Принцип максимума Понтрягина в задаче с временным запаздыванием

Г. В. БОКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: bokovgrigoriy@gmail.com

УДК 519.95

Ключевые слова: теория оптимального управления, дифференциальные уравнения с временны́м запаздыванием, необходимые условия оптимальности, принцип максимума, временной горизонт.

Аннотация

В работе формулируется задача оптимального управления с постоянным запаздыванием по времени в фазовой переменной и в переменной управления. Доказывается теорема, дающая необходимые условия оптимальности решения. Приводится обобщение данной задачи на случай бесконечного промежутка времени.

Abstract

G. V. Bokov, Pontryagin's maximum principle of optimal control problems with time-delay, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 5, pp. 3—19.

In this paper, we consider an optimal control problem with time-delay. The state and the control variables contain various constant time-delays. This allows us to represent the necessary conditions in an explicit form. Solution of this problem with infinite terminal time is also given.

1. Введение

Принцип максимума в задаче с запаздыванием формулируется для дифференциальных уравнений с отклоняющимся или запаздывающим аргументом, т. е. для таких дифференциальных уравнений, в которые неизвестная функция и её производная входят, вообще говоря, при различных значениях аргумента. Примером может служить следующее уравнение, которое мы будем использовать в дальнейшем:

$$\dot{x}(t) = f\bigl(t, x(t), x(t-\theta)\bigr).$$

Впервые отдельные уравнения такого типа появились в математической литературе во второй половине XVIII века (Кондорсе, 1771 г.), но систематическое исследование началось лишь в XX веке, особенно в конце 1940-х годов (А. Д. Мышкис [4], Е. М. Райт и Р. Беллман), в связи с потребностями прикладных наук. В частности, они нашли применение и в принципе максимума

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 5, с. 3—19.

Л. С. Понтрягина [5], появившемся в конце 50-х годов прошлого века, что дало мощный толчок развитию этого направления (особый вклад внесли Р. Габасов, Г. Л. Харатишвили, А. С. Матвеев, Н. Н. Красовский, а также А. Галаней, Д. Х. Чюн, Э. Б. Ли).

В 1961 г. Г. Л. Харатишвили (см. [5, с. 240—254; 6]) обобщил принцип максимума Понтрягина на случай постоянного запаздывания в фазовой переменной. Он рассматривал автономную систему дифференциальных уравнений без запаздывания в управлении.

Д. Х. Чюн и Э. Б. Ли (см. [9]) в 1966 г. получили принцип максимума для неавтономной системы дифференциальных уравнений в линейно-квадратичной задаче оптимального управления с кратным запаздыванием в фазовой переменной, но без запаздывания в управлении. Под линейно-квадратичной задачей понимается задача, в которой система дифференциальных уравнений является линейной по фазовой переменной и управлению, а функция, для которой решается экстремальная задача, квадратично зависит от этих же переменных.

А. Галаней [11] в 1968 г. доказал необходимые условия оптимальности для более общей задачи оптимального управления с запаздыванием как в фазовой переменной, так и в управлении. Он рассмотрел специфическую систему дифференциальных уравнений в интегральной форме. Его доказательство основано на абстрактном методе множителей Хестенса (см. [12]).

В [10] были даны необходимые условия оптимальности в форме существования сопряжённой, в [8] с помощью теории оптимальных полей получен принцип максимума для проблемы оптимального управления с кратным запаздыванием.

В 1988 г. А. С. Матвеев [3] рассмотрел более общую задачу оптимального управления с запаздыванием, в которой параметр запаздывания представлен как функция времени, причём обобщённое запаздывание входит как в фазовую переменную, так и в управление. Его результаты, как и результаты А. Галанея, имеют достаточно абстрактный характер, что затрудняет их практическое применение.

В данной работе поставлена задача оптимального управления, содержащая постоянные параметры запаздывания как в фазовой переменной, так и в переменной управления. Она определяется без требования автономности и линейности для системы дифференциальных уравнений. Для данной задачи будет доказана теорема, которая является аналогом принципа максимума Понтрягина. Ограничения на вид запаздывающего параметра позволяют записать необходимые условия оптимальности решения в явном виде, что делает их пригодными для практического использования.

