

О конструктивной характеристики пороговых функций

А. П. СОКОЛОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: sokolov@intsys.msu.ru*

УДК 519.716

Ключевые слова: пороговые функции, сложность обучения нейросетей.

Аннотация

В работе рассматриваются пороговые функции алгебры логики. Вводится определение сигнатуры пороговой функции. Доказано, что если пороговая функция существенно зависит от всех своих переменных, то её сигнатура определяется однозначным образом. Доказана теорема, характеризующая разбиение множества пороговых функций по классам сигнатур. Отмечается особая важность класса монотонных пороговых функций. Исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной некоторой целочисленной линейной формой, в другую. Показано, что в худшем случае данная задача имеет экспоненциальную сложность. Рассматривается строение множеств линейных форм, задающих одну пороговую функцию. Доказана теорема о бесконечной порождённости данных множеств относительно операции сложения линейных форм.

Abstract

A. P. Sokolov, On the constructive characterization of threshold functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 4, pp. 189—208.

In this paper, structure of the set of threshold functions and complexity problems are considered. The notion of a signature of threshold function is defined. It is shown that if threshold function essentially depends on all of its variables then signature of this function is unique. Set of threshold functions is partitioned onto classes with equal signatures. Theorem characterizing this partition is proved. Importance of the class of monotone threshold functions is emphasized. Complexity of transferring one threshold function specified by the linear form into another is examined. It is shown that in the worst case this transferring would take exponential time. Structure of the set of linear forms specifying the same threshold function is also examined. It is proved that for any threshold function this set of linear forms has unique basis in terms of the operation of addition of the linear forms. It is also shown that this basis is countable.

Введение

Пороговые функции алгебры логики представляют интерес в связи с простотой технической реализации, а также благодаря своим вычислительным возможностям.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 4, с. 189—208.

© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»*

Средством задания пороговых функций являются линейные формы вида $x_1 w_1 + \dots + x_n w_n - \sigma$. При этом могут рассматриваться линейные формы как с действительными, так и с целочисленными коэффициентами. Отметим, что выразительные возможности данных способов эквивалентны, т. е. любая пороговая функция f может быть задана некоторой линейной формой с целочисленными коэффициентами.

Определим сигнатуру пороговой функции f как набор знаков коэффициентов некоторой линейной формы, задающей f . Оказывается, что если f существенно зависит от всех своих переменных, то сигнатура f определяется однозначным образом. Более того, отношение равенства сигнатур разбивает множество существенных пороговых функций на 2^n взаимно непересекающихся равномоощных классов, одним из которых является класс монотонных пороговых функций. Таким образом, структура класса монотонных пороговых функций полностью определяет структуру класса всех пороговых функций.

В работе исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной линейной формой, к другой путём последовательного изменения коэффициентов линейной формы. В качестве меры сложности принимается изменение коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Данный процесс может интерпретироваться как процесс обучения нейрона с пороговой функцией активации. Для характеристики сложности обучения в худшем случае вводится шенноновская функция $\rho(n)$. Она говорит о том, какое минимальное количество единичных модификаций исходной линейной формы от n переменных достаточно выполнить для задания желаемой пороговой функции. В работе показывается, что при стремлении n к бесконечности величина $\log \rho(n)$ растёт по порядку как $n \log n$.

Для любой пороговой функции существует бесконечное множество задающих её линейных форм. Линейные формы назовём эквивалентными, если они задают одну и ту же пороговую функцию. Множество всех существенных линейных форм с целочисленными коэффициентами и свободным членом, задающих пороговую функцию f , обозначим $U(f)$. Легко заметить, что множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения линейных форм. В работе доказано, что всякое множество $U(f)$ содержит единственный базис относительно операции сложения линейных форм, который является счётным и разрешимым, а также описан алгоритм, который последовательно строит базис множества $U(f)$ для заданной пороговой функции f .

1. Основные понятия, постановки задач и результаты

Введём определения линейной формы и пороговой функции. Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. *Линейной формой* назовём функцию

$$l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i w_i - \sigma,$$

определённую на множестве $\mathbb{R}^n$. Здесь $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ — вектор весовых коэффициентов, а σ — порог. Если все весовые коэффициенты положительные, то будем называть такую линейную форму *положительно-определённой*.

Функция $f(x_1, \dots, x_n): E_2^n \rightarrow E_2$, где $E_2 = \{0, 1\}$, называется *пороговой*, если существует линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}(x_1, \dots, x_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n - \sigma$, такая что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^n x_i w_i - \sigma \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этом случае мы говорим, что *линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ задаёт пороговую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$* , и записываем это следующим образом:

$$l_{\vec{w},\sigma} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \text{ или } f_{\vec{w},\sigma}(x_1, \dots, x_n).$$

Множество всех пороговых функций обозначим $\mathbb{RT}$.

Пороговая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *$\mathbb{Z}$ -пороговой*, если существует линейная форма $x_1 w_1 + \dots + x_n w_n - \sigma$ с целочисленными коэффициентами и порогом, задающая функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Множество $\mathbb{Z}$ -пороговых функций обозначим $\mathbb{ZT}$.

Возникает вопрос, как соотносятся классы функций $\mathbb{ZT}$ и $\mathbb{RT}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Классы $\mathbb{ZT}$ и $\mathbb{RT}$ совпадают.*

Учитывая теорему 1, далее, если это не будет оговариваться отдельно, будем рассматривать линейные формы только с целочисленными коэффициентами и порогом.

Сигнатурой линейной формы $l_{\vec{w},\sigma} = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n - \sigma$ назовём вектор $s(l_{\vec{w},\sigma}) = (s_1, \dots, s_n)$, такой что

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } w_i > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *существенно зависит от переменной x_i* , $i \in \{1, \dots, n\}$, если найдутся два набора

$$\alpha = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad \alpha' = (a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

такие что $f(\alpha) \neq f(\alpha')$. Пороговую функцию считаем *существенной*, если она существенно зависит от всех своих переменных. Линейную форму $l_{\vec{w},\sigma}$ будем называть *существенной*, если задаваемая ею пороговая функция существенна.

