Правильное текстуальное представление $R \in \mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$ назовём минимальным (по $\leqslant$), если для всех правильных текстуальных представлений из $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$ неравенство $Q \leqslant R$ влечёт $R \subseteq Q$. Такое определение связано с тем, что отношение $\leqslant$ в общем случае является предпорядком.

Следствие 2.6.

1. *Если класс F отличим от A по τ, то в $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$ существуют правильные минимальные представления.*

2. *Если в* $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$ *все правильные представления тривиальны, то в этом классе минимальных представлений нет.*

Рассмотрим автономные автоматы, т. е. случай $|X| = 1$.

Следствие 2.7. *Для автономных автоматов и сильно связного эталона равносильны следующие утверждения*:

1) *класс* F *отличим от* A *по* τ;
2) *в классе* $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}, \tau)$ *существуют правильные минимальные представления.*

Рассмотрим частный вид представлений — анкетные языки. Пусть $U = X \times Y$ и $Z = 2^U$. Пусть также $W_1, W_2 \subseteq Z^*$. Систему (W_1, W_2) назовём анкетным языком для эталона A относительно F и τ, если $\big(R(W_1), R(W_2)\big)$ является представлением эталона относительно F и τ. Поскольку слова $w \in Z^*$ находятся во взаимно-однозначном соответствии со строчными автоматами $R(w)$, то, используя вольность речи, наряду с $R(W_1) \subseteq R(W_2)$ будем писать $W_1 \infty W_2$.

Будем различать текстуальные (при $W_2 = \varnothing$) и информаторные анкетные языки. Текстуальный правильный анкетный язык, состоящий из одного слова, называется (простым) контрольным экспериментом.

Рассмотрим условия существования анкетных языков. Положим $\gamma_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_{1i}$. Ясно, что $(A, B) \in \gamma_1$ равносильно $\Phi_A \subseteq \Phi_B$ и что $\gamma_1 \cap \gamma_1^{-1} = \nu_1$.

Теорема 2.8. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *анкетный язык для эталона относительно* F *и* τ *существует*;
2) $(\Phi_A, \bar{\Phi}_A)$ *является анкетным языком для* A, F, τ;
3) $\nu_1(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Теорема 2.9. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *текстуальный анкетный язык для* A *относительно* F *и* τ *существует*;
2) Φ_A *является анкетным языком*;
3) $\gamma_1(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Теорема 2.10. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *конечный анкетный язык для эталона* A *относительно* F *и* τ *существует*;
2) $(\Phi_A^k, \bar{\Phi}_A^k)$ *является анкетным языком для некоторого* k;
3) $\rho_{1k}(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$ *для некоторого* k.

Напомним, что $\Phi_A^k = \bigcup \lambda_{As}^k$, где объединение выполняется по всем $s \in S$, и $\bar{\Phi}_A^k = U^k - \Phi_A^k$.

Теорема 2.11. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *конечный текстуальный анкетный язык для эталона* A *относительно* F *и* τ *существует*;
2) Φ_A^k *является таким анкетным языком для некоторого* k;
3) $\gamma_{1k}(A) \cap \mathsf{F} \subseteq \tau(A)$.

Отметим важный случай, когда $\mathsf{F} = \mathsf{A}(X, Y)$ и $\tau = \nu_1$. Из теоремы 2.8 следует, что в этом случае бесконечный анкетный язык всегда существует, причём он задан двумя регулярными по Клини множествами слов $(\Phi_A, \bar{\Phi}_A)$. Легко показать, что конечные анкетные языки существуют не для всех эталонов A. Автомат A называется автоматом с конечной памятью, если существует такое k, что каждое вход-выходное слово $w \in \Phi_A$ длины k является для A конечным идентификатором его состояний. Наименьшее такое k называется порядком конечной памяти. В [18] показано, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2.12. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *правильный анкетный язык для эталона A относительно $\mathsf{A}(U)$ и ν_1 существует*;
2) *эталон A является автоматом с конечной памятью*;
3) $\rho_{1k} = \nu_1$ *для некоторого k.*

Из доказательства теоремы следует, что $(\Phi_A^k, \bar{\Phi}_A^k)$ — анкетный язык для эталона A, являющегося автоматом с конечной памятью, относительно $\mathsf{A}(U)$ и ν_1 для всех k, не меньших порядка конечной памяти.

Заметим, что система $(A, \mathsf{A}(U), \nu_1)$ удовлетворяет условиям следствия 2.7, и из неё следует, что все правильные текстуальные представления для этой системы тривиальны. Это показывает принципиальное различие между текстуальными и информаторными представлениями.

2.2. Представления относительно N-полных классов

Класс A назовём N-полным, если он состоит из всех автоматов, входящих в $\mathsf{A}(X, Y)$, число состояний которых не превосходит N. N-полный класс будет обозначаться через F_N. N-полные классы являются наиболее часто рассматриваемыми классами неисправностей в теории экспериментов с автоматами и технической диагностике, так как они содержат в себе большинство естественно определяемых (содержательных) классов неисправностей в теории автоматов [2—4, 12, 18, 37, 44, 50, 52, 55] и в технической диагностике [46, 53].

Для оценки сложности правильных текстуальных представлений относительно F_N и τ введём ряд параметров. Через n_R обозначим число состояний автомата R. Через n_τ обозначим наименьшее число состояний автоматов, подобных A. Ясно, что $n_\tau \leqslant n_A$. Через Y_τ обозначим множество всех выходных символов, которые порождаются подобными автоматами. Как и ранее, m обозначает мощность алфавита X. Будем рассматривать A, F_N, τ, для которых правильные текстуальные представления существуют.

Теорема 2.13. *Для правильного текстуального представления R относительно F_N и τ при $Y \neq Y_\tau$ выполняются следующие условия*:

1) *если $n_A \leqslant N$, то для всех гомоморфизмов φ автомата R в A справедливо равенство $\varphi(R) = A$*;

2) *для всех гомоморфизмов φ автомата R в A число состояний $\varphi(R)$ не меньше N при $n_A > N$ и равно n_A в противном случае*;
3) *$n_R > N$, если R нетривиально, и $n_R > n_A$ в противном случае*;
4) *число дуг в графе R не меньше N, если $N < n_A$, а R нетривиально, и не меньше mn_A в противном случае.*

Легко показать, что оценки в условиях 3) и 4) достижимы для всех m и n_A.

В случае $Y = Y_\tau$ дело обстоит сложнее: доопределение автомата $\varphi(R)$ может привести к автомату, подобному эталону. Рассмотрим случай, когда R — правильное текстуальное представление относительно N-полного класса F_n и $N < n_A$. Пусть φ — гомоморфизм автомата R в эталон. Покажем, что если число n состояний автомата $\varphi(R)$ меньше N, то $n \geqslant n_\tau$. Предположим, что $n < N$ и $n < n_\tau$. Если автомат $\varphi(R)$ всюду определён, то $R \leqslant \varphi(R)$ влечёт $\varphi(R) \notin \tau(A)$, и R не представление. Если автомат $\varphi(R)$ частичный, то его можно доопределить до полного с тем же числом состояний.

Приведённая форма B полученного автомата обладает свойствами $R \leqslant B$, $n_B \leqslant n < n_\tau$, $B \in \mathsf{F}_N$, поэтому R не представление.

Условие 1) теоремы 2.13 указывает случай, когда представление должно содержать полную локальную информацию о поведении эталона — содержать все его дуги.

Рассмотрим свойства представлений относительно n-полного класса, где $n = n_A$. Этот класс конечен, значит, отличим от A и любого τ. Как показано ранее, древовидное представление существует для всех τ. Более того, для всех τ существует правильное древовидное текстуальное представление. Его можно построить, например, сравнением эталона с каждым автоматом из F_n. Заметим, что на классе F_n отношение γ совпадает с ε и так как автоматы из этого класса являются приведёнными, то совпадает с отношением ι изоморфного вложения автоматов. Точность ι хорошо изучена в теории автоматов и её приложениях.

Рассмотрим следующее преобразование эталона A. Выберем в нём некоторую дугу (a, x, y, b). Заменим её дугой (a, x, y, g), где $g \neq a$ и $g \in S_A$. Будем говорить, что новый автомат получен из эталона переброской дуги (a, x, y, b) в состояние g.

Лемма 2.14. *Автомат, полученный переброской любой дуги эталона, не изоморфен эталону.*

Лемма 2.14 играет важную самостоятельную роль, так как при доказательстве того, что фрагмент не является представлением, используется следующая схема: пусть R — правильный фрагмент A и из A переброской некоторой дуги получен неизоморфный ему B; если удаётся показать, что R — фрагмент B, то относительно данных A и τ фрагмент R текстуальным представлением не является.

Поскольку мощность класса F_n сильно растёт с ростом n, то часто вместо этого класса рассматривают его так называемые доминирующие подклассы. Подкласс F' класса F называется доминирующим над F (относительно F и τ), если всякое правильное представление эталона A относительно F' и τ будет представлением относительно F и τ. Этот подкласс назовём слабо доминирующим, если всякое текстуальное правильное представление эталона относительно F' и τ будет таковым и относительно F и τ.

Пусть $\mathsf{A}_1 = \{B \mid B \in \mathsf{F}_n,\ \Phi^1_A = \Phi^1_B\}$, или, другими словами, $\mathsf{A}_1 = \rho_{11}(A) \cap \mathsf{F}_n$.

Теорема 2.15. *Класс A_1 является слабо доминирующим для F_n относительно любого A с $n_A = n$ и γ.*

Рассмотрим условия существования представлений частного вида: анкетных языков для n-полного класса и произвольного τ. Класс F_n конечен, поэтому проверка существования и построение анкетного языка осуществляется следующим тривиальным алгоритмом. Для всякого автомата $B \in \mathsf{F}_n - \tau(A)$ строится акцептор 2^B, представляющий множество Φ_B. Этот акцептор имеет не более 2^n состояний. Затем строится акцептор $2^A \times 2^B$ с числом состояний не более 2^{2n}, представляющий событие $\Phi_A \oplus \Phi_B$, где $\oplus$ — операция симметрической разности множеств. Выберем слово $w \in \Phi_A \oplus \Phi_B$, если оно существует. Множество всех таких слов образует анкетный язык. Если он существует, то длина слов в нём не превосходит $2^{2n} - 1$. Поскольку мощность n_A-полного класса сильно растёт с ростом n_A, представляет интерес нахождение таких условий существования анкетного языка, проверка которых осуществляется только по информации об эталоне.

Пусть $\tau = \nu_1$. Распознавание автоматов с этой точностью применяется, например, при контроле протоколов в сети ЭВМ [47, 48]. Из сказанного ранее вытекает, что конечный анкетный язык всегда существует. Рассмотрим условия существования текстуальных анкетных языков, так как именно они получаются в процессе экспериментирования с автоматом. Пусть $n(\Phi_A) = \min\{n_B \mid (A, B) \in \nu_1\}$. Будем говорить, что множество Φ_A пополняемо с возрастанием, если для всех $B \in \mathsf{A}(X, Y)$ из строгого включения $\Phi_A \subset \Phi_B$ следует строгое неравенство $n(\Phi_A) < n(\Phi_B)$. Автомат называется минимальным в классе $\nu_1(A)$, если $n = n(\Phi_A)$. Через $L_(A, \mathsf{A}, \tau)$ и $F_(A, \mathsf{A}, \tau)$ обозначим классы всех анкетных и конечных анкетных языков соответственно. Через $L_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{A}, \tau)$ и $F_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{A}, \tau)$ обозначим классы всех текстуальных и конечных текстуальных языков.

Рассмотрим случай $\tau = \iota$.

Теорема 2.16.

1. *Класс $F(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ непуст тогда и только тогда, когда автомат A является единственным минимальным в $\nu_1(A)$.*
2. *Класс $F(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ непуст тогда и только тогда, когда автомат A является единственным минимальным в $\nu_1(A)$ и Φ_A пополняемо с возрастанием.*

Известно [44], что приведённый сильно связный автомат является единственным минимальным в $\nu_1(A)$ и для него класс $F(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ всегда непуст. Условия, при которых эталон A является единственным минимальным в классе $\nu_1(A)$, изучалась в [18].

Рассмотрим условия, при которых Φ_A пополняемо с возрастанием. Автомат A называется определённо диагностируемым, если существует такое k, что каждое вход-выходное слово $w \in \Phi_A$ длины k является для A начальным идентификатором его состояний. Наименьшее такое k называется порядком диагностируемости. Если автомат A определённо диагностируем, то он является автоматом с конечной памятью.

Лемма 2.17. *Если автомат A сильно связен или определённо диагностируем, то Φ_A пополняемо с возрастанием.*

Из теоремы 2.16 и леммы 2.17 вытекает следствие.

Следствие 2.18.

1. *Для сильно связного эталона класс $F_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ всегда непуст.*
2. *Для определённо диагностируемого эталона класс $F_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ непуст тогда и только тогда, когда A — единственный минимальный автомат в классе $\nu_1(A)$.*

2.3. Структура представлений

Целью данного раздела является изучение структуры текстуальных правильных представлений с точки зрения наличия и расположения в них идентификаторов состояний эталона. При этом в разделе рассматриваются только правильные фрагменты, т. е. конечные детерминированные, в общем случае частичные автоматы во внешнем алфавите $U = X \times Y$.

С самого начала развития теории экспериментов в работах Э. Мура, А. Гилла, Ф. Хенни, М. П. Василевского и др. [2,11,12,37,44,52,54,55] при построении контрольных и распознающих экспериментов использовались такие идентификаторы состояний, как диагностические и установочные эксперименты. Идентификаторы состояний эталона специальным образом помещаются в контрольные и диагностические эксперименты, и тем самым эти эксперименты тоже являются идентификаторами состояний эталона.

В [18] показано, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.19. *Для всякого класса F, отличимого от эталона A по τ, существует такое древовидное представление для (A, F, τ), которое, при соответствующем выделении его состояний, является идентификатором каждого состояния эталона.*

Следующие результаты показывают, насколько идентификаторы полезны и необходимы при построении представлений для (A, F, τ).

Пусть задан некоторый автомат B. Фрагмент R, $R \leqslant B$, с выделенным состоянием t называется идентификатором состояния s этого автомата, если для любого гомоморфизма φ фрагмента R в B выполняется равенство $\varphi(t) = s$. На множестве J_B всех идентификаторов состояний автомата B введём отношение совместимости σ_B: два идентификатора совместимы, т. е. принадлежат σ_B, если они являются идентификаторами одного и того же состояния автомата B. Ясно, что σ_B является эквивалентностью на множестве J_B.

Пусть задан некоторый класс $\mathsf{F} \in \mathsf{A}(U)$ и $A \in \mathsf{A}(U)$. Пусть R — некоторый (правильный) фрагмент эталона. Идентификатор I состояний эталона назовём верифицированным в фрагменте R, если I является идентификатором состояний каждого автомата $B \in \mathsf{F}$ для некоторого $R \leqslant B$. Через J_R обозначим класс всех верифицированных в R идентификаторов состояний эталона, а через σ_R — отношение совместимости на J_R, причём $(I_1, I_2) \in \sigma_R$, если для всех автоматов $B \in \mathsf{F}$ выполнено $(I_1, I_2) \in \sigma_B$. Очевидно, что σ_R — эквивалентность на J_R. Система (J, σ), где $J \subseteq J_R$ и σ — некоторая эквивалентность на J, для которой $\sigma \subseteq \sigma_R$, будет называться верифицированной в R системой идентификаторов. Эквивалентность σ, содержащая только пары (I, I), где $I \in J$, называется диагональю и является наименьшей по включению эквивалентностью на J. Иногда диагональ σ будем называть пустым отношением совместимости идентификаторов, так как такое σ не содержит информации о совместимости разных идентификаторов из J.