2. Постановка задачи

Определение 1. Функция $x(t)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна всюду на $[t_0, t_1]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Определение 2. Функция $x(t)$ называется кусочно-гладкой на отрезке $[t_0, t_1]$, если она непрерывна, а её производная $\dot{x}(t)$ кусочно-непрерывна на $[t_0, t_1]$.

Множество всех кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций на отрезке $[t_0, t_1]$, принимающих значения из некоторого множества M, обозначим соответственно через $\mathrm{KC}([t_0, t_1], M)$ и $\mathrm{KC}^1([t_0, t_1], M)$.

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{F}\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\big(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)\big)\, dt \to \inf, \tag{2.1}$$

где $x(\cdot) \in \mathrm{KC}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — состояние системы (фазовая переменная), $u(\cdot) \in \mathrm{KC}([t_0, t_1], U)$ — управление системой (управляющая переменная), $U \subseteq \mathbb{R}^r$ — множество возможных значений управления, $\theta_1 = \mathrm{const}$ — параметр запаздывания фазовой переменной, $\theta_2 = \mathrm{const}$ — параметр запаздывания управления.

Изменение состояний системы описывается следующим дифференциальным уравнением с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)\big), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2.2}$$

Чтобы гарантировать существование решения этого уравнения, необходимо задать непрерывную функцию $x_0(\cdot)$, такую что

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in [t_0 - \theta_1, t_0], \tag{2.3}$$

и кусочно-непрерывную функцию $u_0(\cdot)$, такую что

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [t_0 - \theta_2, t_0). \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что функции

$$f = f(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^r, w^1, \dots, w^r) \colon G \times U \times U \to \mathbb{R},$$
$$\varphi = \varphi(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^r, w^1, \dots, w^r) \colon G \times U \times U \to \mathbb{R}^n$$

(G — открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$), определённые в (2.1), (2.2), удовлетворяют следующим условием: они сами и их частные производные по переменным x^i, y^j $(i, j = 1, \dots, n)$ непрерывны по совокупности аргументов в $G \times U \times U$.

Моменты времени t_0 и t_1 будем считать фиксированными. Значение верхнего предела t_1 может быть, вообще говоря, как конечным, так и бесконечным, но во втором случае интеграл в (2.1) может оказаться расходящимся. Случай $t_1 = +\infty$ будет рассмотрен позднее, а для начала предположим, что значение t_1 конечно.

Определение 3. Назовём пару $\big(x(\cdot), u(\cdot)\big)$ управляемым процессом в задаче (2.1)—(2.4), если

а) управление $u(\cdot) \colon [t_0, t_1] \to U$ — кусочно-непрерывная функция. Для определённости будем считать, что $u(\cdot)$ непрерывна справа для $t_0 \leqslant t < t_1$ и слева в точке t_1;

б) фазовая траектория $x(\cdot)\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-гладкая функция, её график Γ лежит в G:

$$\Gamma = \big\{ \big(t, x(t), x(t-\theta_1)\big) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \big\} \subset G;$$

в) для всех $t \in [t_0, t_1]$, кроме, быть может, точек разрыва управления $u(\cdot)$, функция $x(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2).

Управляемый процесс называется допустимым, если выполняются начальные условия (2.3) и (2.4).

Допустимый управляемый процесс $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$ называется оптимальным, если найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всякого допустимого управляемого процесса $\big(x(\cdot), u(\cdot)\big)$, такого что

$$|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in [t_0, t_1],$$

выполняется неравенство

$$\mathcal{F}\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) \geqslant \mathcal{F}\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big).$$

Введём некоторые обозначения:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t) &= f\big(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)\big),\\
\hat{\varphi}(t) &= \varphi\big(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)\big),\\
\hat{f}^v_u(t) &= f\big(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)\big),\\
\hat{\varphi}^v_u(t) &= \varphi\big(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)\big),\\
\hat{f}^v_w(t) &= f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), v),\\
\hat{\varphi}^v_w(t) &= \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(t, x, y, u, w) &= H\big(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)\big) =\\
&= \hat{p}(t)\varphi\big(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)\big) - \hat{\lambda}_0 f\big(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)\big).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Имеет место следующая теорема, которую мы назовём *принципом максимума Понтрягина в задаче с запаздыванием*.