Теорема 2. *Если $l_{\vec{w},\sigma}$ и $l_{\vec{w}',\sigma'}$ задают существенную пороговую функцию f , то $s(l_{\vec{w},\sigma}) = s(l_{\vec{w}',\sigma'})$.*

Из теоремы 2 следует, что сигнатура линейной формы существенной пороговой функции f однозначно определяется этой функцией; обозначим сигнатуру функции f через $s(f)$. Отношение равенства сигнатур является отношением эквивалентности и задаёт разбиение множества существенных пороговых функций на классы эквивалентности. Возникает вопрос: сколько этих классов и как они устроены. Следующая теорема даёт ответ на данный вопрос.

Сначала введём ещё несколько определений. Пусть $x, d \in E_2$. Тогда

$$x^d = \begin{cases} x, & \text{если } d = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } d = 0. \end{cases}$$

Функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ и $f'(x_1, \dots, x_n)$ назовём симметричными относительно переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = f'(x_1^{d_1}, \dots, x_n^{d_n}),$$

где для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$\begin{cases} d_j = 0, & \text{если } j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ d_j = 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть M и M' — два множества функций, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$. Назовём множества M и M' симметричными относительно переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, если для любой функции $f \in M$ найдётся функция $f' \in M'$, симметричная ей относительно переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, и, наоборот, для любой функции $f' \in M'$ найдётся симметричная ей функция $f \in M$. Назовём множества M и M' симметричными, если они симметричны относительно некоторого непустого множества переменных.

Обозначим через $\mathbb{ZT}^n$ множество пороговых функций от n переменных. Множество существенных пороговых функций от n переменных обозначим через $\widehat{\mathbb{ZT}}^n$.

Теорема 3 (теорема о сигнатурах). *Отношение равенства сигнатур разбивает множество $\widehat{\mathbb{ZT}}^n$ на 2^n взаимно симметричных равномоощных множества, одним из которых является множество монотонных существенных пороговых функций от n переменных.*

Введём понятие расстояния между линейными формами и пороговыми функциями. Пусть $l_{\vec{w}', \sigma'}$ и $l_{\vec{w}'', \sigma''}$ — линейные формы от n переменных. Расстоянием между линейными формами $l_{\vec{w}', \sigma'}$ и $l_{\vec{w}'', \sigma''}$ назовём величину

$$\rho(l_{\vec{w}', \sigma'}; l_{\vec{w}'', \sigma''}) = |\sigma' - \sigma''| + \sum_{i=1}^n |w'_i - w''_i|.$$

Эта величина показывает, что необходимо сделать ρ последовательных единичных изменений компонент одной линейной формы, чтобы получить другую.

Пусть заданы пороговые функции $f'(x_1, \dots, x_n)$ и $f''(x_1, \dots, x_n)$. Расстоянием между ними назовём величину

$$\rho(f'; f'') = \min_{\substack{l_{\vec{w}', \sigma'} \rightarrow f', \\ l_{\vec{w}'', \sigma''} \rightarrow f''}} \rho(l'; l'').$$

Здесь минимум берётся по всем линейным формам $l_{\vec{w}', \sigma'}$ и $l_{\vec{w}'', \sigma''}$, задающим функции f' и f'' соответственно.

Определим величину $\rho(n)$ следующим образом:

$$\rho(n) = \max_{f', f'' \in \mathbb{ZT}^n} \rho(f'; f'').$$

Данная величина характеризует расстояние между наиболее удалёнными пороговыми функциями от n переменных. Следующее утверждение содержит оценку величины $\rho(n)$.

Теорема 4. *Имеет место соотношение*

$$\log_2 \rho(n) \asymp n \log_2 n \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — пороговая функция, l_1 и l_2 — линейные формы от n переменных, задающие f . Легко убедиться, что линейная форма $l_1 + l_2$ также задаёт функцию f .

Обозначим через $U(f)$ множество линейных форм от n переменных, задающих f . Как уже отмечалось, множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения. Возникает вопрос, содержится ли в $U(f)$ базис относительно операции сложения. Если да, то является ли он конечным, и сколько различных базисов содержится в $U(f)$. Следующая теорема даёт ответы на эти вопросы.

Теорема 5. *Для любой пороговой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ множество $U(f)$ содержит единственный базис относительно операции сложения, который является счётным и разрешимым.*

Отметим, что в доказательстве теоремы 5 явно описан алгоритм, который последовательно строит базис множества $U(f)$.

2. Доказательство теоремы 1

Из определения классов $\mathbb{ZT}$ и $\mathbb{RT}$ следует, что $\mathbb{ZT} \subseteq \mathbb{RT}$. Докажем обратное вложение. Нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $l_{\vec{w}, \sigma} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$, то для любого положительного числа k верно $l_{k \cdot \vec{w}, k \cdot \sigma} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$.*

Пусть дана линейная форма $l_{\vec{w}, \sigma}$ и произвольная точка $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$. Обозначим через $\rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(\alpha)$ минимальное расстояние от точки α до плоскости l , заданной уравнением $\sum_{i=1}^n x_i w_i - \sigma = 0$.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\rho_{l_{\vec{w}}, \sigma}(\alpha) = \frac{\left| \sum_{i=1}^n a_i w_i - \sigma \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2}}.$$

Доказательство. Пусть $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка на плоскости l , расстояние от которой до точки α минимально. Задача нахождения точки β может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \inf_{\beta} \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \right), \\ \sum_{i=1}^n b_i w_i - \sigma = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для решения данной задачи составим функцию Лагранжа:

$$\mathfrak{L}(b_1, \dots, b_n) = \lambda_0 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n b_i w_i - \sigma \right).$$

Необходимым условием экстремума в задаче (1) является равенство нулю частных производных функции Лагранжа по переменным $b_1, \dots, b_n$:

$$\mathfrak{L}_{b_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{b_1} &= \lambda_0(2b_1 - 2a_1) + \lambda_1 w_1 = 0, \\ &\vdots \\ \mathfrak{L}_{b_n} &= \lambda_0(2b_n - 2a_n) + \lambda_1 w_n = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$, следовательно, все множители Лагранжа равны нулю, поэтому данный случай невозможен.

2. $\lambda_0 = 1$. Тогда для всех i имеем $b_i = a_i - \frac{1}{2}\lambda_1 w_i$.