Пусть (J, σ) — некоторая верифицированная в R система идентификаторов состояний. Эта система определяет на множестве T состояний фрагмента R отношение β: $(t_1, t_2) \in \beta$, если найдётся такая пара идентификаторов состояний $(I_1, I_2) \in \sigma_R$, для которых t_i — это выделенное состояние идентификатора состояний, $i = 1, 2$ и $I_i \leqslant R$. Другими словами, $(t_1, t_2) \in \beta$, если в R содержатся идентификаторы состояний t_i и гомоморфные прообразы этих идентификаторов совместимы по σ_R. Отношение β является рефлексивным и симметричным. Наименьшая (по включению) эквивалентность, для которой $\beta \subseteq \alpha$, называется транзитивным замыканием β. Конгруэнтное замыкание α однозначно определяет фрагмент R_1, для которого $R \leqslant R_1$, по следующему правилу. Отождествим состояния фрагмента R, принадлежащие одному классу эквивалентности α. Получим в общем случае недетерминированный частичный автомат R', у которого множество состояний равно T/α. Пусть $(t_1, t_2) \in \alpha$. По определению верифицированной системы $\langle J, \sigma \rangle$ это означает, что для любого гомоморфизма φ фрагмента R в эталон выполняется равенство $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Следовательно, $\lambda_{Rt_1} \cup \lambda_{Rt_2} \subseteq \lambda_{As}$, где $\varphi(t_1) = s$. Проведём детерминизацию автомата R': если в нём содержатся дуги (t, x, y_1, t_1) и (t, x, y_2, t_2), где $t_1 \neq t_2$, то по последнему включению $y_1 = y_2$, и мы отождествим состояния t_1, t_2. Проводя такое отождествление до тех пор, пока это возможно, получим частичный детерминированный автомат R_1, для которого $R \leqslant R_1$. На множестве состояний автомата R_1 опять определим отношение α, затем построим R_1 и, детерминизируя его, получим R_2. Проводя такие построения, получим последовательность автоматов $R \leqslant R_1 \leqslant R_2 \leqslant \ldots \leqslant R_i \leqslant \ldots$. По построению все R_i являются фрагментами эталона и число состояний автомата R_i не меньше числа состояний автомата R_{i+1}. Поэтому найдётся такое i, что $R_i = R_{i+1}$. В этом случае отношение α на состояниях автомата R является тривиальным, т. е. $(t_1, t_2) \in \alpha$, если $t_1 = t_2$. Автомат R_i в этом случае назовём замыканием автомата R по верифицированной системе (J, σ) идентификаторов состояний.

Пусть Q — замыкание фрагмента R по некоторой верифицированной системе (J,σ). Процедура построения Q однозначно определяет канонический гомоморфизм φ автомата R на Q, для которого $\varphi(R) = Q$. Ядро гомоморфизма φ — это такая конгруэнция α, что $R/\alpha = Q$. Из неравенства $R \leqslant Q$ следует включение $\mathsf{A}(R) \supseteq \mathsf{A}(Q)$. Легко показать, что обратное включение не имеет места. Пусть $F(R) = \mathsf{A}(R) \cap \mathsf{F}$. Покажем, что $F(R) \subseteq F(Q)$. Пусть $B \in F(R)$. Тогда $R \leqslant B$. Если состояния t_1, t_2 отождествляются при переходе от фрагмента R к R', то из $\sigma_R \subseteq \alpha_B$ следует, что для любого гомоморфизма φ автомата R в B верно $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Поэтому детерминизация автомата R' даёт автомат R_1, для которого $R \leqslant R_1 \leqslant B$ и $F(R_i) \subseteq F(R_1)$. Аналогично показывается, что $F(R_i) \subseteq F(R_{i+1})$. Следовательно, $F(R) \subseteq F(Q)$. Из сказанного вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.20. *Для любой верифицированной системы (J,σ) фрагмента R класс $F(R)$ совпадает с классом $F(Q)$, где Q — это замыкание фрагмента R по этой системе.*

Из этой леммы очевидно следуют полезные утверждения. Пусть задана тройка (A,F,τ), R_i — правильные фрагменты эталона, $i = 1, 2$, и Q_i — замыкание фрагмента R_i по некоторой верифицированной в R_i системе (J_i,σ_i).

Следствие 2.21.

1. *Если $A \subseteq Q_1/\varepsilon$, то R_1 — представление эталона A относительно F и τ.*
2. *Если $Q_1 = Q_2$, то R_1 — представление для (A,F,τ) тогда и только тогда, когда R_2 тоже представление.*

Утверждение 1 следствия 2.21 в неявном виде использовалось в ряде работ, начиная с работы Ф. Хенни [54], при построении контрольных экспериментов, причём, как правило, стремились к тому, чтобы Q_1 совпадало с A. В роли верифицированной системы выступало чаще всего множество простых начальных идентификаторов $\big\{\big(p,\lambda(s,p)\big)\big\}_{s\in S}$ эталона, порождённое диагностическим словом p.

Условие пункта 1 следствия 2.21 в общем случае является только достаточным. Однако в некоторых случаях оно является и необходимым. Рассмотрим эти случаи.

Пусть $F = \varepsilon_i(A)$ и $\tau = \iota$. Пусть также $D_A^i = \sum\limits_{s\in S} D(\lambda_s^i)$. Заметим, что в этом случае $F \subseteq \mathsf{A}(D_A^i)$.

Теорема 2.22. *Фрагмент D_A^i является представлением эталона относительно $\varepsilon_\iota(A)$ и ι тогда и только тогда, когда замыкание фрагмента D_A^i по некоторой системе (J,σ), верифицированной в R, изоморфно эталону.*

Теорема 2.22 даёт первый пример ситуации, когда при построении представлений идентификаторы необходимы. Эта теорема является теоремой существования и не указывает, каким образом строить представление.

Рассмотрим структуру представлений в случае, когда F — это n-полный класс F_n, где $n = n_A$, $\tau = \iota$. Пусть $R \leqslant A$. Дуга (t,x,y,t') автомата R называется критической по гомоморфизму φ этого фрагмента в эталон, если она является единственным прообразом по φ некоторой дуги эталона. Состояние t называется висячим, если $\delta_R(t,x)$ не определено ни для какого x.

Состояние автомата R называется изолированным, если оно является висячим и преходящим одновременно. Дуга (t,x,y,t'), где $t \neq t'$, называется изолированной, если она составляет компоненту связности в графе R. Представление R назовём тупиковым, если, удаляя из него хотя бы одну дугу, получаем автомат, не являющийся представлением.

Слово $(x_1,y_1)\ldots(x_i,y_i)$ называется неприводимым обходом (по всем дугам) эталона, если оно является обходом эталона из некоторого состояния s, а $(x_1,y_1)\ldots(x_{i-1},y_{i-1})$ обходом из этого состояния не является. Через $d(w)$ будем обозначать длину вход-выходного слова w.

Рассмотрим случай, когда эталон является автономным автоматом, т. е. когда X состоит из единственного символа. Легко убедиться, что всякий приведённый автономный автомат является определённо диагностируемым автоматом порядка не больше $n-1$.

Теорема 2.23. *Для автономного эталона равносильны следующие утверждения*:

1) *$w \in \Phi_A$ является контрольным экспериментом относительно F_n и ι*;
2) *$w = w'w''$, где w' — неприводимый обход, а w'' — начальный идентификатор некоторого состояния эталона*;
3) *замыкание Q фрагмента $R(w)$ по (J,σ), где J состоит из простых начальных идентификаторов, верифицированных в $R(w)$, а σ — диагональ, изоморфно эталону.*

Утверждение 2) теоремы 2.23 даёт конструктивный способ проверки, является ли предъявленное вход-выходное слово контрольным экспериментом для эталона относительно F_n и ι. Это утверждение даёт также алгоритм построения такого эксперимента. Из теоремы 2.23 непосредственно вытекает, что слово x^{2N-1}, поданное на вход автономного автомата с не более чем N состояниями, вместе с реакцией q исследуемого автомата на это слово позволяет распознать исследуемый автомат.

Результаты последней теоремы позволяют оценить длину контрольного эксперимента, указанного в ней.

Следствие 2.24. *Длина кратчайшего контрольного эксперимента для автономного автомата относительно F_n и ι не может быть меньше $n+1$ и не превосходит $2n+1$, причём для всех n эти оценки достижимы.*

Рассмотрим структуру представлений для частных видов эталона. Пусть дан некоторый автомат. k-м ядром этого автомата называется его подавтомат, порождённый всеми состояниями, в которых оканчивается хотя бы одно вход-выходное слово длины k. Известно, что если автомат является автоматом с конечной памятью порядка k, то его k-е ядро включается в конечный фактор.

Теорема 2.25. *Пусть эталон сильно связен или является автоматом с конечной памятью порядка k. Пусть класс представлений эталона относительно* *некоторого класса* F *и* ν_1 *непуст. Если для фрагмента* R *эталона и некоторой верифицированной системы* (J,σ) k*-е ядра эталона и замыкания* Q *фрагмента* R *по этой системе изоморфны и* $\Phi_A^k = \Phi_Q^k$*, то* R *— представление относительно* F_n *и* ν_1.

Пусть F — это n-полный класс F_n, $\tau = \nu_1$ и класс $\mathsf{R}_{\mathrm{T}}(A, \mathsf{F}_n, \nu_1)$ непуст.

Зафиксируем некоторый фрагмент R эталона и верифицированную в R систему (J,σ), у которой J состоит из всех верифицированных в R простых начальных и конечных идентификаторов длины не больше k, а σ — сужение σ_R на J. Пусть Q — замыкание R по (J,σ).

Теорема 2.26. *Пусть* A *— определённо диагностируемый автомат порядка* k *и* $\Phi_Q^k = \Phi_A^k$*. Фрагмент* R *является представлением эталона относительно* F_n *и* ν_1 *тогда и только тогда, когда* k*-е ядра эталона и замыкания* Q *изоморфны.*

Эта и предыдущие теоремы являются теоремами существования, так как не дают метода построения представлений. Основным в этих результатах является нахождение верифицированной в R системы идентификаторов состояний. Некоторые частные приёмы верификации идентификаторов рассмотрены в [3]. Общие методы верификации до сих пор не разработаны. Поэтому интересно рассмотреть альтернативные подходы к изучению представлений, где верификация заменена проверкой некоторых конструктивных свойств. Один из возможных подходов рассмотрен ниже.

Рассмотрим условия, при которых правильный фрагмент R относительно F_n и ι является представлением для эталона A в предположении, что он является определённо диагностическим автоматом порядка k.

Пусть φ — гомоморфизм автомата R на A. Каждому состоянию s эталона поставим в соответствие семейство ν_s подмножеств входных слов длины k по следующему правилу: $z \in \nu_s$, если в R существует состояние $t \in \varphi^{-1}(s)$, такое что z состоит из всех слов p длины k, для которых $\delta_R(t,p)$ определено. Семейство ν_s назовём правильным, если элементы ν_s несравнимы по включению. Семейство ν_s назовём полным по X, если для всякого $x \in X$ найдётся класс $z \in \nu_s$, содержащий слово, начинающееся символом x. Положим $M(A,\varphi) = \{\nu_s\}_{s\in S}$. Через $\bigcup M(A,\varphi)$ обозначим семейство, состоящее из всех элементов z всех семейств ν_s из $M(A,\varphi)$. Семейство $M(A,\varphi)$ назовём простым, если для любого $B \in \mathsf{F}_n$ и любого гомоморфизма ψ автомата R на B из равенства $\bigcup M(A,\varphi) = \bigcup M(B,\psi)$ следует $M(A,\varphi) = M(B,\psi)$. Введём операцию сложения семейств ν_s следующим образом: слова $p, q \in X^k$ принадлежат одному классу семейства $[\nu_a + \nu_b]$, если существует последовательность слов $r_1, \ldots, r_l$, такая что $r_1 = p$, $r_l = q$ и пара $(r_i r_{i+1})$ принадлежит классу хотя бы одного из семейств ν_a, ν_b.

Теорема 2.27. *Пусть существует гомоморфизм* φ *фрагмента* R *на эталон* A*, причём* $M(A,\varphi)$ *обладает следующими свойствами*:

1) *каждое* $\nu_s \in M(A,\varphi)$ *является правильным частичным разбиением множества* X^k*, полным по* X;

2) *если* $a \neq b$, $a, b \in S$, *то разбиение* $[\nu_a + \nu_b]$ *состоит из одного класса*;
3) *семейство* $M(A, \varphi)$ *является простым.*

Тогда R *является представлением эталона относительно класса* F_n *и* ι.

Рассмотрим определённо диагностируемый эталон порядка $k = 1$. По фрагменту R построим автомат Q_1 следующим образом. Отождествим в фрагменте R состояния, которые порождают одно и то же вход-выходное слово длины 1. Получим в общем случае недетерминированный частичный автомат R'. Затем проведём детерминизацию автомата R' точно так же, как при построении замыкания. Результат детерминизации обозначим через Q_1. Таким образом, автомат Q_1 является замыканием фрагмента R по системе идентификаторов (J, σ), где J состоит из всех простых начальных идентификаторов длины 1 эталона, а σ — диагональ, причём верификация этой системы не проводится.

Пусть существует гомоморфизм φ фрагмента Q_1 на A. Рассмотрим семейство $M(A, \varphi)$. Условие 1) теоремы 2.27 равносильно тому, что каждое ν_s является разбиением множества X, условие 2) — тому, что для $a \neq b$ справедливо $[\nu_a + \nu_b] = 1$, где 1 — единица решётки разбиений на множестве X, т. е. разбиение, состоящее из одного класса X.

Имеет место следующий критерий.

Теорема 2.28. *Фрагмент* R *определённо диагностируемого порядка* 1 *эталона является его представлением относительно* F_n *и* ι *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия*:

1) *фрагмент* Q_1 *не имеет висячих вершин и* $\varphi(Q) = A$ *для всех гомоморфизмов* φ *этого фрагмента в эталон*;
2) *семейство* $M(A, \varphi)$ *разбиений алфавита* X, *порождённое фрагментом* Q_1, *обладает свойством, что* $[\nu_a + \nu_b] = 1$ *для всех* $a \neq b$, *где* $a, b \in S$;
3) *это семейство является простым.*

В [18] показано, что при $n > 2$ и $m > 4$ условия 1)—3) теоремы независимы.