Для нахождения λ_1 подставим полученные выражения для b_i в ограничение задачи (1) вида

$$\sum_{i=1}^n a_i w_i - \frac{1}{2}\lambda_1 \sum_{i=1}^n w_i^2 - \sigma = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{2 \left(\sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right)}{\sum_{j=1}^n w_j^2}.$$

Таким образом, ближайшая к α точка плоскости l имеет координаты

$$b_i = a_i - \frac{w_i \left(\sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right)}{\sum_{j=1}^n w_j^2}$$

для всех i . Следовательно, квадрат минимального расстояния равен

$$\rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}^2(\alpha) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i \left(\sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right)}{\sum_{j=1}^n w_j^2} \right)^2 = \frac{\left(\sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right)^2}{\sum_{j=1}^n w_j^2}.$$

Следовательно,

$$\rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(\alpha) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2}}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Если $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, то найдутся такие $\vec{w}' \in \mathbb{Z}^n$ и $\sigma' \in \mathbb{Z}$, что для угла γ между векторами $\vec{w}$ и $\vec{w}'$ и для расстояний $\rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(\alpha)$ для всех $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$ будет выполнено $|\rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(\alpha) - \rho_{l_{\vec{w}', \sigma'}}(\alpha)| < \varepsilon$ и $\gamma < \varepsilon$.

Доказательство. Для доказательства достаточно построить такую последовательность линейных форм $l_{\vec{w}_1, \sigma_1}, l_{\vec{w}_2, \sigma_2}, \dots, l_{\vec{w}_k, \sigma_k}, \dots$ с целыми коэффициентами и порогом, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(\alpha) - \rho_{l_{\vec{w}_k, \sigma_k}}(\alpha)) = 0$$

для всех α и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos \gamma_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\vec{w} \cdot \vec{w}_k}{|\vec{w}| \cdot |\vec{w}_k|} = 1,$$

где γ_k — угол между векторами $\vec{w}$ и $\vec{w}_k$.

Рассмотрим десятичное представление компонент w_i вектора $\vec{w}$ и порога σ :

$$w_i = \langle w_{i0}, w_{i1} \dots w_{ik} \dots \rangle, \quad \sigma = \langle s_0, s_1 s_2 \dots s_k \dots \rangle.$$

Здесь $w_{10}, \dots, w_{n0}, s_0$ — целые части компонент вектора $\vec{w}$ и порога σ .

Положим

$$\vec{w}_k = (\langle w_{10} \dots w_{1k} \rangle, \langle w_{20} \dots w_{2k} \rangle, \dots, \langle w_{n0} \dots w_{nk} \rangle), \quad \sigma_k = \langle s_0 \dots s_k \rangle.$$

Из данного представления следует, что $\vec{w}_k \rightarrow 10^k \cdot \vec{w}$, $\sigma_k \rightarrow 10^k \cdot \sigma$ при $k \rightarrow \infty$, а следовательно,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(\alpha) - \rho_{l_{\vec{w}_k, \sigma_k}}(\alpha)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2}} - \frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j w_{kj} - \sigma_k \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n w_{kj}^2}} \right) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2}} - \frac{10^k \cdot \left| \sum_{j=1}^n a_j w_j - \sigma \right|}{10^k \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2}} \right) = 0
\end{aligned}$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\vec{w} \cdot \vec{w}_k}{|\vec{w}| \cdot |\vec{w}_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10^k \cdot \vec{w} \cdot \vec{w}}{10^k \cdot |\vec{w}| \cdot |\vec{w}|} = 1.$$

Лемма доказана. $\square$ **Лемма 4.** Справедливо соотношение $\mathbb{RT} \subseteq \mathbb{ZT}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\mathbb{R}$ -пороговую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, задаваемую линейной формой $l_{\vec{w}, \sigma}$, где $w_i, \sigma \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Линейная форма $l_{\vec{w}, \sigma}$ определяет в пространстве $\mathbb{R}^n$ такую гиперплоскость, что по разные стороны от неё функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает различные значения.

Рассмотрим три случая.

1. Все точки булева куба E_2^n лежат по одну сторону от гиперплоскости, задаваемой линейной формой $l_{\vec{w}, \sigma}$.

Тогда $f(x_1, \dots, x_n)$ — константа 0 или 1. В обоих случаях $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{ZT}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть линейные формы $l_{\vec{w}, \sigma} = 1$ и $l_{\vec{w}', \sigma'} = -1$ соответственно.

2. Точки булева куба E_2^n расположены по обе стороны от гиперплоскости, задаваемой линейной формой $l_{\vec{w}, \sigma}$, и ни одна из них не лежит на данной гиперплоскости.

Рассмотрим величину

$$\rho_* = \min_{\alpha \in E_2^n} \rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(\alpha).$$

Очевидно, что в окрестности $V(l_{\vec{w}, \sigma}) = \{v \in \mathbb{R}^n : \rho_{l_{\vec{w}, \sigma}}(v) < \rho_*\}$ нет ни одной точки булева куба. Пусть B — шар с центром в точке $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ и радиусом $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Тогда все точки булева куба лежат в пределах шара B . Из леммы 3 следует, что существует гиперплоскость, заданная линейной формой $l_{\vec{w}', \sigma'}$, где $w'_i, \sigma' \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$, такая что в пределах B она лежит в окрестности $V(l_{\vec{w}, \sigma})$. Следовательно, соответствующее ей разбиение булева куба будет совпадать с разбиением, задаваемым линейной формой $l_{\vec{w}, \sigma}$. Следовательно, нашлась такая линейная форма $l_{\vec{w}', \sigma'}$, где $w'_i, \sigma' \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$, что задаваемая ей пороговая функция совпадает с $f(x_1, \dots, x_n)$.

3. Точки булева куба E_2^n расположены по обе стороны от гиперплоскости, задаваемой линейной формой $l_{\vec{w},\sigma}$, а также существуют точки булева куба, лежащие на данной гиперплоскости.

Рассмотрим величину

$$\rho_* = \min_{\substack{\alpha \in E_2^n, \\ l_{\vec{w},\sigma}(\alpha) \neq 0}} \rho_{l_{\vec{w},\sigma}}(\alpha).$$

Легко убедиться, что линейная форма $l_{\vec{w},\sigma - \frac{\rho_*}{2}}$ задаёт такое же разбиение, как $l_{\vec{w},\sigma}$, при этом ни одна из точек булева куба не лежит на задаваемой ею гиперплоскости. Таким образом, данный случай сводится к предыдущему.

Лемма доказана. $\square$

Из леммы 4 следует утверждение теоремы 1.