2.4. Представления определённо диагностируемых автоматов

В этом разделе изучаются свойства правильных текстуальных представлений определённо диагностируемых порядка k автоматов. Выбор таких эталонов определяется следующими соображениями. Определённо диагностируемые порядка k автоматы обладают максимальным разнообразием внешнего поведения среди автоматов с одной и той же функцией переходов. В связи с этим кажется вероятным, что построение представлений таких эталонов менее трудоёмко по сравнению с общим случаем. Кроме того, представление автомата с менее разнообразным поведением в большинстве случаев порождает представление определённо диагностируемого порядка 1 автомата. Поэтому построение представления определённо диагностируемого порядка 1 автомата можно рассматривать как промежуточный этап построения автомата с менее разнообразным поведением.

В разделе сформулированы необходимые и достаточные условия (критерии), при которых фрагмент R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и различных τ. Для случая $\tau = \iota$ описана структура экономных представлений. Такие представления позволяют строить экономные контрольные эксперименты и могут быть полезны при получении оценок длины контрольных экспериментов.

Найден критерий, при котором вход-выходное слово является контрольным экспериментом для определённо диагностируемого порядка k эталона, $k \leqslant 11$, относительно F_n и ι.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть A — некоторый автомат с n состояниями и автомат R гомоморфно отображается в A. Нужно определить, является ли фрагмент R представлением автомата A относительно n-полного класса и $\tau = \iota$. В предыдущем разделе был предложен метод решения этой задачи при наличии некоторой информации о верифицированных в R идентификаторах поведения состояний. По этой информации по определённым правилам строилась последовательность автоматов, отражающая прирост информации в процессе анализа фрагмента R. Эта последовательность автоматов за конечное число шагов сходилась к единственному так называемому предельному автомату — замыканию Q. Вид замыкания Q и определял, является ли этот фрагмент представлением автомата A. Однако априорной информации об идентификаторах автомата A может не быть. Тогда совокупность идентификаторов приходится определить по виду автомата R, что в общем случае является весьма сложной задачей. Уровень её сложности определяется как свойствами автомата A, так и свойствами фрагмента R. С этой точки зрения определённо диагностируемые порядка 1 автоматы являются идеальными объектами: по виду отображающихся в них автоматов легко определить начальное множество верифицированных идентификаторов.

Пусть R — фрагмент эталона, для которого выполняется равенство $\Phi_A^1 = \Phi_R^1$. Из свойств определения класса F_n вытекает, что каждое слово $(x, y) \in \Phi_R^1$ является простым начальным идентификатором состояний любого автомата $B \in \mathsf{F}_n$, для которого $R \leqslant B$. Поэтому такой автомат B является определённо диагностируемым порядка 1 автоматом. Множество Φ_R^1 принимаем в качестве начального множества верифицированных в R идентификаторов.

Введём на множестве T состояний фрагмента R некоторые отношения. Пусть λ_{Rt}^1 — множество всех вход-выходных слов длины 1, порождаемых состоянием t фрагмента R, ψ_{Rt}^1 — множество всех вход-выходных слов длины 1, которые оканчиваются в этом состоянии. Положим $(s, t) \in \beta$, если $\lambda_{Rt}^1 \cap \lambda_{Rs}^1 \neq \varnothing$ или $\psi_{Rt}^1 \cap \psi_{Rs}^1 \neq \varnothing$, где $s, t \in T$. По определению отношение β рефлексивно и симметрично. Пусть α — транзитивное замыкание отношения β, т. е. $\alpha = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \beta^i$ — наименьшая эквивалентность, для которой $\alpha \supseteq \beta$.

Лемма 2.29. *Если $R \leqslant A$, то α является конгруэнцией на T.*

Конгруэнция α на состояниях фрагмента R эталона A однозначно определяет фактор-автомат R/α. Ясно, что $R \leqslant R/\alpha \leqslant A$. Если $R \leqslant A$ и $\Phi_A^1 = \Phi_R^1$, то

R/α является замыканием фрагмента по верифицированной системе (J, σ), где $J = \Phi_A^1$ и σ — диагональ. Автомату R/α поставим в соответствие обыкновенный неориентированный граф $G(R)$: множество его вершин — множество состояний этого автомата, т. е. множество T/α классов конгруэнции α; вершины $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ соединены ребром, если $\alpha(a) \neq \alpha(b)$, функция выходов Λ автомата R/α такова, что $\Lambda(\alpha(a), x)$, $\Lambda(\alpha(b), x)$ одновременно определены для некоторого $x \in X$ и, стало быть, $\Lambda(\alpha(a), x) \neq \Lambda(\alpha(b), x)$. Будем говорить, что граф $G(R)$ однозначно n-раскрашиваем, если все раскраски его вершин в n цветов изоморфны.

Теорема 2.30. *Автомат R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия*:

1) $R \leqslant A$;
2) $\Phi_A^1 = \Phi_R^1$;
3) *граф $G(R)$ однозначно раскрашиваем.*

Эта теорема указывает, наряду с теоремой 2.28, конструктивный способ проверки того, является ли предъявленный фрагмент R замыканием эталона относительно указанных F и τ. Необходимо проверить однозначность раскраски, что является хорошо известной комбинаторной задачей. Конструктивные критерии «быть представлением» из теорем 2.28, 2.30 могут служить правилами завершения контрольных экспериментов различного вида: пассивного эксперимента при так называемом функциональном контроле [34, 46], когда экспериментатор только наблюдает входы и выходы автомата в процессе его штатного функционирования; активного эксперимента, когда на вход автомата поступает (псевдо)случайная последовательность; активного тестового эксперимента, когда экспериментатор подаёт на автомат специально построенную входную последовательность [34, 46]. Эти критерии полезны и при разработке алгоритмов построения таких последовательностей.

Напомним, что представление $R \in \mathsf{R}_\tau(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ называется минимальным, если для любого представления $Q \in \mathsf{R}_\tau(A, \mathsf{F}_n, \iota)$ из неравенства $Q \leqslant R$ следует включение $R \leqslant Q$. Из определения вытекает, что минимальные представления не имеют гомоморфизмов в себя, кроме изоморфизмов, и не имеют изоморфных компонент связности. Другими словами, минимальные представления — это такие представления, в которых нельзя расщеплять и дублировать состояния и вычёркивать дуги, т. е. это некоторый «неделимый» фрагмент функционирования эталона.

Правильной частью $O(R)$ автомата R назовём автомат, полученный из R удалением всех его изолированных дуг (но не петель).

Пусть $t \in T$ — некоторое состояние автомата R. Обозначим через $O(t)$ совокупность всех тех дуг автомата R, начала или концы которых совпадают с t. Каждую петлю (t, x, y, t) из $O(t)$ заменим парой дуг (t', x, y, t), (t, x, y, t'') и поместим их в $O(t)$. Все состояния в дугах из $O(t)$, отличные от t (включая t', t''), переобозначим так, чтобы в разных дугах не встречалось одно и то же состояние. Каждое двухэлементное подмножество множества $O(t)$ образует частичный автомат с тремя состояниями, у которого состоянию t инцидентно две дуги, а остальным двум состояниям — по одной. Прямую сумму всех таких автоматов обозначим через $\Sigma O(t)$. Прямую сумму по всем $t \in T$ всех автоматов $\Sigma O(t)$ обозначим через ΣR. Ясно, что $\Sigma R \leqslant O(R) \subseteq R$.

Теорема 2.31. *Автомат R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда ΣR является представлением.*

Следствие 2.32. *Если R является минимальным представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ι, то $R = \Sigma R$.*

Следствие 2.33. *Для любого представления R определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ι существует гомоморфно отображающееся на него минимальное представление.*

Теорема 2.28 даёт критерий, при котором фрагмент R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ι в терминах свойств разбиений ν_s. Теорема 2.30 даёт критерий в терминах однозначной раскраски вспомогательного графа, полученного на замыкании фрагмента по верифицированной системе (J, σ), где $J = \Phi_A^1$ и σ — диагональ множества J. Следующее утверждение показывает, что увеличение информации о совместимости верифицированных идентификаторов снимает необходимость исследования раскрасок вспомогательного графа. Пусть R — некоторый фрагмент. Зафиксируем верифицированную систему (J, σ), где J состоит из всех верифицированных в R простых начальных и конечных идентификаторов состояний длины 1, а σ равно сужению σ_R на J. Замыкание фрагмента R по (J, σ) обозначим через Q.

Теорема 2.34. *Фрагмент R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда $Q = A$.*

Эта теорема показывает, что верификация идентификаторов состояний равносильна проверке существования однозначной n-раскраски и равносильна проверке свойств разбиений ν_s.

Рассмотрим условия, при которых фрагмент является представлением относительно различных τ. Пусть $\tau = \nu_1$.

Следствие 2.35. *Фрагмент R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ν_1 тогда и только тогда, когда первые ядра эталона и замыкания Q изоморфны и $\Phi_A^1 = \Phi_Q^1$.*

Рассмотрим случай $\tau = \varepsilon_1$.

Теорема 2.36. *Фрагмент R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ε_1 тогда и только тогда, когда $\Lambda_Q^1 \supseteq \Lambda_A^1$.*

Рассмотрим отношение неотличимости ρ_{ri} автоматов экспериментами высоты i и кратности r на классе F_n. Можно показать, что если $(A, B) \in \rho_{ri}$, то существует всего четыре возможности: $(A,B) \in \rho_{r1}$, $(A,B) \in \nu_1$, $(A,B) \in \varepsilon_1$, $(A,B) \in \iota$. Очевидно, что R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда $\Phi^1_R = \Phi^1_A$. Утверждения 2.33—2.35 дают соответствующие критерии для оставшихся случаев. Таким образом, получен критерий того, что R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно F_n и произвольного ρ_{ri}.

Заметим, что не только увеличение информации о верифицированной системе идентификаторов может «снимать» требование однозначной раскраски вспомогательного графа. Структура самого класса F, связанного с автоматом-эталоном определённым образом, может упрощать критериальные требования к представлениям. В качестве одного из таких примеров мы приводим класс так называемых локально порождённых (эталоном) автоматов, изучавшихся в [28—30].

Рассмотрим класс A автоматов, порождённых локальными преобразованиями эталона [18, 28, 29]. Окрестностью O_s состояния $s \in S_A$ назовём множество всех тех его состояний, которые достижимы из s или из которых достижимо s входными словами длины не больше 1. Пусть теперь автоматы из A получены из эталона заменой состояния $\delta_A(s,x)$ некоторым $t \in O_s$. Полученный класс является подклассом предыдущего. Ясно, что если в эталоне существует компонента связности, состоящая из одного состояния s, то $O_s = \{s\}$ и эта компонента присутствует в любом $B \in \mathsf{A}$. Правильной частью D эталона A назовём автомат, полученный из A удалением всех компонент связности, имеющих одно состояние.

Теорема 2.37. *Фрагмент R является представлением определённо диагностируемого порядка 1 эталона относительно A и ι тогда и только тогда, когда $Q \supseteq D$.*

Пусть по-прежнему A — это определённо диагностируемый порядка k автомат и w — фрагмент его поведения. Пусть теперь (J,σ) — более мощная верифицированная в R система (относительно F_n и ι), для которой J состоит из всех простых начальных и конечных идентификаторов состояний, входящих в J_R, σ — сужение σ_R на J, Q — замыкание фрагмента $R(w)$ по новой системе (J,σ).

Теорема 2.38. *Вход-выходное слово w является контрольным экспериментом для определённо диагностируемого порядка k эталона при $k \leqslant 11$ относительно F_n и ι тогда и только тогда, когда замыкание Q изоморфно эталону.*

3. Теоретико-графовые характеризации представлений автомата

В данном разделе основное внимание уделяется задаче характеризации представлений автомата относительно подклассов N-полного класса автоматов, образующихся при наложении определённых ограничений на их структурно-алгебраические свойства и поведение. Показано, что теорема 2.30, дающая характеризацию представлений относительно n-полного класса, является представителем целого класса аналогичных утверждений, к получению которых можно подойти с некоторых общих позиций. Мы существенно используем понятия и методы теории бинарных отношений и графов, что позволяет в ряде случаев оценить относительную сложность задачи распознавания представлений в терминах теории NP-полноты [1].

В этом разделе автомат $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ — это детерминированный конечный автомат Мили, возможно частичный. Все рассматриваемые автоматы имеют одинаковые входной алфавит X и выходной алфавит Y. Для частичных автоматов предполагаются одинаковыми области определения функций переходов и выходов, которые обозначаем для автомата A через $\mathrm{Dom}\, A$. Если φ — гомоморфизм автомата B в автомат A, то образ автомата B будем обозначать через $\varphi(B)$, т. е. $\varphi(B)$ — такой подавтомат автомата A, что для любой дуги (s, x, y, t) последнего в B существует её прообраз. При $\varphi(B) = A$ автомат B будем называть полным фрагментом автомата A.

При изучении множества $R(A, F, \tau)$ всех представлений автомата A относительно класса F с точностью τ полагаем, что τ — изоморфизм или изоморфное включение, F — подкласс класса $\mathsf{F}_n(U)$ всех автоматов с числом состояний n, причём эталон A — приведённый автомат с n состояниями.

Пусть имеется гомоморфизм автоматов R и A, $R \leqslant A$, $R = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Априори или в результате анализа автомата R определяются два отношения на множестве его состояний: отношение совместимости и отношение несовместимости. Первое допускает отождествление состояний, а второе запрещает такое отождествление при гомоморфизме A в любой автомат из класса F. В частности, такие отношения могут вводиться на основе верифицированных идентификаторов состояний, как это описано в предыдущем разделе.

3.1. Отношения совместимости

Отношение σ на множестве состояний фрагмента R назовём верифицированным отношением совместимости, если для любых состояний a, b и гомоморфизма φ фрагмента R в любой автомат $B \in F$ из того, что $(a, b) \in \sigma$, следует, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Такое отношение σ может определяться как «внутренними» свойствами автомата R и класса F (например, верифицированными идентификаторами состояний), так и «навязываться» извне, за счёт дополнительной информации, не проявляющейся явно в эксперименте с автоматами.

Пусть φ — гомоморфизм R в $B \in F$ и $\ker\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1}$ — его ядро, являющееся конгруэнцией на множестве состояний автомата R. Этот гомоморфизм может быть не единственным. Пусть Φ — множество всех гомоморфизмов автомата R в автомат B. Тогда $\varepsilon_B = \bigcap\limits_{\varphi \in \Phi} \ker\varphi$ — наименьшая (по включению) конгруэнция среди всех конгруэнций, определяемых гомоморфизмами R в B. Если B пробегает все элементы класса F, то пересечение всех конгруэнций ε_B определяет конгруэнцию $\varepsilon_F(R) = \bigcap\limits_{B \in F} \varepsilon_B$ на множестве состояний автомата R.

Всякое подмножество $\sigma \subseteq \varepsilon_F(R)$ назовём верифицированным (относительно класса F) отношением совместимости на множестве состояний автомата R.

В общем случае отношение σ не является конгруэнцией, но может быть естественным образом расширено до неё, с помощью процесса, соответствующего детерминизации автомата R, определяемого отношением σ совместимости его состояний, до конгруэнции σ^*, наименьшей среди всех конгруэнций, содержащих σ [16]. По ней корректно (на основании утверждения, аналогичного лемме 2.29) определяется фактор-автомат автомата R, который мы назовём замыканием R по σ и обозначим через $[R]_\sigma$.

Обозначим через $E_F(R)$ множество всех верифицированных конгруэнций, упорядоченное отношением включения.

Справедливо следующее утверждение [16].