Следствие (о малых изменениях весов и порога). Если линейная форма $l_{\vec{w},\sigma}$ задаёт пороговую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ и плоскость $l_{\vec{w},\sigma}$ не проходит ни через одну точку булева куба, то найдётся такое $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, что для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$l_{(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i + \varepsilon, w_{i+1}, \dots, w_n), \sigma} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n),$$

а также

$$l_{(w_1, \dots, w_n), \sigma + \varepsilon} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n).$$

3. Доказательство теорем 2 и 3

Очевидно, что если $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная пороговая функция, то ни один из коэффициентов линейной формы $l_{\vec{w},\sigma}$, задающей f , не может равняться нулю. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная пороговая функция и $l_{\vec{w},\sigma} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$, то функция f является монотонной тогда и только тогда, когда $s(l_{\vec{w},\sigma}) = (1, \dots, 1)$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Назовём набор $\alpha \in E_2^n$ *нижней единицей* монотонной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если $f(\alpha) = 1$, а для любого набора $\alpha' \in E_2^n$, $\alpha' < \alpha$, справедливо $f(\alpha') = 0$. Так как функция f монотонная, она однозначно задаётся множеством своих нижних единиц $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, где $\alpha_k \in E_2^n$, $k = 1, \dots, m$. Рассмотрим сокращённую дизъюнктивную нормальную форму

$$B = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m$$

для функции f , где A_i — простая импликанта, соответствующая нижней единице α_i , $i = 1, \dots, m$. Переменная x_j , $j = 1, \dots, n$, входит в импликанту A_i тогда и только тогда, когда на j -й позиции набор α_i принимает значение 1.

Так как f существенным образом зависит от всех своих переменных, то для всякой переменной x_i , $i = 1, \dots, n$, найдётся хотя бы одна импликанта A_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, зависящая от x_i . Рассмотрим наборы

$$\alpha_j = (a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad \alpha'_j = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Пусть некоторая линейная форма $l_{\vec{w}, \sigma}$ задаёт f . Так как α_j — нижняя единица f , то имеют место неравенства

$$\begin{aligned} w_1 a_1 + \dots + w_{i-1} a_{i-1} + w_i \cdot 1 + w_{i+1} a_{i+1} + \dots + w_n a_n - \sigma &\geq 0, \\ w_1 a_1 + \dots + w_{i-1} a_{i-1} + w_i \cdot 0 + w_{i+1} a_{i+1} + \dots + w_n a_n - \sigma &< 0, \end{aligned}$$

что возможно только в случае $w_i > 0$.

Так как соответствующие наборы α_j и α'_j найдутся для каждого переменного x_i , то $s(l_{\vec{w}, \sigma}) = (1, \dots, 1)$. Лемма доказана. $\square$

Пусть $f_{\vec{w}, \sigma}(x_1, \dots, x_n)$ — $\mathbb{Z}$ -пороговая функция, заданная линейной формой $l_{\vec{w}, \sigma}$. Рассмотрим произвольный вектор $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_2^n$. Назовём δ -преобразованием $\mathbb{Z}$ -пороговой функции оператор, определённый на множестве $\mathbb{Z}T$ и принимающий значения на нём же. Этот оператор записывается как

$$\delta[f_{\vec{w}, \sigma}(x_1, \dots, x_n)] = f_{\vec{w}', \sigma'}(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$w'_i = \begin{cases} w_i, & \text{если } d_i = 1, \\ -w_i & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{при } i = 1, \dots, n, \quad \sigma' = \sigma + \sum_{i=1}^n (d_i - 1)w_i.$$

Отметим важные свойства δ -преобразования $\mathbb{Z}$ -пороговой функции.

Лемма 6. Если $f_{\vec{w}, \sigma}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}T$, $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_2^n$ и $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$, то

$$f_{\vec{w}, \sigma}(a_1, \dots, a_n) = \delta[f_{\vec{w}, \sigma}(a_1^{d_1}, \dots, a_n^{d_n})].$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из следующих соображений.

Значение функции $f_{\vec{w}, \sigma}(a_1, \dots, a_n)$ определяется знаком выражения

$$\sum_{i=1}^n a_i w_i - \sigma.$$

Значение функции $\delta[f_{\vec{w}, \sigma}(a_1^{d_1}, \dots, a_n^{d_n})]$, в свою очередь, определяется знаком выражения

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{d_i+1} \cdot a_i w_i + \sum_{i=1}^n (1 - d_i) w_i - \sigma.$$

Легко заметить, что на всех наборах $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$ значения данных сумм равны. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, δ -преобразование порождает симметричную функцию.

Обозначим через $\widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n$ множество всех существенных $\mathbb{Z}$ -пороговых функций от n переменных, имеющих сигнатуру s .

Следствие.

1. Если $s, \delta \in E_2^n$, $f, f' \in \widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n$, $f \neq f'$, то $\delta[f] \neq \delta[f']$.
2. Если $\delta = s(f)$, то $\delta[f]$ — монотонная пороговая функция.

Лемма 7. Если $s, s' \in E_2^n$ и $s \neq s'$, то $\widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n \cap \widetilde{\mathbb{Z}T}_{s'}^n = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — существенная $\mathbb{Z}$ -пороговая функция, такая что $f \in \widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n$ и $f \in \widetilde{\mathbb{Z}T}_{s'}^n$. Тогда существуют линейные формы $l_{\vec{w}, \sigma}$ и $l_{\vec{w}', \sigma'}$, задающие f , такие что $w_i > 0$, если $s_i = 1$, $w_i < 0$, если $s_i = 0$, а также $w'_i > 0$, если $s'_i = 1$, $w'_i < 0$, если $s'_i = 0$.

Положим $\delta = s$ и выполним δ -преобразование функции f , заданной формами $l_{\vec{w}, \sigma}$ и $l_{\vec{w}', \sigma'}$. По лемме 6 имеем

$$\delta[f_{\vec{w}, \sigma}(x_1, \dots, x_n)] = \delta[f_{\vec{w}', \sigma'}(x_1, \dots, x_n)].$$

Так как $\delta = s$, то из следствия леммы 6 в левой части этого выражения имеем монотонную функцию от n переменных, а в правой части функцию, не являющуюся монотонной, так как $s \neq s'$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Из леммы 7 следует теорема 2.