Теорема 3.1. *Множество $E_F(R)$ верифицированных конгруэнций есть решётка с операциями $\inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, $\sup(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2)^*$, единицей $1 = \varepsilon_F(R)$ и нулём $0 = i_s$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E_F(R)$, где i_s — диагональ множества состояний s автомата R, соответствующая пустому отношению совместимости.*

Отношения совместимости σ, для которых $\sigma^* = \varepsilon_F(R)$, несут максимальную информацию о возможности отождествления состояний, пустое отношение $\sigma = \varnothing$, $\sigma^* = i_s$, указывает на отсутствие какой-либо информации об отождествлении состояний.

Пусть σ_1 — верифицированное отношение совместимости, $R_1 = [R]_{\sigma_1}$. Через F_R обозначим множество тех автоматов $B \in F$, для которых $R \leqslant B$, т. е. $F_R = F(R) \cap F$, где $F(R)$ — класс описываемых фрагментом R автоматов из множества $\mathsf{F}(U)$.

Теорема 3.2. *Если σ — верифицированное (относительно класса F) отношение на множестве состояний автомата R, то описываемый автоматом R класс F_R совпадает с классом F_{R_1}, описываемым его фактор-автоматом $R_1 = [R]_\sigma$. При этом всякий гомоморфизм φ автомата R в автомат $B \in F$ может быть представлен как $\varphi = \eta \circ \beta$, где η — естественный гомоморфизм R в R_1, а β — гомоморфизм R_1 в B.*

3.2. Отношения несовместимости

Отношение ρ на множестве состояний фрагмента R назовём верифицированным отношением несовместимости, если для любых состояний a, b и гомоморфизма φ фрагмента R в любой автомат $B \in F$ из того, что $(a, b) \in \rho$, следует, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Иными словами, если $\mu_B = \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} \ker \varphi$, где объединение берётся по всем гомоморфизмам φ из R в B, то ρ — верифицированное отношение несовместимости тогда и только тогда, когда $\rho \subseteq S \times S \setminus \bigcup\limits_{B \in F} \mu_B = \rho_F(R)$, где объединение берётся по всем $B \in F$, для которых существует гомоморфизм R в B.

Пусть σ — некоторое отношение совместимости на множестве состояний автомата R, а ρ — отношение несовместимости на нём. Посредством отношения совместимости отношение несовместимости может быть расширено (снова конструктивно) до некоторого максимального отношения ρ^* несовместимости, согласованного с σ, которое мы назовём верифицированным замыканием ρ.

На фактор-автомате $R_1 = R/\varepsilon$ отношение ρ^* индуцирует на множестве состояний S/ε автомата R_1 отношение верифицированной несовместимости ρ_1 по следующему правилу: $(\pi_i, \pi_j) \in \rho_1$, если в ρ^* существует такая пара (s, t), что $s \in \pi_i$, $t \in \pi_j$.

Множество верифицированных замыканий отношений несовместимости, согласованное с верифицированной конгруэнцией ε, упорядоченное отношением включения, обозначим через $\mathsf{P}^*_R(F, \varepsilon)$. Оно имеет наибольшее верифицированное отношение несовместимости $\rho_F(R)$.

Справедливо утверждение, аналогичное теореме 3.1.

Теорема 3.3. *Для любой верифицированной конгруэнции $\varepsilon \in E_R(F)$ множество $\mathsf{P}^*_R(F, \varepsilon)$ является решёткой с операциями $\inf\{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1 \cap \rho_2$ и $\sup\{\rho_1, \rho_2\} = (\rho_1 \cup \rho_2)^*_\varepsilon$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathsf{P}_R(F, \varepsilon)$, нулём, равным пустому отношению $\varnothing$, и единицей, равной $\rho_F(R)$.*

3.3. Ассоциированные графы

Пару $P = (\sigma, \rho)$ верифицированных отношений совместимости σ и несовместимости ρ будем называть верифицированной парой для автомата R (относительно класса F). Пусть $P = (\sigma, \rho)$ — верифицированная пара для R относительно класса F. С R и P свяжем обыкновенный неориентированный граф $G(R, P) = (V_R, U_R)$, определённый следующим образом: множество его вершин V_R есть множество S/ε классов верифицированной конгруэнции $\varepsilon = \sigma^*$; если $v = [s]$ и $w = [t]$ — классы этой конгруэнции, представителями которых являются состояния s и t соответственно и $(s, t) \in \rho^*_\varepsilon$, то $(v, w) \in U_R$.

На состояниях x автомата $[R]$ отношение ρ индуцирует верифицированное отношение несовместимости ρ': если $[s]$ и $[t]$ — вышеуказанные классы, т. е. состояния автомата $[R]_\sigma$, то $([s], [t]) \in \rho'$ тогда и только тогда, когда $(s, t) \in \rho^*_\varepsilon$. Поэтому граф $G(R, P)$ можно понимать как задание индуцированного верифицированного отношения ρ' несовместимости на множестве состояний автомата $[R]_\sigma$, так как отношение ρ' антирефлексивно и симметрично.

Граф $G(R, P)$ будем называть ассоциированным с автоматом R посредством пары P или, более коротко, ассоциированным с парой (R, P).

Пусть $G = (V, U)$ — некоторый обыкновенный неорграф. Напомним, что правильной n-раскраской графа G называется отображение φ множества вершин графа в некоторое n-элементное множество K, при котором смежные вершины отображаются в разные элементы из K. Две раскраски φ_1 и φ_2 называются изоморфными, если $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$. Граф называется однозначно n-раскрашиваемым, если все его n-раскраски изоморфны [51].

Поставим в соответствие автомату $R = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ такое семейство $X(R)$ подмножеств множества X, что $X_s \in X(R)$, $s \in S$, если $X_s = \{x \in X \mid (s,x) \in \operatorname{Dom} R\}$. Через $\Gamma\bigl(X(R)\bigr)$ обозначим граф пересечений семейства X с множеством вершин $V\bigl(X(R)\bigr)$, $\{s,t\} \in U\bigl(X(R)\bigr)$, если $X_s \cap X_t \neq \varnothing$.

3.4. Характеризация представлений и их сложность

Далее задача идентификации автомата рассматривается при следующих ограничениях. Все рассматриваемые классы являются подмножествами множества $\mathsf{F}_c(U)$ всех приведённых автоматов в алфавите $U = X \times Y$. Автоматы, если не оговорено противное, неинициальные. Для простоты полагаем, что все автоматы из $F \subseteq \mathsf{F}_c(U)$ связные. Если $A \in F$ — выделенный автомат-эталон, то он не вкладывается изоморфно ни в какой другой автомат $B \in F$.

Пусть заданы класс $F \subseteq \mathsf{F}_c(U)$, эталон $A \in F$ и фрагмент R_A автомата A. Обозначим через $I(A, R, F)$ множество $F(R_A) \cap F$. Под задачей идентификации автомата A в классе F понимаем нахождение такого фрагмента $R \in F(A)$, что $I(A, R, F) = \{A\}$ (единственность понимается с точностью до изоморфизма, т. е. идентификация осуществляется с точностью, равной изоморфизму). Фрагмент R, решающий эту задачу, есть представление автомата A относительно класса F с точностью τ, являющейся изоморфизмом.

Основной интерес представляют нетривиальные представления, не содержащие в явном виде информацию о полном функционировании анализируемого автомата. Наиболее изученными среди нетривиальных представлений являются контрольные эксперименты, как простые, так и кратные. Такие представления обладают наиболее бедными отношениями совместимости и несовместимости, и по структуре графов переходов фрагментов их можно классифицировать как древовидные. Они образуют подкласс класса ациклических представлений, в которых возможно отождествление некоторых висячих вершин. В широком смысле циклические представления — это такие представления, которые в графе переходов имеют сильно связные подграфы, и класс тривиальных представлений является подмножеством этого класса.

Используя теорему 1.1, можно привести примеры, показывающие, что из того, что существует один вид представлений, например нетривиальные циклические, не следует, что существуют, например, контрольные эксперименты (древовидные представления).

Варьирование классов в задаче идентификации приводит к различным по сложности конкретным задачам описания соответствующих представлений. Само задание классов может осуществляться различными способами. В предыдущих разделах приведены варианты таких описаний с помощью различных дескрипторов автоматов.

Пусть $R \in \mathsf{R}(A, F, \tau)$ — нетривиальное представление автомата A и $|S_A| = n$. Верифицированная пара $P = (\sigma, \rho)$ для R относительно F определяет структуру раскрасок графа $G(R, P)$. Далее будем рассматривать только подклассы F n-полного класса и эталоны с n состояниями. Назовём класс F n-плотным для эталона A, если для любого его фрагмента R, такого что $\varphi(R) \neq A$ для некоторого гомоморфизма φ, следует, что R есть фрагмент некоторого другого автомата B из F (более широкое понятие m-плотного класса рассмотрено в [32]). Потребуем, чтобы рассматриваемые классы были n-плотными для эталонов.

Покажем, что некоторые хорошо известные классы являются n-плотными для всех принадлежащих им автоматов.

Теорема 3.4. *n-полный класс F_n является n-плотным для любого принадлежащего ему автомата с n состояниями.*

Пусть $\Lambda_A^i = \{\lambda_s^i \mid s \in S_A\}$ и λ — функция выходов автомата $A \in F_N$. Обозначим $L_N^i(A) = \{B \in F_N \mid \Lambda_B^i = \Lambda_A^i\}$.

Теорема 3.5. *Класс $L_N^1(A)$ является N-плотным для A.*

Класс $L_N^1(A)$ полностью определяется сохранением одношаговой функции выходов автомата A при произвольном изменении функции переходов. Другим предельным случаем можно считать сохранение функции переходов автомата A при произвольном изменении функции выходов.

Обозначим через $D_N(A)$ множество всех автоматов из F_N, которые являются приведёнными формами автоматов, полученных из A всевозможными изменениями отметок его дуг.

Теорема 3.6. *Класс $D_N(A)$ является N-плотным для приведённого автомата A с N состояниями.*

Пусть A — определённо диагностируемый порядка 1 автомат, $|S_A| = n$, и F — n-плотный для A класс.

Теорема 3.7. *$R \in \mathsf{R}(A, F, \tau)$ тогда и только тогда, когда существует такая верифицированная пара $P = (\sigma, \rho)$ для R относительно F, что выполняются следующие условия*:

1) *существует гомоморфизм φ автомата R в эталон A*;
2) $\Phi^1(R) = \Phi^1(A)$;
3) *граф $G(R, P)$ является однозначно n-раскрашиваемым.*

Приведённые достаточные и необходимые условия для распознавания представлений постулируют только существование верифицированной пары. Для ряда классов даётся конструктивный способ построения таких верифицированных пар, позволяющий сводить задачу анализа фрагментов на свойство быть представлением к задаче раскраски некоторого графа.

Основным средством построения верифицированных пар являются идентификаторы состояний. Напомним, что фрагмент R автомата A с фиксированным состоянием t называется идентификатором состояния s автомата A, если для любого гомоморфизма φ фрагмента R в A выполняется равенство $\varphi(t) = a$.

Как обычно, Φ_A обозначает множество всех вход-выходных слов (слов в алфавите $X \times Y$), порождаемых автоматом A, а Φ_A^k — его подмножество из слов длины k. Если R — некоторый, вообще говоря частичный, автомат, s — его состояние, то λ_{Rs}^k есть множество всех вход-выходных слов (x, y) длины k, порождаемых состоянием s; $\Phi_R^k = \bigcup\limits_{s \in S_R} \lambda_{Rs}^k$. Множество первых проекций λ_{Rs}^1 и ψ_{Rs}^1 обозначим через X_{Rs}^+ и X_{Rs}^- соответственно (напомним, что ψ_{Rs}^k обозначает множество вход-выходных слов длины k, оканчивающихся в состоянии s). Если фрагмент R определённо диагностируемого порядка 1 автомата A таков, что $\Phi_R^1 = \Phi_A^1$, то множество Φ_R^1 является множеством простых начальных идентификаторов состояний любого автомата B из класса F_n, фрагментом которого является R, т. е. при любом гомоморфизме R в B состояния автомата R, порождающие одну и ту же пару $(x, y) \in X \times Y$, отображаются в одно и то же состояние. Тогда на основании множества Φ_R^1 как множества верифицированных идентификаторов (см. раздел 2) может быть определена верифицированная пара $P = (\sigma, \rho)$.

Пусть A — определённо диагностируемый порядка 1 автомат. Если $F = F_n$, $A \in F_n$ и A есть определённо диагностируемый порядка 1 автомат, то Φ_A^1 является множеством верифицированных идентификаторов состояний автомата A для любого полного фрагмента $R \leqslant A$. По этому множеству определяется пара верифицированных отношений σ_n и ρ_n на множестве состояний фрагмента R: $(a, b) \in \sigma$, если $\lambda_R(a, x) = \lambda_R(b, x)$ (т. е. $\lambda'_{R_a} \cap \lambda'_{R_b} \neq \varnothing$) для некоторого $x \in X$; $(a, b) \in \rho$, если $\lambda_R(a, x) \neq \lambda_R(b, x)$ для некоторого $x \in X$. Тогда $\sigma_n = \sigma^*$, $\rho_n = \rho_{\sigma_n}^*$ и $P_n = (\sigma_n, \rho_n)$ — верифицированная пара. По этой паре определяется ассоциированный граф $G(R, P_n)$, и из теорем 3.4 и 3.7 получаем теорему 2.30, в которой $G(R) = G(R, P_n)$. Заметим, что в этом случае $G(R) = \Gamma\big(X(R)\big)$.

Пусть теперь A — групповой определённо диагностируемый порядка 1 автомат, т. е. такой автомат, что $\delta_A(s, x)$ есть перестановка на множестве S_A при любом фиксированном $x \in X$, $F = G_n \subseteq F_n$ — класс групповых автоматов и R — полный фрагмент A.

Пусть на множестве S_R заданы отношения σ_1 и ρ_1: $\sigma_1 = \sigma$, $(a, b) \in \rho_1$, если для некоторого $x \in X$ или $\lambda_R(a, x) \neq \lambda_R(b, x)$, или существуют состояния a' и b', такие что $\delta_R(a', x) = a$, $\delta_R(b', x) = b$ и $\lambda_R(a', x) \neq \lambda_R(b', x)$. Положим $\sigma_g = \sigma_1^* = \sigma_n$, $\rho_g = \rho_{1\sigma_g}^*$, $P_g = (\sigma_g, \rho_g)$.

Лемма 3.8. *Класс G_n является n-плотным для любого группового определённо диагностируемого порядка 1 автомата при $|S| \geqslant 2$, $|X| \geqslant 2$.*

Из леммы 3.8 и теоремы 3.7 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.9. *Автомат R есть представление группового определённо диагностируемого порядка 1 автомата A относительно класса G_n тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *существует гомоморфизм автомата R в эталон A;*

2) $\Phi_R^1 = \Phi_A^1$;
3) *граф* $G(R, P_g)$ *является однозначно* n*-раскрашиваемым.*

Из этой теоремы следует, что, в отличие от случая, когда в качестве класса F выбирается класс F_n всех автоматов с n состояниями, нетривиальные представления группового автомата относительно класса G_n (точнее, их замыкания) допускают висячие вершины и контрольные эксперименты, как частный случай представлений, могут содержать неподтверждённые переходы. На основании этой теоремы могут быть построены минимальные представления для этого случая.

Рассмотрим теперь представления автоматов без потери информации. Пусть A — определённо диагностируемый порядка 1 автомат, являющийся автоматом без потери информации порядка 1 (см. [3,37]), т. е. для любого состояния s автомата A и различных $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство $\lambda_A(s, x_1) \neq \lambda_A(s, x_2)$. Пусть класс $I_n \subseteq F_n$ есть класс всех автоматов без потери информации порядка 1. В этом случае для полного фрагмента $R \leqslant A$ определим отношения σ_ω и ρ_ω следующим образом: $\sigma_\omega = \sigma_n$, $(a, b) \in \rho_\omega$, если $(a, b) \in \rho_n$ или для некоторых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, выполняется равенство $\lambda_R(a, x_1) = \lambda_R(b, x_2)$. Тогда $P_\omega = (\sigma_\omega, \rho_\omega)$ — верифицированная пара, и с этой парой ассоциирован граф $G(R, P_\omega)$. В этом случае для класса I_n справедлив аналог леммы 3.8 и теоремы 3.9 с соответствующей заменой ассоциированных графов.

Заметим, что структура ассоциированного графа в этом случае является более регулярной по сравнению с предыдущими случаями.

Вернёмся снова к представлениям локально порождённых автоматов, рассмотренных в предыдущем разделе.

Пусть A — определённо диагностируемый порядка 1 автомат и F_A — множество всех автоматов, локально порождённых A. В классе F_n можно выделить неизбыточное множество автоматов, из которых в совокупности порождается весь класс F_n. Такое множество назовём базисом локальной порождаемости класса F_n, обозначим его через M_n (структура этого множества описана в [30]).

Пусть $F = F_A$. Так как функция выходов λ_A сохраняется при локальной порождаемости, то в качестве множества верифицированных идентификаторов для определённо диагностируемых порядка 1 автоматов можно выбрать множество $\Lambda_A^1 = \{\lambda_{As}^1 \mid s \in S_A\}$, где $\lambda_{As}^1 = \{(x, y) \in X \times Y \mid \lambda_A(s, x) = y\}$.

Определим пару отношений σ_l и p_l на множестве состояний фрагмента $R \leqslant A$: $(a, b) \in \sigma_1$, если существует такое состояние $s \in S_A$, что $\lambda_{Ra}^1 \cup \lambda_{Rb}^1 \subseteq \lambda_{As}^1$; ρ — отношение несовместимости состояний. Положим $\sigma_l = \sigma_1^*$, $\rho_l = \rho_{\sigma_l}^*$, тогда $P_l = (\sigma_l, \rho_l)$ — верифицированная пара. Заметим, что здесь $\sigma_1^* = \sigma_1$.

В этом случае также справедлив аналог леммы 3.8.

Теорема 3.10. *Пусть A — связный определённо диагностируемый порядка 1 автомат, $F = F_A$, точность τ — изоморфизм. $R \in (A, F_A, \tau)$ тогда и только тогда, когда пара $P_l = (\sigma_l, \rho_l)$ является определяющей для фрагмента R относительно класса F_A.*

Из определения пары P_l в случае, когда R — представление определённо диагностируемого порядка 1 автомата, следует, что граф $G(R, P_l)$ изоморфен полному графу K_n, где n — число состояний автомата. Очевидно, что K_n является однозначно n-раскрашиваемым. Тогда имеет место следующий аналог теоремы 2.30 для связных автоматов.

Теорема 3.11. *Автомат R есть представление определённо диагностируемого порядка 1 автомата A относительно класса F_A тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *существует гомоморфизм автомата R в эталон A*;
2) $\Phi_R^1 = \Phi_A^1$;
3) *граф $G(R, P_l)$ изоморфен графу K_n.*

Если в качестве представлений мы будем рассматривать контрольные эксперименты, то для связных автоматов, обладающих такими экспериментами относительно класса F_A, получаем следствие этой теоремы.

Следствие 3.12. *Слово $w \in (X \times Y)^*$ есть контрольный эксперимент определённо диагностируемого порядка 1 автомата A относительно класса F_A тогда и только тогда, когда $w \in \Phi_A$ и $w = w_1(x, y)$, где w_1 — обход автомата A.*

Полученный критерий для контрольных экспериментов позволяют дать ещё одну характеризацию контрольных экспериментов определённо диагностируемых порядка 1 автоматов относительно локально порождённого класса автоматов через уже упоминавшиеся доминирующие множества.

Пусть F — некоторый класс автоматов, A — выделенный в нём автомат-эталон. Напомним, что доминирующим множеством класса F называется такое его подмножество F', что выполняется равенство $\Phi_A(F) = \Phi_A(F')$ ($\Phi_A(F)$ — множество контрольных экспериментов A относительно F). Наименьшее по мощности доминирующее множество называется минимальным.

Пусть $F = F_A$ и $F_1(A) \subseteq F_A$ есть множество автоматов, непосредственно порождённых автоматом A, т. е. множество таких автоматов, функции переходов которых отличаются от функций переходов автомата A ровно для одной пары $(s, x) \in S \times X$. Каждой такой паре соответствует множество $F_1(s, x) = \{B \in F_1(A) \mid \delta(s, x) \neq \delta_B(s, x)\}$. Выберем из каждого класса $F_1(s, x)$ по представителю и образуем из них множество R_1.

Обозначим через $K(A)$ множество всех таких дуг $(s, x, y, t) \in A$, $\delta(s, x) = t$, $\lambda(s, x) = y$, что частичный автомат A', из которого удалена хотя бы одна из этих дуг, не имеет обхода. Пусть D — подавтомат автомата A, не содержащий одноэлементных компонент связности. Если $A \neq D$, положим $K(A) = K(D)$. Удалим из множества R_1 все автоматы $B \in F_1(s, x)$, где (s, x) соответствует дуге из $K(A)$, и получившееся множество обозначим через $R_{\min}$.

Теорема 3.13. *Множество $R_{\min}$ есть минимальное доминирующее множество класса F_A для определённо диагностируемого порядка 1 автомата A, $|R_{\min}| \leqslant mn$, и существует автомат, для которого $|R_{\min}| = (m-1)n + 1$.*

Рассмотрим характеризацию представлений определённо диагностируемых автоматов относительно базиса класса F_n по локальной порождаемости. При фиксированной функции выходов подмножество базиса, состоящее из всех автоматов с одной и той же функцией выходов λ, обозначим через M_λ (автоматы полагаем определёнными на одних и тех же множествах состояний S, входов X и выходов Y). В [30] показано, что при $m \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$, $m = |X|$, $n = |S|$ в автомате $A \in M_\lambda$ отсутствуют петли, параллельные дуги и циклы длины 2.

Пусть A — определённо диагностируемый порядка 1 автомат, $A \in M_n$, $R \in F_r(A)$. Определим отношения σ_M и ρ_M на множестве S_R следующим образом: $(a,b) \in \sigma_n$; $(a,b) \in \rho_2$, если $(a,b) \in \rho$ или расстояние между a и b в графе переходов R без учёта ориентации дуг равно 1 или 2. Тогда $\sigma_M = \sigma_n$, $\rho_M = \rho^*_{2\sigma_M}$ и $P_M = (\sigma_M, \rho_M)$ есть верифицированная пара, а $G(R, P_M)$ — ассоциированный граф.

И в этом случае при $m \leqslant \frac{1}{2}(n-1)$ справедливы аналоги леммы 3.8 и теоремы 3.9.

Остановимся на задаче анализа сложности представлений и задаче распознавания свойства «быть представлением», при которых ключевую роль играют полученные теоремы характеризации представлений. На их основе указанная задача сводится к задаче анализа раскрасок некоторого графа и относительной оценке её сложности в терминах NP-полноты. Используемые далее понятия теории NP-полноты понимаются в смысле [1].

Как обычно, P (NP) обозначает класс задач, распознаваемых детерминированными (недетерминированными) машинами Тьюринга за полиномиальное время. Под сводимостью понимается сводимость, полиномиальная по времени [1].

Пусть для автомата A определён некоторый класс F_A автоматов. Задача распознавания представлений состоит в том, чтобы по заданному автомату A и частичному автомату R определить, будет ли R принадлежать дополнению множества представлений автомата A относительно класса F_A.

Исходной информацией для алгоритма, решающего задачу распознавания, будут пары (R, A), которые можно закодировать в виде строк из нулей и единиц. Если автомат A имеет m входных сигналов, n состояний и l выходных сигналов, то для задания функций переходов и выходов достаточно строки длины $mn \log nl$, где $\log n$ — длина двоичной записи числа n. Если R имеет k состояний, то для его кодирования достаточно строки длины $mk \log(kl+1)$ с учётом кодирования символа неопределённости. Таким образом, в конечном алфавите получим слово, описывающее исходную информацию для работы алгоритма распознавания.

Результаты, касающиеся сложности задачи распознавания представлений для рассмотренных случаев [17, 29, 31, 56] могут быть суммированы в следующем утверждении.

Теорема 3.14. *Задача распознавания представлений определённо диагностируемого порядка 1 автомата в случаях n-полного класса, класса групповых автоматов, класса автоматов без потери информации, базиса локальной порожда-*

емости является NP-полной. Для случая локально порождённого класса она является полиномиальной.

Можно показать, что это утверждение справедливо и для частного случая представлений — контрольных экспериментов — во всех рассмотренных случаях. Кроме того, показано, что при сужение класса автоматов без потери информации до класса автоматов существенно без потери информации [3] задача распознавания автоматов остаётся в классе NP-полных задач.

Полученные теоремы характеризации контрольных экспериментов относительно различных классов автоматов позволяют получить нижние оценки их длин. Остановимся на случаях локально порождённого класса и n-полного класса.

Обозначим наименьшую возможную длину кратчайшего контрольного эксперимента относительно класса автоматов через $d_{\min}$, а длину наибольшего эксперимента среди всех минимальных по всевозможным эталонам через $d_{\max}$.

Теорема 3.15. *Если A — определённо диагностируемый порядка 1 автомат и F — локально порождённый класс, то выполняется неравенство*

$$mn+1 \leqslant d_{\min} \leqslant d_{\max} \leqslant mn + \frac{1}{2}(m-1)n(n-1)+1,$$

причём достижимы и нижняя и верхняя оценки.

Теорема 3.16. *При $n \geqslant 2^{m-1}-1$ длина кратчайшего контрольного эксперимента $d_{\min}$ для любого определённо диагностируемого порядка 1 автомата A относительно n-полного класса удовлетворяет неравенству*

$$d_{\min} \geqslant (2m-1)n - 2^{m-1}+2,$$

причём оценка достижима при $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2^{m-1}-1$.

Из теоремы 3.16 при $m = o(\log n)$ следует, что длина $d_{\min}$ асимптотически равна $(2m-1)n$. В то же время относительно локально порождённого класса длина кратчайшего эксперимента равна $mn+1$ для любых n и m. Таким образом, по нижним оценкам длины контрольного эксперимента имеется существенный разрыв между локально порождённым и n-полным классами автоматов. Это связано с тем, что на структуре эксперимента в первую очередь проявляют себя особенности класса неисправностей, которые не «забиваются» свойствами структуры эталона. В то же время существуют автоматы, которые «затирают» особенностями своей структуры влияние класса неисправностей на структуру контрольного эксперимента. Так как на автоматах такого типа достигаются верхние оценки длины кратчайших экспериментов, то эти оценки должны быть близки для локально порождённого и n-полного классов автоматов. Можно показать, что асимптотически верхние оценки длины кратчайших экспериментов относительно локально порождённого и n-полного классов автоматов совпадают. Это же справедливо и для случая базиса локальной порождаемости.

Таким образом, верхние оценки длин контрольных экспериментов определённо диагностируемых порядка 1 автоматов относительно трёх рассмотренных классов асимптотически равны.

4. Эксперименты в финитно определённых классах

В данном разделе изучаются свойства представлений — контрольных и распознающих экспериментов с автоматами — относительно классов, называемых финитно определёнными классами первого и второго рода. Финитно определёнными классами первого рода называются классы автоматов, заданные недетерминированным автоматом-спецификацией, а финитно определёнными классами второго рода — классы автоматов, наделённых специальными маркерами состояний (они были определены в разделе 1). Основным направлением исследований в этом случае является изучение связи топологических свойств этих классов с условиями существования и свойствами контрольных и распознающих экспериментов. Основным аппаратом исследования выступают введённые операторы аппроксимации.

В последнее время в качестве моделей дискретных систем выступают недетерминированные автоматы [6,7,22,23,25,39]. В связи с этим развивается новое направления в теории экспериментов — эксперименты с недетерминированными автоматами.

В ряде работ (см., например, [23]) разрабатывались методы построения проверяющего теста для сети автоматов. При этом входы и (или) выходы исследуемой компоненты сети недоступны. Особенности проведения эксперимента с сетью автоматов следующие:

1) могут возникать неисправности, не обнаруживаемые на выходе сети, и такие неисправности исключаются;
2) не всякое слово может быть получено на входе тестируемой компоненты.

В [23] для исследования сетей автоматов предложен метод построения сетевого эквивалента компоненты сети — недетерминированного автомата, который полностью описывает поведение этой компоненты. Проверочный тест строится по этому эквиваленту, причём считается известной верхняя оценка числа состояний «чёрного ящика».

В [24, 25] представлены два класса автоматов: класс работоспособных автоматов, реализуемых некоторым недетерминированным автоматом, и класс неработоспособных автоматов, представленный автоматами с числом состояний, не превосходящим известную верхнюю оценку. Так как неисправность автомата может значительно увеличить число состояний неисправного автомата, то актуальна задача исследования недетерминированных автоматов при отсутствии верхней оценки числа состояний.

В [39] изучена проблема построения различающих экспериментов для классов, реализуемых двумя недетерминированными автоматами, причём первый описывает работоспособное, а второй — неработоспособное поведение исследуемого детерминированного автомата. Рассмотрены случаи как с известной, так и с неизвестной верхней оценкой числа состояний.

Дальнейшее развитие эти исследования получили в [6, 7], где поставлена и решена проблема принадлежности исследуемого «чёрного ящика», который является реализацией одного из двух недетерминированных автоматов, классу реализаций одного из них. В этих работах найдены конструктивные критерии существования таких алгоритмов-экспериментаторов и методы их построения.

Приведённые замечания показывают, что исследование финитно определённых классов первого рода достаточно важно и актуально. Для них получены критерии конечности (бесконечности) класса $F \in \mathsf{F}$ и его подклассов $\lim F$ и $]F[$, показана замкнутость множества F_1 относительно оператора $\lim$. найден ряд конструктивных критериев существования контрольных экспериментов относительно класса G и автомата-эталона A, принадлежащих одному из классов F, $\lim F$ и $]F[$ для некоторого $F \in \mathsf{F}_1$ для бэровской метрики, исследована финитная распознаваемость в метрике β классов $F \in \mathsf{F}_1$ и его подклассов. Эти результаты получены в [14, 19, 42, 43].