Доказательство теоремы 3. Из леммы 7 следует, что

$$\widetilde{\mathbb{Z}T}^n = \bigcup_{i=1}^{2^n} \widetilde{\mathbb{Z}T}_{s_i}^n,$$

где $s_1 = (0, \dots, 0)$, $s_2 = (0, \dots, 0, 1)$, $\dots$, $s_{2^n} = (1, \dots, 1)$, при этом если $i \neq j$, то $\widetilde{\mathbb{Z}T}_{s_i}^n \cap \widetilde{\mathbb{Z}T}_{s_j}^n = \emptyset$.

Пусть $s \neq (1, \dots, 1)$, $\delta = s$. Рассмотрим множество $\delta[\widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n] = \{\delta[f] : f \in \widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n\}$. По следствию из леммы 6 данное множество будет состоять только из монотонных пороговых функций. Верно также и обратное: если $\delta' = (\delta)$, то для любой монотонной пороговой функции f из $\widetilde{\mathbb{Z}T}_{(1, \dots, 1)}$ верно, что $\delta'[f] \in \widetilde{\mathbb{Z}T}_{(0, \dots, 0)}$. Следовательно, если $\delta = s$, то

$$\delta[\widetilde{\mathbb{Z}T}_s^n] = \widetilde{\mathbb{Z}T}_{(1, \dots, 1)}^n.$$

Следовательно, классы $\widetilde{\mathbb{Z}T}_{s_i}^n$, $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, взаимно симметричны и равномощны. Теорема доказана. $\square$

4. Доказательство теоремы 4

Рассмотрим следующую меру сложности линейной формы:

$$L(l_{\vec{w},\sigma}) = \max(|w_1|, \dots, |w_n|, |\sigma|).$$

Для пороговой функции f определим величину

$$L(f) = \min_{l_{\vec{w},\sigma} \rightarrow f} L(l_{\vec{w},\sigma}).$$

Здесь минимум берётся по всем линейным формам с целыми коэффициентами, задающим функцию f .

Рассмотрим аналогичную характеристику для множества $\mathbb{Z}T^n$:

$$L(n) = \max_{f \in \mathbb{Z}T^n} L(f).$$

Очевидно, что $\rho(n) \leq (n+1)L(n)$. Чтобы оценить $\rho(n)$, достаточно рассмотреть функцию $f \in \mathbb{Z}T^n$, на которой достигается величина $L(n)$. Без ограничения общности можно считать, что функция f монотонная. Следовательно, все коэффициенты линейной формы $l_{\vec{w},\sigma}$, задающей f , положительны. При этом хотя бы один из них равен $L(n)$. Рассмотрим пороговую функцию $f' = \bar{f}$. По теореме о сигнатурах все коэффициенты линейной формы, задающей f' , отрицательны. Следовательно, $\rho(f, f') \geq L(n)$. Получаем

$$\log L(n) \leq \log \rho(n) \leq \log L(n) + \log(n+1). \quad (2)$$

Таким образом, для оценки логарифма $\rho(n)$ достаточно оценить логарифм $L(n)$.

Оценим $\log L(n)$ сверху. Пороговая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ однозначно определяется своими значениями на наборах из E_2^n . Всего таких наборов имеется 2^n . Рассмотрим следующую систему из 2^n неравенств:

$$\begin{cases} \bigwedge_{\alpha_i \in N_f} (\alpha_i \cdot \vec{w} - \sigma \geq 0), \\ \bigwedge_{\alpha_i \in E_2^n \setminus N_f} (\alpha_i \cdot \vec{w} - \sigma < 0). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\alpha_i = (a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$, $i = 1, \dots, 2^n$, $N_f = \{\alpha \in E_2^n : f(\alpha) = 1\}$ — множество наборов, на которых функция f принимает значение 1. Очевидно, что любой набор $(w_1, \dots, w_n, \sigma)$, удовлетворяющий данной системе, будет определять линейную форму $l_{\vec{w},\sigma}$, задающую f .

Рассмотрим векторы $\alpha'_i, \alpha''_i \in E_2^{n+1}$, такие что

$$\alpha'_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}, 1) \text{ для всех } \alpha_i \in E_2^n, \quad \alpha''_i = \begin{cases} \alpha'_i, & \text{если } \alpha_i \in N_f, \\ -\alpha'_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим систему из 2^n неравенств

$$\bigwedge_{\alpha_i \in E_2^n} (\alpha''_i \cdot \vec{w} \geq 1), \quad (4)$$

где $\vec{w}' = (w'_1, \dots, w'_{n+1})$. Легко убедиться, что любое решение $\vec{w}'$ системы (4) задаёт также решение системы (3). Для этого достаточно положить $\vec{w} = (w'_1, \dots, w'_n)$, $\sigma = -w'_{n+1}$.

Очевидно, что множество всех решений системы (4) представляет собой выпуклый многогранник M в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. В экстремальных точках M некоторые $n + 1$ неравенств обращаются в строгие равенства. Пусть $\vec{w}'$ — произвольная экстремальная точка многогранника M . Тогда для $\vec{w}'$ при $A = \|a_{ij}\|_{(n+1) \times (n+1)}$, $a_{ij} \in E_2$, имеет место система уравнений

$$A \cdot \vec{w}' = 1.$$

По правилу Крамера данная система имеет решение

$$w'_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

где Δ — определитель матрицы A , Δ_i — определитель матрицы A_i , получаемой из A заменой i -го столбца на вектор правых частей. Отметим, что в определителях Δ_i i -й столбец состоит только из единиц. Деля столбец на 2 и вычитая его из всех остальных столбцов для всех $i \in \{1, \dots, n + 1\}$, получаем

$$\Delta_i = 2\Delta'_i,$$

где определители Δ'_i состоят только из элементов $\pm \frac{1}{2}$. Тогда по теореме Адамара

$$|\Delta'_i| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (n+1)^{(n+1)/2} = \left(\frac{n+1}{4}\right)^{(n+1)/2}, \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

значит,

$$|\Delta_i| \leq 2 \left(\frac{n+1}{4}\right)^{(n+1)/2}.$$

Осталось заметить, что $\vec{w}'' = |\Delta| \cdot \vec{w}'$ также является решением системы (4), при этом значения w''_i целые. Следовательно,

$$L(n) \leq 2 \left(\frac{n+1}{4}\right)^{(n+1)/2},$$

$$\log L(n) \leq \frac{n+1}{2} \log(n+1) - n = \frac{1}{2} n \log n + o(n).$$

Для оценки $\log L(n)$ снизу приведём без доказательства следующий известный результат.