Итак, исследуются подклассы класса $\mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U)$ всюду определённых инициальных конечных приведённых инициально связных детерминированных автоматов Мили. Для простоты нижний индекс в записи класса $\mathsf{A}(U)$ опускается. Приведём основные определения.

Пусть $G = (G, U, \delta, G_0)$ — всюду определённый, слабо инициальный недетерминированный автомат, у которого G — конечное множество состояний, G_0 — подмножество начальных состояний, $U = X \times Y$ — внешний алфавит, $\delta\colon G \times U \to 2^G$ — функция переходов. Обозначим через $gw = g(p, q)$ множество всех тех состояний, в которые недетерминированный автомат G может переходить из состояния g под действием входного слова p, порождая выходное слово q. Для $g \in G_0$ множество L_g состоит из всех вход-выходных слов w с непустым множеством gw. Множество L_g^k есть сужение L_g на слова длины не больше k.

Слабо инициальный недетерминированный автомат G называется наблюдаемым [39, 40], если для всех $u \in U$, $g \in G$ выполнено соотношение $|gu| \leqslant 1$, и инициально связным, если для всякого $g \in G$ существует такие $g_0 \in G_0$, $w \in L_{g0}$, для которых $g \in g_0$. В дальнейшем, если не оговорено противное, под недетерминированным автоматом будем понимать всюду определённый, слабо инициальный, наблюдаемый, инициально связный, недетерминированный автомат. Поведением недетерминированного автомата G назовём $L_G = \{L_g\}$, $g \in G_0$. Инициальный автомат $A \in \mathsf{A}(U)$ есть реализация недетерминированного автомата G, если $L_A \subseteq L_G$. Класс всех реализаций недетерминированного автомата G обозначим $R(G)$. При этом будем говорить, что G определяет класс $R(G)$ или G является его носителем. Класс автоматов $F \subseteq \mathsf{A}(U)$ назовём финитно определённым классом первого рода (обозначение: $F \in \mathsf{F}_1$), если существует недетерминированный автомат G, определяющий класс F. Напомним, что через G_g обозначается подавтомат недетерминированного автомата G, получаемый объявлением состояния g начальным. Ядром $\ker G$ произвольного недетерминированного автомата G назовём множество состояний g, для которых G_g является инициальным детерминированным автоматом. Цикл в недетерминированном автомате G есть пара (g,w), где $g \in G$ и w — вход-выходное слово, такое что $g = gw$.

Кроме этих классов, рассматриваются (возможно) бесконечные классы $\mathsf{A}(U,M)$ автоматов. Здесь $M \subseteq U$ и в каждом автомате из такого класса вход-выходной сигнал $(x,y) \in M$, называемый маркером, порождается не более чем одним состоянием, причём множество M заранее известно экспериментатору. Маркеры присутствуют в ряде реальных автоматов в качестве дополнительных оповещающих сигналов или служебных режимов. Обозначим через M_x множество всех маркеров (x_1,y) с $x_1 = x$. Класс автоматов F назовём финитно определённым классом второго рода (обозначение: $F \in \mathsf{F}_2$), если существует множество маркеров M, для которого $\mathsf{A}(U,M) = F$. Имеем $\mathsf{A}(U) \in \mathsf{F}_2$, так как $\mathsf{A}(U) = \mathsf{A}(U,\varnothing)$. Полагаем, что $\varnothing = \mathsf{A}(U, U \cup \{u_1\})$, где $u_1 \notin U$. Через $\mathsf{A}(U,n)$ обозначим подкласс $\mathsf{A}(U)$, состоящий из всех автоматов, число состояний которых не превосходит n.

4.1. Алгебраические свойства множества финитно определённых классов

В этом подразделе исследуется структура множеств F_1 и F_2. Введём над недетерминированным автоматом операции прямой суммы и декартова произведения. Прямой суммой $G+H$ произвольных недетерминированных автоматов G и H назовём недетерминированный автомат, получаемый расположением рядом G и H с предварительным переобозначением их состояний. Очевидно, что прямая сумма недетерминированных автоматов G и H определяет класс автоматов $R(G) \cup R(H)$.

Декартовым произведением $G \times H$ недетерминированных автоматов G и H назовём недетерминированный автомат

$$G \times H = (G \times H, U, \delta_{GH}, G_0, H_0),$$

где $\delta_{GH}\big((s_1,s_2),z\big) = \big(\delta_G(s_1,z), \delta_H(s_2,z)\big)$ при $\delta_G(s_1,z) \neq \varnothing \neq \delta_G(s_2,z)$ и $\delta_{GH}\big((s_1,s_2),z\big) = \varnothing$ в противном случае.

Структура финитно определённых классов первого рода описана в следующей теореме.

Теорема 4.1. *Множество F_1 является дистрибутивной решёткой относительно теоретико-множественных операций пересечения и объединения, в которой $\varnothing$ есть нуль, а $\mathsf{A}(U)$ — единица.*

Эта теорема расширяет аналогичный результат работ [39,40] на случай слабо инициальных недетерминированных автоматов.

Пусть β — бэровская метрика, введённая в разделе 1. Пространство $(\mathsf{A}_{\mathrm{I}}(U), \beta)$ будем называть бэровским пространством автоматов. Пусть $r = |Y|$.

Утверждение 4.2.

1. *При* $r > 1$ *множество* F_1 *бесконечно и счётно.*
2. *Всякий конечный класс* F *принадлежит* F_1.
3. *Окрестности бэровского пространства автоматов и их конечное объединение принадлежат* F_1.
4. *Множество* F_1 *не является булевой алгеброй относительно теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения.*

Пункт 2 утверждения 4.2 показывает коренное отличие введённого здесь понятия реализации от аналогичного понятия из [22,39], при котором не всякий конечный класс реализуем инициальным недетерминированным автоматом.

Рассмотрим теперь структуру множества F_2. Покажем, что это множество не является замкнутым относительно операции объединения.

Утверждение 4.3. *Пусть* F_1, F_2 *— произвольные классы из* F_2.

1. $F_1 \cap F_2 \in \mathsf{F}_2$.
2. *Объединение* $F_1 \cup F_2$ *принадлежит множеству* F_2 *тогда и только тогда, когда* $F_1 \subseteq F_2$ *или* $F_2 \subseteq F_1$.

Из утверждений 4.2 и 4.3 следует незамкнутость множества F_2 относительно теоретико-множественного объединения. Для произвольных M_1, M_2 из U введём операцию ω по правилу $\mathsf{A}(U, M_1)\, \omega\, \mathsf{A}(U, M_2) = \mathsf{A}(U, M_1 \cap M_2)$.

Теорема 4.4. *Существует изоморфизм булевой алгебры* $\langle 2^U, \cap, \cup \rangle$ *в булеву алгебру* $\langle \mathsf{F}_2, \cap, \omega \rangle$.

Структура классов, являющихся финитно определёнными первого и второго рода одновременно, описана в следующем утверждении.

Теорема 4.5. *Класс* F *принадлежит* $\mathsf{F}_1 \cap \mathsf{F}_2$ *тогда и только тогда, когда* F *пуст, совпадает с* $\mathsf{A}(U)$ *или является конечным классом из* F_2.

Из этой теоремы видно, что множества F_1 и F_2 описываются не сводимыми друг к другу финитными средствами, что порождает достаточно выразительные множества классов автоматов.

Рассмотрим операторы алгебраического замыкания и аппроксимации, которые служат основным средством изучения контрольных и распознающих экспериментов в финитно определённых классах первого и второго рода.

Оператор $\theta\colon 2^{\mathsf{A}(U)} \to 2^{\mathsf{A}(U)}$ называется оператором алгебраического замыкания [33], если выполнены следующие условия:

1) для любого класса автоматов F выполнено $F \subseteq \theta(F)$;
2) для произвольного класса F выполнено $\theta\big(\theta(F)\big) = \theta(F)$;
3) для любых $F_1, F_2 \subseteq \mathsf{A}(U)$ из $F_1 \subseteq F_2$ вытекает $\theta(F_1) \subseteq \theta(F_2)$.

Алгебраическим замыканием класса F относительно оператора θ назовём класс $\theta(F)$.

Рассмотрим операторы θ_i, $i = 1, 2$, ставящие в соответствие произвольному классу минимальный по включению класс $\theta_i(F) \in \mathsf{F}_i$, $i = 1, 2$, который содержит F.

Утверждение 4.6. *Операторы θ_i, $i = 1, 2$, являются операторами алгебраического замыкания.*

Далее исследуем аппроксимацию произвольных классов F классами вида $\theta_1(O_\varepsilon(A) \cap F)$, где $A \in \mathsf{A}(U)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, для чего введём операторы $\theta_F \colon \mathsf{A}(U) \times \mathbb{R}^+ \to \mathsf{F}_1$ аппроксимации F, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для любых $A \in \mathsf{A}(U)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ выполнено $O_\varepsilon(A) \cap F \subseteq \theta_F(A, \varepsilon) \subseteq O_\varepsilon(A)$;
2) из неравенств $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ вытекает $\theta_F(A, \varepsilon_1) \subseteq \theta_F(A, \varepsilon_2)$;
3) для любого $A \notin \lim F$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\theta_F(A, \varepsilon) \subseteq F$.

В классе операторов аппроксимации фиксированного класса F введём операции $\cap$ и $\cup$:

$$(\theta_F^1 \cap \theta_F^2)(A, \varepsilon) = \theta_F^1(A, \varepsilon) \cap \theta_F^2(A, \varepsilon),$$
$$(\theta_F^1 \cup \theta_F^2)(A, \varepsilon) = \theta_F^1(A, \varepsilon) \cup \theta_F^2(A, \varepsilon).$$

Структура операторов аппроксимации описана в следующей теореме.

Теорема 4.7. *Множество операторов аппроксимации θ_F фиксированного класса является дистрибутивной решёткой относительно операций $\cap$ и $\cup$, причём оператор $0_F(A, \varepsilon) = \theta_1(O_\varepsilon(A) \cap F)$ является её нулём.*

Рассмотрим условия существования контрольного эксперимента относительно $F \subseteq \mathsf{A}(U)$ и эталона $A \subseteq \mathsf{A}(U)$. Напомним, что множество W вход-выходных слов в алфавите U называется контрольным экспериментом относительно A и F, если $W \subseteq L_A$ и для всех $B \in F$ включение $W \subseteq L_A$ влечёт изоморфизм автоматов A и B.

Теорема 4.8. *Дан произвольный оператор аппроксимации θ_F. В метрическом пространстве $\langle \mathsf{A}(U), \beta \rangle$ контрольный эксперимент относительно автомата-эталона A и класса F существует тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$, для которого выполнено $0_F(A, \varepsilon) \subseteq \{A\}$.*

Теорема показывает, что проверку условия $O_\varepsilon(A) \cap F \subseteq \{A\}$ существования контрольного эксперимента для любого F можно заменить проверкой условия $\theta_F(A, \varepsilon) \subseteq \{A\}$ для финитно определённого класса $\theta_F(A, \varepsilon)$ первого рода. Далее в данном разделе предложены алгоритмы такой проверки для бэровских метрик.

Из теоремы 4.8 нетрудно получить следующее утверждение.

Утверждение 4.9. *Пусть дан оператор аппроксимации θ_F и метрика ρ.*

1. *Контрольный эксперимент относительно автомата-эталона $A \in F$ и класса F существует тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$, для которого $\theta_F(A, \varepsilon) = \{A\}$.*
2. *$A \in \lim F$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $|\theta_F(A, \varepsilon)| > 1$.*

В теории автоматов, кроме условий существования контрольных экспериментов, требуется знать алгоритм их проведения. Для метрики β справедлив следующий результат.

Теорема 4.10. *Пусть дан класс $F \in \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$. Алгоритм построения носителя класса $\theta_F(A, \varepsilon)$ существует для любых $A \in \mathsf{A}(U)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ и бэровской метрики β.*

Полученные утверждения позволяют единообразно исследовать контрольные эксперименты в финитно определённых классах и получать алгоритмы их проведения. На базе этих теорем найдены конструктивные критерии и алгоритмы построения таких экспериментов.

4.2. Эксперименты в финитно определённых классах первого рода

В данном подразделе исследуются классы $F \in \mathsf{F}_1$, $\lim F$ и $]F[$ в бэровском пространстве автоматов $(\mathsf{A}(U), \beta)$. Выбор метрики β объясняется наличием для неё алгоритмов построения операторов аппроксимации и её важностью для практических целей. Кроме того, как было показано, топологические свойства классов автоматов тесно связаны с условиями существования контрольных экспериментов.

Лемма 4.11. *Пусть недетерминированный автомат G определяет класс F. Тогда класс F рекурсивен.*

Очевидно, что не всякий бесконечный класс автоматов содержит все собственные предельные автоматы, но для классов из F_1 имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4.12. *Пусть недетерминированный автомат G определяет F. Класс $]F[$ определяется этим же автоматом G, т. е. замкнут по предельным автоматам.*

Рассмотрим конструктивный критерий конечности классов из F_1 в терминах свойств ядра его носителя.

Теорема 4.13. *Пусть недетерминированный автомат G определяет класс F. Класс F бесконечен тогда и только тогда, когда в G существует хотя бы один цикл вне* $\ker G$.

Данное утверждение расширяет аналогичный результат [40] на случай слабо инициальных недетерминированных автоматов.

По теореме 1.1 наличие контрольного эксперимента относительно автомата-эталона A и класса F тесно связано с условием принадлежности A классу $\lim F$. Конструктивный критерий проверки условия $A \in \lim F$ для $F \in \mathsf{F}_1$ даёт следующая теорема.

Теорема 4.14. *Пусть недетерминированный автомат G определяет класс F. Автомат A с начальным состоянием является предельным автоматом класса F тогда и только тогда, когда существуют такие начальное состояние $g_0 \in G_0$ и вход-выходные слова w, w', что $(g_0 w', w)$ — цикл вне ядра G и $a_0 w' w = a_0 w'$, $w' w \in L_A$.*

Данный результат показывает, что критерий существования контрольных экспериментов для классов из F_1 является конструктивным. На этой основе получены алгоритмы проведения контрольных экспериментов. Существует также алгоритм проверки принадлежности A классу $\lim F$ для любого $F \in \mathsf{F}_1$. Таким образом, класс $\lim F$, а значит и класс $]F[$, является рекурсивным. Более того, для класса F с носителем G класс $\lim F$ определяется некоторым недетерминированным автоматом H, алгоритм построения которого также получен.

Теорема 4.15. *Пусть недетерминированный автомат G определяет F. Тогда $\lim F \in \mathsf{F}_1$.*

Классы из F_1, как будет показано далее, играют центральную роль в изучении контрольных и распознающих экспериментов. Сформулируем критерий того, что $]F[\in \mathsf{F}_1$ для $F \in \mathsf{F}_1$.

Утверждение 4.16. *Пусть недетерминированный автомат G определяет F. Класс $]F[$ принадлежит F_1 тогда и только тогда, когда класс F конечен.*

Приведённые результаты показывают, что ряд мощностных и топологических свойств классов из F_1, в отличие от свойств произвольных подклассов класса $\mathsf{A}(U)$, проверяется конструктивно.