Теорема 6 [1]. Если $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, то существует такая пороговая функция $f(x_1, \dots, x_n)$, что

$$L(f) \geq \frac{1}{2n} e^{-4n^{\log(3/2)}} 2^{(1/2)n \log n - n}.$$

В случае если $n \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим $n' = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2}n < 2^{\log_2 n - 1} < n' = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leq n.$$

Здесь $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x («округление вниз»).

Так как n' — степень двойки, возьмём функцию $f'(x_1, \dots, x_{n'})$ из теоремы 6. Дополним f' фиктивными переменными до функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, что для $L(f)$ будет иметь место оценка

$$L(f) > \frac{1}{n} e^{-2n^{\log(3/2)}} 2^{(1/4)n \log n - (3/4)n}.$$

Таким образом, для произвольного n имеем

$$\log L(n) \geq \frac{1}{4} n \log n + o(n).$$

Объединяя верхнюю и нижнюю оценки для $\log L(n)$, получаем

$$\frac{1}{4} n \log n + o(n) \leq \log L(n) \leq \frac{1}{2} n \log n + o(n).$$

Теорема 4 доказана. $\square$

5. Доказательство теоремы 5

Две существенные линейные формы $l_{\vec{w}, \sigma}$ и $l_{\vec{w}', \sigma'}$ будем называть *эквивалентными* (обозначение: $l_{\vec{w}, \sigma} \sim l_{\vec{w}', \sigma'}$), если задаваемые ими пороговые функции равны, т. е. $f_{\vec{w}, \sigma} = f_{\vec{w}', \sigma'}$.

Как уже отмечалось, множество $U(f)$ замкнуто относительно операции сложения линейных форм. Складывая эквивалентные формы сами с собой, получаем операцию умножения линейной формы на натуральную константу.

Пусть L — множество линейных форм. Обозначим через $[L]$ замыкание множества L относительно операций сложения и умножения на натуральную константу, т. е. множество всех линейных форм, которые можно получить из L при помощи данных операций.

Лемма 8. Если f — существенная $\mathbb{Z}$ -пороговая функция, то множество $U(f)$ является точно счётно порождённым относительно операций сложения и умножения на константу из $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Предположим противное. Без ограничения общности будем полагать, что f — монотонная функция. Пусть найдётся конечное множество линейных форм $L = \{l_1(x_1, \dots, x_n), \dots, l_k(x_1, \dots, x_n)\}$, такое что $[L] = U(f)$.

Если найдётся форма $l_i \in L$, которая представляется в виде линейной комбинации остальных форм из L , то, очевидно, $[L \setminus l_i] = [L]$. Поэтому естественно полагать, что множество L несократимо, т. е. из него нельзя выбросить ни одной линейной формы, не сузив замыкания. Иными словами, можно считать, что множество L состоит только из линейно независимых элементов.

Пусть $l_{\vec{w}, \sigma} \in U(f)$ и ни одна из точек булева куба не лежит на плоскости, задаваемой $l_{\vec{w}, \sigma}$.

Если $[L] = U(f)$, то форма $l_{\vec{w}, \sigma}$ представима в виде линейной комбинации элементов из L :

$$l_{\vec{w}, \sigma} = \sum_{j=1}^k a_j l_j, \quad a_j \in \mathbb{N}_0, \quad l_j \in L, \quad j \in \{1, \dots, k\}.$$

Тогда если $c \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{j=1}^k a_j l_j \sim c \left(\sum_{j=1}^k a_j l_j \right).$$

Рассмотрим линейную форму

$$l' = c \left(\sum_{j=1}^k a_j l_j \right) + p x_i, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

где $p \in \mathbb{N}$. Возможны два случая: $l_{\vec{w}, \sigma} \sim l'$ и $l_{\vec{w}, \sigma} \not\sim l'$.

Покажем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдётся такой множитель $c \in \mathbb{N}$, что $l_{\vec{w}, \sigma} \sim l'$.

Из следствия леммы 4 получаем, что для произвольной линейной формы с целыми коэффициентами $l_{\vec{w}, \sigma} = w_1 x_1 + \dots + w_n x_n - \sigma$, гиперплоскость которой не проходит ни через одну точку булева куба, существует линейная форма

$$l_\varepsilon = w_1 x_1 + \dots + w_{i-1} x_{i-1} + (w_i + \varepsilon) x_i + w_{i+1} x_{i+1} + \dots + w_n x_n - \sigma,$$

где $\varepsilon = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, такая что $l_{\vec{w}, \sigma} \sim l_\varepsilon$. При этом форма l_ε существует для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $c = p \cdot q$. Тогда

$$\begin{aligned} l_{\vec{w}, \sigma} \sim c l_\varepsilon &= \sum_{j=1}^{i-1} p \cdot q \cdot w_j x_j + p \cdot q \cdot \left(w_i + \frac{1}{q} \right) x_i + \sum_{j=i+1}^n p \cdot q \cdot w_j x_j - \sigma = \\ &= p \cdot q \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j x_j - \sigma \right) + p \cdot x_i = l'. \end{aligned}$$

Таким образом, всегда возможно подобрать такой натуральный множитель c , что $l_{\vec{w}, \sigma} \sim l'$. Следовательно, $l' \in U(f)$, и значит, l' представима в виде линейной комбинации элементов из L , т. е.

$$l' = \sum_{j=1}^k a'_j l_j = \sum_{j=1}^k a_j l_j + p x_i.$$

Пусть $\tilde{l} = x_i$. Возможны два случая: $\tilde{l} \in L$ и $\tilde{l} \notin L$. Покажем, что второй случай невозможен. Предположим противное.