Остановимся теперь на некоторых свойствах распознающих экспериментов в классах $G \in \mathsf{F}_1$, $G = \lim F$ и $G =]F[$ для некоторого $F \in \mathsf{F}_1$. Напомним понятие распознающего эксперимента для класса F (в бэровской метрике). Алгоритмом распознавания автоматов из F назовём алгоритм, который для произвольного автомата $A \in F$ выполняет по шагам следующие действия: на каждом i-м шаге, $i \geqslant 1$, на автомат A подаются слова из конечного множества P_i, регистрируются реакции автомата A на эти слова, т. е. регистрируется сужение L_A/P_i поведения L_A на множество P_i, и на основе этого сужения (и априорной информации о классе F) и таких же сужений, полученных на предыдущих шагах эксперимента, делается одно из двух возможных заключений:

1) алгоритм завершён; выдаётся таблица автомата A (номер автомата A в выбранной эффективной нумерации автоматов);
2) алгоритм не завершён; порождается множество P_{i+1} входных слов.

Для каждого $A \in F$ алгоритм завершается через конечное число шагов. Класс F назовём финитно распознаваемым, если для него существует некоторый алгоритм распознавания. Пустой класс считается финитно распознаваемым.

В [7] показано, что равносильны следующие утверждения.

1. Класс F является финитно распознаваемым.
2. Класс F является подклассом рекурсивно-перечислимого финитно распознаваемого класса.
3. Для любого $A \in F$ существует эффективный контрольный эксперимент относительно A, F и $\tau = \iota$.

Дадим характеризацию множества всех финитно распознаваемых классов из F_1.

Утверждение 4.17. *Пусть* $F \in \mathsf{F}_1$. *Класс* F *финитно распознаваем тогда и только тогда, когда он конечен.*

Исследуем теперь распознаваемость дополнений классов из F_1.

Утверждение 4.18. *Пусть класс* $F \in \mathsf{F}_1$ *и его дополнение непусты. Класс* $\bar{F}$ *не является финитно распознаваемым.*

Рассмотрим различные подклассы классов из множества F_1. Следующая теорема описывает структуру всех финитно распознаваемых подклассов конечного объединения непересекающихся классов из F_1.

Теорема 4.19. *Пусть* $F_1, \ldots, F_n$ — *попарно непересекающиеся классы из* F_1. *Равносильны следующие утверждения*:

1. *класс* H *является финитно распознаваемым подклассом объединения классов* $\bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} F_k$;
2. $H = \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} H_k$, *где* H_k — *финитно распознаваемые подклассы* F_k.

В [43] показано, что в бэровской метрике $]F[$ — открывание произвольного класса $F \in \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$ — финитно распознаваемо. Там же показано, что в общем случае не существует максимального по включению финитно распознаваемого класса. Оказывается, что в множестве всех финитно распознаваемых подклассов F в общем случае также нет максимального.

Утверждение 4.20. *Пусть даны класс* $F \in \mathsf{F}_1$ *и* $H \subseteq F$ — *рекурсивно перечислимый финитно распознаваемый класс, причём класс* $]F[- H \cap]F[$ *непуст. Тогда существует такой рекурсивно перечислимый финитно распознаваемый класс* H_1, *что* $F \supset H_1 \supset H$.

4.3. Эксперименты в финитно определённых классах второго рода

Далее исследуются свойства классов $\mathsf{A}(U, M)$, $M \subseteq U$, автоматов, в каждом из которых вход-выходной сигнал $(x, y) \in M$, называемый маркером, порождается не более чем одним состоянием и M заранее известно экспериментатору, т. е. маркеры можно понимать как верифицированные идентификаторы состояний. При этом под автоматами понимаются всюду определённые инициально-связные автоматы из $\mathsf{A}(U, M)$.

Для классов автоматов $F \in \mathsf{F}_2$ (т. е. таких автоматов, что для некоторого множества маркеров M выполняется $\mathsf{A}(U, M) = F$) найдены конструктивные критерии их конечности/бесконечности в терминах свойств множества маркеров. Рассмотрены кратные контрольные эксперименты, найдены условия существования/несуществования таких экспериментов для автомата относительно класса $\mathsf{A}(U, M)$, дополнения его подкласса $\mathsf{B}(U, M)$ всех автоматов, в каждом цикле которых существует состояние, порождающее некоторый маркер, его подкласса $\mathsf{C}(U, M)$ всех автоматов, не порождающих ни одного маркера и т. п. Найден критерий (в терминах структуры графа автомата-эталона) существования простого контрольного эксперимента относительно класса $\mathsf{A}(U, M)$.

В [20, 20, 43] рассмотрены условия существования/несуществования распознающих экспериментов. Показано, что класс $\mathsf{B}(U, M)$ является максимальным подклассом класса $\mathsf{A}(U, M)$, для которого такой эксперимент существует. Обнаружено, что для класса $\mathsf{C}(U, M)$ и дополнения класса $\mathsf{A}(U, M)$ распознающих экспериментов нет.

Пусть дан класс $\mathsf{A}(U, M) \in \mathsf{F}_2$. Нетрудно привести примеры бесконечного, конечного и состоящего из одного элемента класса $\mathsf{A}(U, M)$. Просмотром таблицы автомата $A \in (U, M)$ легко обнаружить, входит этот автомат в класс $\mathsf{A}(U, M)$ или нет, поэтому класс $\mathsf{A}(U, M)$ рекурсивен. Автомат A из этого множества назовём насыщенным, если для всякого маркера $m \in M$ в автомате существует отмеченное m состояние. Пусть $r = |Y|$.

Лемма 4.21. *Для всех M класс $\mathsf{A}(U, M)$ содержит насыщенный автомат с не более чем r состояниями.*

Обозначим через $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$ подкласс всех насыщенных автоматов из $\mathsf{A}(U, M)$. Пустой класс будем считать конечным.

Теорема 4.22. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *все автоматы в* $\mathsf{A}(U, M)$ *насыщенны*;
2) $\mathsf{A}(U, M) = \mathsf{A}(U)$;
3) $\mathsf{A}(U, r) \subseteq \mathsf{A}(U, M)$;
4) $r = 1$ *или* M *пусто*;
5) *множество* $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$ *конечно.*

Из утверждений 2) и 5) этой теоремы следует, что класс $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$ или пуст (если выполняется утверждение 4) теоремы), или бесконечен (в противном случае).

Напомним, что автомат можно отождествить с графом, вершинами которого являются состояния, а дугами — тройки (a, u, b), где $u \in U$ и $au = b$. Циклом называется последовательность дуг $(a_1, u_1, a_2), (a_2, u_2, a_3), \ldots, (a_k, u_k, a_1)$. При этом говорим, что эти дуги и вершины $a_1, \ldots, a_k$ принадлежат этому циклу. Введём подкласс $\mathsf{B}(U, M)$ всех автоматов из $\mathsf{A}(U, M)$, у которых в каждом цикле графа имеется отмеченное состояние. Можно показать, что $\mathsf{B}(U, M)$ непуст тогда и только тогда, когда множество M непусто. Проверка соотношения $A \in \mathsf{B}(U, M)$ легко осуществляется по графу автомата A, поэтому подкласс рекурсивен.

Рассмотрим условия конечности классов $\mathsf{A}(U, M)$ и $\mathsf{B}(U, M)$. Входное слово p называется диагностическим для автомата A, если из $a \neq b$ следует, что $\lambda(a, p) \neq \lambda(b, p)$ для всех $a, b \in A$.

Теорема 4.23. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *класс* $\mathsf{A}(U, M)$ *конечен*;
2) *подкласс насыщенных автоматов конечен*;
3) $\mathsf{A}(U, M) \subseteq \mathsf{A}(U, r)$;
4) $r = 1$ *или* $|M_x| = r$ *для некоторого* $x \in X$;
5) *существует* x, *являющийся диагностическим словом для всех* $A \in \mathsf{A}(U, M)$;
6) *каждый насыщенный автомат имеет ровно* r *состояний.*

Обозначим разность $\mathsf{A}(U, M) - \mathsf{B}(U, M)$ через $\mathsf{D}(U, M)$.

Теорема 4.24. *Пусть множество* M *непусто. Равносильны следующие утверждения*:

1) *класс* $\mathsf{A}(U, M)$ *конечен*;
2) *класс* $\mathsf{B}(U, M)$ *конечен и непуст*;
3) *класс* $\mathsf{D}(U, M)$ *конечен*;
4) $\mathsf{A}(U, M) = \mathsf{B}(U, M)$.

Приведённые теоремы дают конструктивный критерий конечности классов $\mathsf{A}(U, M)$ и $\mathsf{B}(U, M)$ и характеризует его с различных сторон. Из этих теорем следует, что при непустом M разность $\mathsf{D}(U, M)$ (как и разность $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$) либо пуста, либо бесконечна. При пустом M эта разность или бесконечна, или состоит из одного автомата.

Следствие 4.25. *Равносильны следующие утверждения*:

1) $\mathsf{A}(U, r) = \mathsf{A}(U, M)$;
2) $\mathsf{A}(U, r) = \mathsf{A}(U)$;
3) $r = 1$.

Теорема 4.26. *Пусть* Z *непусто. Равенство* $M = Z \times Y$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathsf{A}(U, M) = \mathsf{A}(U, r, Z)$.

Следствие 4.27. *Равенство* $M = U$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathsf{A}(U, M)$ *совпадает с классом определённо-диагностируемых порядка* 1 *автоматов.*

Рассмотрим подкласс $\mathsf{C}(U, M)$ класса $\mathsf{D}(U, M)$ автоматов, не имеющих отмеченных состояний, и его дополнение $\mathsf{H}(U, M) = \mathsf{D}(U, M) - \mathsf{C}(U, M)$. Следующие теоремы дают критерии пустоты этих классов.

Теорема 4.28. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *класс* $\mathsf{C}(U, M)$ *пуст*;
2) *класс* $\mathsf{B}(U, M)$ *пуст*;
3) $|M_x| = r$ *для некоторого* $x \in X$.

Теорема 4.29. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *класс* $\mathsf{H}(U, M)$ *пуст*;

2) *класс* $\mathsf{H}(U, M)$ *конечен*;
3) *пусты* M *или* $\mathsf{C}(U, M)$.

Эта теорема показывает, что класс $\mathsf{H}(U, M)$ либо пуст, либо бесконечен. В отличие от него, класс $\mathsf{C}(U, M)$ может быть бесконечным, может быть пустым и может содержать при $r = 1$ и пустом M ровно один автомат. Рассмотрим критерий бесконечности этого класса.

Теорема 4.30. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *класс* $\mathsf{C}(U, M)$ *бесконечен*;
2) *класс* $\mathsf{C}(U, M)$ *содержит более одного автомата*;
3) $r > 1$, $|M_x| < r$ *для всех* x *и* $|M_x| < r - 1$ *для некоторого* x.

Следствие 4.31. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *класс* $\mathsf{C}(U, M)$ *состоит из одного автомата*;
2) $|M_x| = r - 1$ *для всех* $x \in X$;
3) *класс* $\mathsf{C}(U, M)$ *непуст и каждый автомат из этого класса имеет ровно одно состояние.*

Отметим, что проверка конечности (бесконечности) и одноэлементности рассмотренных классов проводится по M и U конструктивно за полиномиальное время.

С целью получения условий существования контрольных экспериментов рассмотрим свойства различимости автоматов. Будем говорить, что автоматы A и B k-неотличимы (обозначение: $(A, B) \in \varepsilon_k$), если $L_A^k = L_B^k$. Как и ранее, через $O_{1/k}(A)$ обозначим класс всех автоматов из $\mathsf{A}(U)$, k-неотличимых от A.

Исследование контрольных экспериментов проводится снова относительно бэровской метрики.

Лемма 4.32. *Пусть* M *непусто. Для любого автомата* $A \in \mathsf{A}(U)$ *и натурального* k *множество* $O_{1/k}(A) \cap \bar{\mathsf{A}}(U, M)$ *бесконечно.*

Следствие 4.33. *При непустом* M *не существует контрольного эксперимента для* $A \in \mathsf{A}(U)$ *и* $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$.

Лемма 4.34. $O_{1/k}(A) \subseteq \bar{\mathsf{A}}(U, M)$ *для любого эталона* $A \in \bar{\mathsf{A}}(U, M)$ *и* $k \geqslant 2n - 2$.

Непосредственно из этой леммы вытекает следствие.

Следствие 4.35. *Для каждого* $A \in \bar{\mathsf{A}}(U, M)$ *и* $\mathsf{A}(U, M)$ *существует контрольный эксперимент кратности не больше* 4 *и длины не больше* $2n - 2$.

Пусть даны класс $\mathsf{A}(U, M)$ и натуральное k. Справедлив следующий критерий существования контрольного эксперимента для $\mathsf{A} = \mathsf{A}(U, M)$.

Теорема 4.36. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *существует контрольный эксперимент* $\mathsf{A} \in \mathsf{A}(U, M)$ *и* $\mathsf{A}(U, M)$;
2) *существует контрольный эксперимент для* A *и* $\mathsf{A}\big(U, M(A)\big)$;

3) $\mathsf{A} \notin \mathsf{D}(U, M)$;
4) L_A^k *является контрольным экспериментом для* A *и* $\mathsf{A}\big(U, M(A)\big)$ *при всех* $k \geqslant 2n$.

Заметим, что класс $\mathsf{A}\big(U, M(A)\big)$ может быть бесконечным при конечном классе $\mathsf{A}(U, M)$.

Из теоремы 4.36 вытекает, что для $\mathsf{A} \in \mathsf{D}(U, M)$ и $\mathsf{A} = \mathsf{A}(U, M)$ контрольных элементов не существует. Рассмотрим условия существования контрольных экспериментов для таких эталонов и подклассов этого класса автоматов.

Пусть W — некоторое конечное подмножество множества L_A. Через $D(W)$ обозначим сужение информационного дерева автомата на подмножество.

Теорема 4.37. *Множество* W *является контрольным экспериментом для* $A \in \mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U, M)$ *и* $\mathsf{C}(U, M)$ *тогда и только тогда, когда дерево* $D(W)$ *содержит хотя бы одно отмеченное состояние.*

Из этой теоремы вытекает, что и для $\mathsf{A} \in \mathsf{H}(U, M)$, $\mathsf{A} \subseteq \mathsf{C}(U, M)$ контрольный эксперимент существует. Более того, как будет отмечено далее, в этом случае существует и простой (однократный) эксперимент.

Теорема 4.38. *Для* $\mathsf{A} \in \mathsf{C}(U, M)$ *и непустого класса* $\mathsf{H}(U, M)$ *не существует контрольного эксперимента.*

Теорема 4.39. *Пусть класс* $\mathsf{C}(U, M)$ *содержит больше одного автомата. Для* $\mathsf{A} \in \mathsf{C}(U, M)$ *и* $\mathsf{C}(U, M)$ *не существует контрольного эксперимента.*

Из теорем 4.23 и 4.24 вытекает, что при $r > 1$ класс $\mathsf{D}(U, M)$ или пуст, или бесконечен. Теорема 4.28 утверждает, что если класс $\mathsf{D}(U, M)$ непуст, то непуст и класс $\mathsf{C}(U, M)$. Теоремы 4.39, 4.40 показывают, что для $\mathsf{A} \in \mathsf{C}(U, M)$ и $\mathsf{D}(U, M)$ контрольных экспериментов не существует. По теореме 4.37 длина кратчайших контрольных экспериментов для $\mathsf{A} \in \mathsf{B}(U, M)$ и $\mathsf{A}(U, M)$ не превосходит $2n$. Можно показать, что для всех n эта оценка достижима.

Рассмотрим случай, когда $M = U$. При этом $\mathsf{A}(U, M) = \mathsf{B}(U, M) \subseteq \mathsf{A}(U, r)$ и все автоматы из $\mathsf{A}(U, M)$ являются определённо диагностируемыми порядка 1. Рассмотрим условия, при которых конечное множество $W \subseteq L_A$ является контрольным экспериментом для A и $\mathsf{A}(U, M)$. По замыканию $B = [D(W)]_u$ и гомоморфизму ψ замыкания B в эталон построим вспомогательный неориентированный граф $G(W)$, у которого множество вершин B и вершины b_1, b_2 графа соединены ребром, если $\psi(b_1) \neq \psi(b_2)$, $\lambda_B(b_1, x), \lambda_B(b_2, x)$ одновременно определены для некоторого x и, стало быть, $\lambda_B(b_1, x) \neq \lambda_B(b_2, x)$. Заметим, что граф $G(W)$ есть в точности ассоциированный граф из теоремы 2.30.

Пусть $M = U$ и $n = r$.

Теорема 4.40. *Множество* W *является контрольным экспериментом для* A *и* $\mathsf{A}(U, M)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:
1) $W \subseteq L_A$;
2) $\Phi_B^1 = \Phi_A^1$, *где* $B = [D(W)]_u$;
3) *граф* $G(W)$ *однозначно раскрашиваемый.*

Пусть теперь $M = U$ и $n < r$. Тогда для каждого x найдётся y, для которых $(x, y) \notin \Phi_A^1$. Легко привести пример, когда в этом случае условий 1)—3) недостаточно для того, чтобы W был контрольным для A и $\mathsf{A}(U, M)$.

Теорема 4.41. *Множество W является контрольным экспериментом для A и $\mathsf{A}(U, M)$ тогда и только тогда, когда $[D(W)]_u = A$.*

Рассмотрим условия существования и сложность простого, т. е. состоящего из одного слова, контрольного эксперимента.

Теорема 4.42. *Для $A \in \mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U, M)$ и непустого $\mathsf{C}(U, M)$ существует простой контрольный эксперимент длины, не превосходящей n.*

Рассмотрим условия существования простого контрольного эксперимента для $A \in \mathsf{A}(U, M)$ и $\mathsf{A}(U, M)$. Слоем автомата A называется максимальное по включению подмножество B состояний, в котором для любых $a, b \in B$ для некоторого $w \in L_a$ выполняется $aw = b$. Слой B называется нетривиальным, если это слово непусто для некоторых $a, b \in B$. Известно, что слои образуют разбиение множества состояний автомата. Автомат назовём правильным, если существует последовательность $B_0, \ldots, B_k$ всех слоёв, такая что одновременно выполняются следующие условия:

1) из i-го слоя, $0 \leqslant i < k$, исходит ровно одна дуга (b_i, u_i, a_{i+1}), оканчивающаяся вне его, в следующем слое; все дуги, начинающиеся в k-м слое, оканчиваются в нём;
2) если в состоянии $a \in B_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$, оканчивается больше одной дуги эталона, то существует дуга (a, u, b), для которой $u \in M$ и $b \in B_i$;
3) во всяком цикле каждого слоя существует отмеченное состояние A, порождающее некоторый маркер u, причём состояние принадлежит этому слою.

В правильном эталоне состояние a_i называется начальным, а состояние b_i — конечным состоянием i-го слоя, $0 \leqslant i \leqslant k$. Заметим, что начальным состоянием слоя B_0 является начальное состояние a_0 эталона. Последний слой B_k не имеет по условию 1) конечного состояния. По условию 3) правильный эталон принадлежит классу $\mathsf{B}(U, M)$. Известно (см., например, [3, с. 51, теорема 2.1]), что условие 1) равносильно существованию обхода, т. е. пути из начального состояния автомата, который проходит через все его дуги. При $m \geqslant 2$ все слои правильного автомата являются нетривиальными и в силу условия 3) содержит маркеры. Поэтому число слоёв правильного автомата не превосходит числа маркеров и тем самым не превосходит mr.

Теорема 4.43. *Простой контрольный эксперимент относительно $A \in \mathsf{A}(U, M)$ и $\mathsf{A}(U, M)$ существует тогда и только тогда, когда эталон A правильный.*

Рассмотрим теперь распознающие эксперименты в финитно определённых классах второго рода.

Теорема 4.44.
1. *Все классы F, такие что $F \subseteq \mathsf{B}(U, M)$, являются финитно распознаваемыми.*
2. *Пусть множество M непусто. Классы F, такие что $B \subset F \subseteq \mathsf{A}(U, M)$, не являются финитно распознаваемыми.*

Утверждение 4.45. *Пусть множество M непусто. Класс $F = \mathsf{A}(U, M)$ финитно распознаваем тогда и только тогда, когда он конечен.*

Теорема 4.44 и утверждение 4.45 показывают, что $\mathsf{B}(U, M)$ является максимальным финитно распознаваемым подклассом класса $\mathsf{A}(U, M)$.

Рассмотрим условия существования алгоритмов распознавания для других подклассов, порождённых маркерами. Из теоремы 1.1 и теорем о существовании контрольных экспериментов в финитно определённых классах непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 4.46. *Пусть множество M непусто. Класс $\bar{\mathsf{A}}(U, M)$ не является финитно распознаваемым.*

Следствие 4.47. *Если класс $\mathsf{C}(U, M)$ состоит из автоматов, не имеющих отмеченных состояний, и содержит больше одного автомата, то этот класс не является финитно распознаваемым.*

Пусть множество M непусто. Зафиксируем $x \in X$ и натуральное $k > 1$. Рассмотрим подкласс $\mathsf{B}(U, x, k) \subseteq \mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U, M)$ всех таких автоматов A, для которых одновременно выполняются следующие условия:
1) все состояния $a \in A$ достижимы по x, т. е. $a = \delta(a_0, x^i)$ для некоторого i;
2) в единственном цикле по x существует отмеченное состояние, т. е. если $\delta(a, x^i) = a$, то состояние $\delta(a, x^j)$ отмечено для некоторого j, $0 \leqslant j \leqslant i$;
3) любые разные и отмеченные одним и тем же маркером состояния k-отличимы.

Можно показать, что для всех $r \geqslant 2$, $x \in X$ и $k \geqslant 2$ класс $\mathsf{B}(U, x, k)$ может быть бесконечным.

Пусть $\bar{\mathsf{A}}(U, x, k) = \bar{\mathsf{A}}(U, M) \cap \mathsf{B}(U, x, k)$, $\mathsf{A}(U, x, k) = \mathsf{A}(U, M) \cap \mathsf{B}(U, x, k)$, $k \geqslant 2$.

Теорема 4.48. *Класс $\mathsf{B}(U, x, k)$ бесконечен тогда и только тогда, когда бесконечен класс $\mathsf{A}(U) - \mathsf{C}(U, M)$ и множество M_x не пусто.*

Теорема 4.49. *Любой класс $F \subseteq \mathsf{B}(U, x, k)$ является финитно распознаваемым.*

Следствие 4.50. *Всякий класс $F \subseteq \bar{\mathsf{A}}(U, x, k) \cup \mathsf{B}(U, M)$ является финитно распознаваемым.*

Литература

[1] Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979.

[2] Богомолов А. М., Барашко А. С., Грунский И. С. Эксперименты с автоматами. — Киев: Наукова думка, 1973.

[3] Богомолов А. М., Грунский И. С., Сперанский Д. В. Контроль и преобразования дискретных автоматов. — Киев: Наукова думка, 1975.

[4] Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука, 1997.

[5] Богомолов С. А. О восстановлении автоматов по их следам: Автореферат дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 1986.

[6] Бородай С. Ю. Условные и безусловные эксперименты с классами реализаций НД-автоматов // Тезисы докл. XI Междунар. конф. по проблемам теор. кибернетики. — Ульяновск: Изд-во СВНЦ, 1996. — С. 27—28.

[7] Бородай С. Ю. Эксперименты в эффективно заданных классах автоматов: Автореферат дис.... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 1997.

[8] Брауэр Р. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Радио и связь, 1987.

[9] Буевич В. А., Каландарашвили Н. Г., Таль А. А. Об описании конечного автомата с помощью конечного множества вход-выходных слов // Автоматика и телемеханика. — 1970. — № 1. — С. 112—122.

[10] Буевич В. А., Каландарашвили Н. Г., Таль А. А. Конечные автоматы — эквивалентность и поведение. — М.: Наука, 1984.

[11] Василевский М. П. О распознавании неисправностей автомата // Кибернетика. — 1973. — № 4. — С. 93—108.

[12] Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Наука, 1966.

[13] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, вып. 5 (101). — С. 3—62.

[14] Грунский И. С. Идентификация управляющих систем автоматного типа // Тр. междунар. конф. «Математика в индустрии»(ICIM'98). — Таганрог, 1998. — С. 107—109.

[15] Грунский И. С. Анализ поведения конечных автоматов. — Луганск: Изд-во Луганск. гос. пед. ун-та, 2003.

[16] Грунский И. С., Козловский В. А. Синтез и идентификация автоматов. — Киев: Наукова думка, 2004.

[17] Грунский И. С., Козловский В. А., Копытова О. М. Представления автоматов и анализ атак на криптосистемы // Искусственный интеллект. — 2004. — № 4. — С. 764—775.

[18] Грунский И. С., Козловский В. А., Пономаренко Г. Г. Представления конечных автоматов фрагментами поведения. — Киев: Наукова думка, 1990.

[19] Грунский И. С., Максименко И. И. О распознавании детерминированных автоматов, задаваемых НД-автоматами // Тр. III междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — Красновидово, 1998. — С. 23—29.

[20] Грунский И. С., Максименко И. И. Эксперименты с маркированными автоматами: Препринт № 96.02. — ИПММ НАН Украины, 1998.

[21] Грунский И. С., Максименко И. И. Об экспериментах с автоматами при отсутствии верхней оценки числа состояний // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 4. — С. 59—71.

[22] Евтушенко Н. В., Лебедев А. В., Петренко А. Ф. О проверяющих экспериментах с недетерминированными автоматами // Автоматика и вычислительная техника. — 1991. — № 6. — С. 81—85.

[23] Евтушенко Н. В., Матросова А. Ю. К синтезу контролепригодных автоматных сетей // Техническая диагностика. — 1991. — № 3. — С. 143—152.

[24] Евтушенко Н. В., Петренко А. Ф. О проверяющих возможностях кратных экспериментов // Автоматика и вычислительная техника. — 1989. — № 3. — С. 9—14.

[25] Евтушенко Н. В., Петренко А. Ф. Метод построения проверяющих экспериментов для произвольного недетерминированного автомата // Автоматика и вычислительная техника. — 1990. — № 5. — С. 73—76.

[26] Захаров В. Н., Поспелов Д. А., Хазацкий В. Е. Системы управления. Задание. Проектирование. Реализация. — М.: Энергия, 1972.

[27] Козловский В. А. О структуре контрольных экспериментов с автоматом // Кибернетика. — 1978. — № 3. — С. 19—33.

[28] Козловский В. А. О распознавании автомата относительно локально порождённого класса // ДАН СССР. — 1981. — Т. 285, № 5. — С. 1047—1049.

[29] Козловский В. А. О распознавании локальных неисправностей автомата: Автореферат дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., ВЦ АН СССР, 1981.

[30] Козловский В. А. Локальные неисправности автомата и их обнаружение // Математические вопросы кибернетики. Вып. 3 / Под ред. С. В. Яблонского. — М.: Наука, 1991. — С. 167—186.

[31] Козловский В. А. О представлениях групповых автоматов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 2. — С. 21—28.

[32] Козловский В. А., Копытова О. М. Представления автоматов относительно m-плотных классов // Материалы VIII Междунар. сем. «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 2—6 февраля 2004 г.). — М.: Изд-во Моск. ун-та. — С. 277—280.

[33] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[34] Корноушенко Е. К. Диагностирование дискретных динамических систем по накопленной информации: Автореферат дис.. . . докт. техн. наук. — М., ИПУ, 1992.

[35] Корноушенко Е. К. Контроль логико-динамических систем по прореженной информации // Изв. РАН. Техническая кибернетика. — 1992. — № 1. — С. 171—182.

[36] Крывый С. А., Матвеева Л. Е. Формальные методы анализа свойств систем // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 15—36.

[37] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[38] Кузнецов А. Б., Трахтенброт Б. А. Исследование частично рекурсивных операторов средствами теории бэровского пространства // ДАН СССР. — 1955. — Т. 105, № 5. — С. 897—900.

[39] Лукьянов Б. Д. О различающих и контрольных экспериментах с недетерминированными автоматами // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 5. — С. 69—76.

[40] Лукьянов Б. Д. Детерминированные реализации недетерминированных автоматов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 34—50.

[41] Максименко И. И. Распознавание в эффективно-заданных классах автоматов // Труды ИПММ НАН Украины. — 1998. — Т. 2. — С. 115—123.

[42] Максименко И. И. Эксперименты в классе реализаций недетерминированных автоматов // Докл. НАН Украины. — 1999. — № 7. — С. 95—99.

[43] Максименко И. И. Эксперименты в финитно-определённых метрических пространствах автоматов: Автореферат дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 2000.

[44] Мур Э. Ф. Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами // Автоматы. — М.: Изд. иностр. лит., 1956. — С. 179—210.

[45] Общая алгебра. Т. 1 / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1990.

[46] Основы технической диагностики / Под ред. П. П. Пархоменко. — М.: Энергия, 1976.

[47] Петренко А. Ф. Эксперименты над протокольными объектами // Автоматика и вычислительная техника. — 1987. — № 1. — С. 16—21.

[48] Петренко А. Ф. Автоматные методы анализа совместимости средств взаимодействия в открытых сетях: Автореферат дис.. . . докт. техн. наук. — Рига, 1988.

[49] Спивак М. А. К синтезу конечного автомата по его множеству экспериментов // Кибернетика. — 1969. — № 5. — С. 15—20.

[50] Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М. Конечные автоматы (поведение и синтез). — М.: Наука, 1970.

[51] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

[52] Bhattacharyya A. Checking Experiments on Sequential Machines. — New York: Wiley, 1989.

[53] Fault-Tolerant Computing: Theory and Techniques. V. 1. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1986.

[54] Hennie F. C. Fault detecting experiments for sequential circuits // Proc. 5 Annual Symp. «Switch. Circuits Th. and Logic. Design». — 1964. — P. 95—110.

[55] Kohavi Z. Switching and Finite Automata Theory. — New York: McGraw Hill, 1970.

[56] Kozlovskii V. A. On the complexity of analyzing experiments for checking local faults of an automaton // Proc. of the Int. Conf. on FCT'87. — Berlin: Springer, 1987. — (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 278). — P. 259—262.

[57] Petrenko A. F., Yevtushenko N., Dsouli R. Grey box finite state machine base testing strategies: Depart d'informatique et recherch. operat. Univ. de Montreal. Publ. No. 991. — 1994.