Линейную форму $l_{\vec{w}, \sigma}$ будем называть положительно-определённой, если все её весовые коэффициенты и порог положительны. Концентрацией переменной x_i

в положительно-определённой линейной форме $l_{\vec{w},\sigma} = \sum_{j=1}^n w_j x_j - \sigma$ назовём отношение

$$v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}) = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}.$$

Очевидны следующие свойства концентрации:

- 1) $0 \leq v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}) \leq 1$;
- 2) если $\lambda \in \mathbb{N}$, то $v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}) = v(x_i, l_{\lambda\vec{w},\lambda\sigma})$;
- 3) если заданы линейные формы $l_{\vec{w},\sigma}$ и $l_{\vec{w}',\sigma'}$ и $\lambda, \lambda' \in \mathbb{N}$, то

$$v(x_i, \lambda l_{\vec{w},\sigma} + \lambda' l_{\vec{w}',\sigma'}) \leq \max(v(x_i, l_{\vec{w},\sigma}), v(x_i, l_{\vec{w}',\sigma'})).$$

Так как множитель p выбирается произвольно, можно утверждать, что найдётся такой множитель c , что $v(x_i, l') > \max(v(x_i, l_1), \dots, v(x_i, l_k))$, что невозможно. Следовательно, $\tilde{l} \in L$. Так как переменная x_i выбиралась произвольно, получаем, что все формы вида x_i содержатся в L . Если в качестве l' рассмотреть форму

$$l' = c(a_1 l_1 + \dots + a_k l_k) + p, \quad \text{где } p \in \mathbb{N},$$

получаем, что $1 \in L$.

Полученного набора линейных форм достаточно для конструирования произвольной положительно-определённой линейной формы. Значит, все положительно-определённые линейные формы содержатся в $[L]$ и, соответственно, в $U(f)$, что неверно. Лемма доказана. $\square$

Пусть L и B — множества линейных форм. Будем говорить, что множество B *полно в L* относительно операций сложения и умножения на натуральную константу, если $[B \setminus l] \neq L$. Назовём B *базисом L* относительно данных операций, если B полно в L и для всякой линейной формы $l \in B$ выполнено $[B \setminus l] \neq L$.

Из леммы 8 следует, что $U(f)$ не может обладать конечным базисом. Остаётся вопрос о существовании в $U(f)$ бесконечных, а точнее счётных, базисов. Приведём примеры пороговых функций, для которых множество $U(f)$ содержит счётный базис.

Лемма 9. Существует такая функция $f \in \widetilde{\mathbb{ZT}}^1$, что множество $U(f)$ обладает счётным базисом относительно операции сложения двух линейных форм.

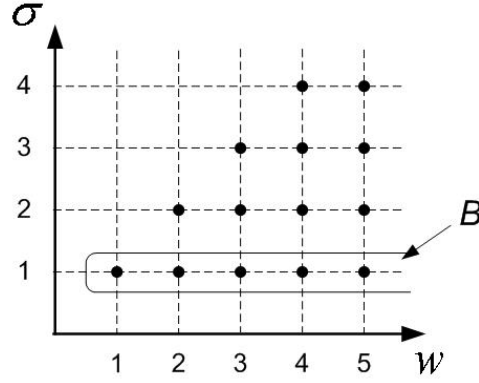
Доказательство. Рассмотрим пороговую функцию $f(x) = x$. Так как f монотонная, то по теореме о сигнатурах множество $U(f)$ состоит только из положительно-определённых линейных форм. Следовательно, любая линейная форма $l \in U(f)$ имеет вид

$$l(x) = wx - \sigma,$$

где $w > 0$ и $\sigma > 0$. Таким образом,

$$U(f) = \{w \cdot x - \sigma : w \geq \sigma, w, \sigma \in \mathbb{N}\}.$$

Множество $U(f)$ изображено на рис. 1.

Рис. 1. Множество $U(f)$ при $f(x) = x$

Рассмотрим множество линейных форм $B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots\}$. Здесь первая компонента соответствует значению w , а вторая — σ . Данная система является полной относительно операции сложения, так как любая линейная форма $l_{w,\sigma}(x) = wx - \sigma$ из множества $U(f)$ может быть представлена в виде

$$l_{w,\sigma}(x) = l_{(w-\sigma+1),1}(x) + (\sigma - 1) \cdot l_{1,1}(x).$$

При этом если из B выбросить произвольный элемент $l_{w,1}(x)$, то его невозможно будет представить в виде линейной комбинации остальных, так как при сумме любых двух элементов значение порога σ будет не менее двух. Поэтому B — базис множества $U(x)$. $\square$

Лемма 10. Существует такая функция $f \in \widetilde{\mathbb{ZT}}^2$, что множество $U(f)$ обладает счётным базисом относительно операции сложения линейных форм.

Доказательство. Рассмотрим пороговую функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$. Так как f монотонная, то по теореме о сигнатурах множество $U(f)$ состоит только из положительно-определённых линейных форм. Следовательно, любая линейная форма $l \in U(f)$ имеет вид

$$l(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \sigma,$$

где $w_1, w_2, \sigma > 0$. Таким образом,

$$U(f) = \{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 - \sigma : w_1 + w_2 \geq \sigma, w_1 < \sigma, w_2 < \sigma, w_1, w_2, \sigma \in \mathbb{N}\}.$$

Множество $U(f)$ можно представить в виде

$$U(f) = \bigcup_{i=2}^{\infty} U_{\sigma=i}(f),$$

где

$$U_i(f) = \{l_{\vec{w},\sigma} \in \widetilde{\mathbb{ZL}}^n : l_{\vec{w},\sigma} \rightarrow f, \sigma = i\}.$$

На рис. 2 изображены первые шесть членов данного разложения множества $U(x_1 \& x_2)$. Обозначим

$$B_i = \{l_{\vec{w}, \sigma} \in U_i(f) : (w_1 = i - 1) \vee (w_2 = i - 1)\}, \quad i = 2, 3, \dots$$

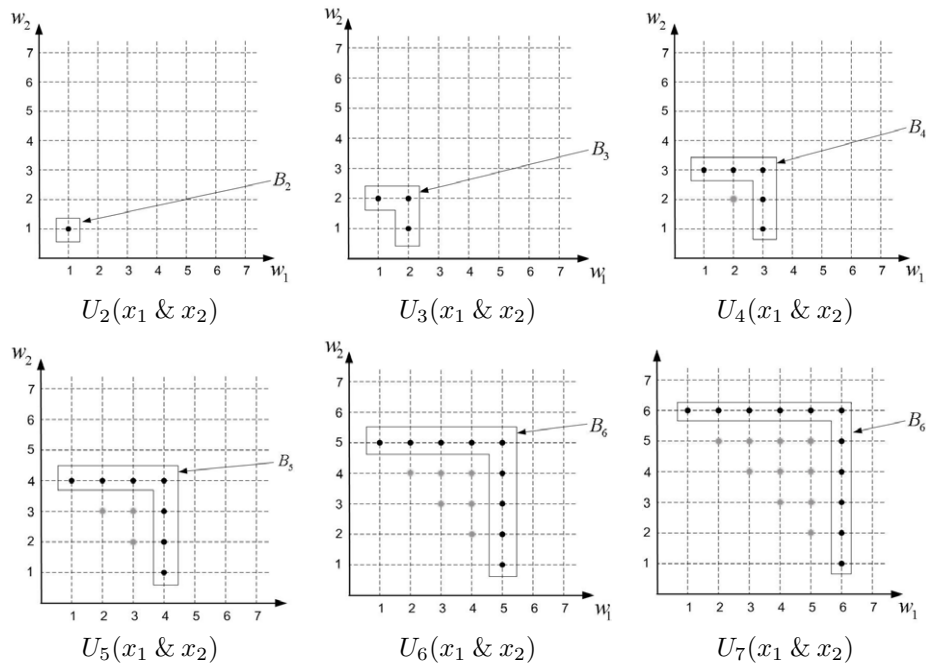


Рис. 2. Множество $U(x_1 \& x_2)$

Рассмотрим множество линейных форм $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup \dots$. Покажем, что B является базисом $U(x_1 \& x_2)$.

Полнота B следует из того, что для любого $i \geq 4$ элементы множества $U_i(x_1 \& x_2) \setminus B_i$ (на рис. 2 данные множества обозначены серым цветом) могут быть представлены в виде $l_{(1,1,2)} + l'$, где $l_{(1,1,2)} = x_1 + x_2 - 2$, а l' — соответствующий элемент множества $U_{i-2}(x_1 \& x_2)$.

Покажем, что ни один элемент множества B не может быть выражен через остальные при помощи операций суммы и умножения на константу. Отметим, что для элементов множества $U_i(f)$ справедливо

$$w_1 < i, \quad w_2 < i.$$

Таким образом, для любой линейной комбинации с положительными коэффициентами элементов из B , состоящей из более чем одного элемента, выполнено

$$w_1 \leq \sigma - 2, \quad w_2 \leq \sigma - 2.$$

В то же время для элементов множества B имеют место равенства

$$w_1 = \sigma - 1, \quad w_2 = \sigma - 1.$$

Следовательно, B является базисом $U(x_1 \& x_2)$. Лемма доказана. $\square$

Обобщая леммы 9 и 10, докажем теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Без ограничения общности будем считать, что f — произвольная монотонная пороговая функция от n переменных. Для остальных пороговых функций утверждение будет следовать из теоремы о сигнатурах. Так как f монотонная, множество $U(f)$ целиком содержится в множестве $\mathbb{N}^{n+1}$. Рассмотрим следующее разбиение множества $\mathbb{N}^{n+1}$:

$$\mathbb{N}^{n+1} = K_1 \cup (K_2 \setminus K_1) \cup (K_3 \setminus K_2) \cup \dots,$$

где

$$K_i = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) : a_j \in \mathbb{N}, a_j \leq i, j = 1, \dots, n+1\}, \quad i = 1, \dots, \infty.$$

K_i — куб в пространстве $\mathbb{N}^{n+1}$ со стороной i .

Пусть B — множество линейных форм, которое задаётся следующим образом:

- 1) на множестве K_1 ищем пересечение $K_1 \cap U(f)$. Так как в любом множестве K_i содержится $i^{(n+1)}$ элементов, то задача нахождения $K_1 \cap U(f)$ является алгоритмически разрешимой. Множество $K_1 \cap U(f)$ целиком заносим в B ;
- 2) переходим к рассмотрению множества $(K_2 \setminus K_1)$. Аналогично предыдущему шагу находим множество $(K_2 \setminus K_1) \cap U(f)$. Из данного множества удаляем те элементы, которые могут быть получены из множества $K_1 \cap U(f)$ при помощи операций сложения и умножения на константу (обозначим данное множество L_2). Задача нахождения множества L_2 также является алгоритмически разрешимой, так как всевозможных линейных комбинаций элементов из $K_1 \cap U(f)$, координаты которых не превосходят 2, конечное число. Множество $[(K_2 \setminus K_1) \cap U(f)] \setminus L_2$ целиком заносим в B ;
- 3) переходим к рассмотрению множества $(K_3 \setminus K_2)$. Аналогично находим множество $[(K_3 \setminus K_2) \cap U(f)] \setminus L_3$. Здесь L_3 — множество всех элементов $(K_3 \setminus K_2) \cap U(f)$, которые могут быть получены при помощи операций сложения и умножения из множества $K_2 \cap U(f)$;
- 4) и т. д.;
- 5) переходим к рассмотрению множества $(K_{i+1} \setminus K_i)$. Находим множество $[(K_{i+1} \setminus K_i) \cap U(f)] \setminus L_{i+1}$, где L_{i+1} — множество всех элементов $(K_{i+1} \setminus K_i) \cap U(f)$, которые могут быть получены при помощи операций сложения и умножения из множества $K_i \cap U(f)$;
- 6) и т. д.

Полученное множество B имеет вид

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} [(K_i \setminus K_{i-1}) \cap U(f)] \setminus L_i,$$

где L_i — те элементы множества $(K_i \setminus K_{i-1}) \cap U(f)$, которые могут быть получены при помощи операций сложения и умножения из множества $K_{i-1} \cap U(f)$. Положим $L_1 = \emptyset$.

Покажем, что B — базис множества $U(f)$. Полнота B следует из построения: любой элемент $U(f)$ либо находится в B , либо линейно выражается через его элементы. При этом из B нельзя отбросить ни одного элемента. Это следует из того, что элементы множества $[(K_i \setminus K_{i-1}) \cap U(f)] \setminus L_i$ не выражаются линейно через элементы множества $[(K_j \setminus K_{j-1}) \cap U(f)] \setminus L_j$, если $j > i$, так как в таком случае любая линейная комбинация элементов из $[(K_j \setminus K_{j-1}) \cap U(f)] \setminus L_j$ имеет координаты больше i . Поэтому B — базис. Единственность B следует из того, что ни один элемент множества $[(K_i \setminus K_{i-1}) \cap U(f)] \setminus L_i$, $i = 1, 2, \dots$, не может быть выражен через остальные. Теорема доказана. $\square$

Я благодарю Валерия Борисовича Кудрявцева за постановку задач и ценные консультации, а также за поддержку моего интереса к математике и пороговой логике в частности.

Литература

- [1] Hastad J. On the size of weights for threshold gates // SIAM J. Discrete Math. — 1994. — Vol. 7. — P. 484—492.