Теорема 1. *Если* $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$ *— оптимальный допустимый процесс для задачи* (2.1)—(2.4), *то существуют множители Лагранжа*

$$\hat{\lambda}_0 \geqslant 0, \quad \hat{\mu}, \hat{p}(\cdot) \in \mathrm{KC}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n),$$

не равные одновременно нулю, при которых выполнены

1) *уравнение Эйлера*

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t) = \begin{cases} -\hat{H}_x(t) - \hat{H}_y(t+\theta_1), & t \in [t_0, t_1 - \theta_1],\\ -\hat{H}_x(t), & t \in [t_1 - \theta_1, t_1]; \end{cases} \tag{2.6}$$

2) *принцип максимума Понтрягина*

$$\max_{v \in U}[H(t,\hat{x},\hat{y},v,\hat{w}) + H(t+\theta_2,\hat{x},\hat{y},\hat{u},v)] =$$

$$= \begin{cases} H(t,\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{w}) + H(t+\theta_2,\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{w}), & t \in [t_0, t_1-\theta_2], \\ \max_{v \in U} H(t,\hat{x},\hat{y},v,\hat{w}) = H(t,\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{w}), & t \in [t_1-\theta_2, t_1]; \end{cases} \quad (2.7)$$

3) *условие трансверсальности*

$$\hat{p}(t_0) = \hat{\mu}, \quad \hat{p}(t_1) = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\hat{H}_\Delta(t) = \frac{\partial}{\partial \Delta} H(t,\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{w}).$$

3. Доказательство

Для простоты будем рассматривать случай, когда $n = 1$. В случае когда $n \in \mathbb{N}$ произвольно, увеличивается только громоздкость выражений, но их суть остаётся той же.

3.1. Игольчатые вариации

Начнём с определения элементарной (вейерштрассовской) игольчатой вариации. Пусть

$$T_0 = \{\tau \in (t_0, t_1) \mid \hat{u}(\cdot) \text{ непрерывна в } \tau \text{ и } \tau + \theta_2\}.$$

Зафиксируем точку $\tau \in T_0$, элемент $v \in U$ и число $\alpha \geqslant 0$ настолько малое, что $[\tau - \alpha, \tau] \subset T_0$.

Управление

$$u_\alpha(t) = u_\alpha(t;\tau,v) = \begin{cases} \hat{u}(t), & \text{если } t \notin [\tau-\alpha,\tau), \\ v, & \text{если } t \in [\tau-\alpha,\tau), \end{cases} \quad (3.1)$$

назовём *элементарной игольчатой вариацией управления* $\hat{u}(\cdot)$. Рассмотрим дифференциальное равнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), x(t-\theta_1), u_\alpha(t), u_\alpha(t-\theta_2)\big)$$

с начальным условием для фазовой переменной (2.3) и начальным условием для управления (2.4). Обозначим через $x_\alpha(t) = x_\alpha(t;\tau,v)$ решение этого уравнения. Назовём $x_\alpha(t)$ *элементарной игольчатой вариацией траектории* $\hat{x}(\cdot)$, а пару $\big(x_\alpha(t), u_\alpha(t)\big)$ *элементарной вариацией процесса* $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$. Пару (τ, v), определяющую эту вариацию, будем называть *элементарной иголкой*.

Лемма 1 (о свойствах элементарной вариации). *Пусть элементарная иголка (τ, v) фиксирована. Тогда существует такое $\tilde{\alpha} > 0$, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde{\alpha}$ выполняются следующие утверждения*:

1) *траектория* $x_\alpha(t)$ *определена на всём отрезке* $[t_0, t_1]$ *и при стремлении* α *к нулю справа* $(\alpha \to 0+0)$ $x_\alpha(t) \rightrightarrows \hat{x}(t)$ *равномерно на* $[t_0, t_1]$;
2) *при* $t \geqslant \tau$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde{\alpha}$ *существует и непрерывна по* α *производная* $\frac{d}{d\alpha}x_\alpha(t;\tau,v)$, *которая при* $\alpha = 0$ *определена как производная справа*;
3) *функция*

$$z(t) = \frac{d}{d\alpha}x_\alpha(t;\tau,v)\bigg|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0+0}\frac{x_\alpha(t;\tau,v) - \hat{x}(t)}{\alpha}$$

на интервале $[\tau, \tau+\theta_2)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} \hat{\varphi}_x(t)z(t), & t \in [\tau, \tau+\theta_1], \\ \hat{\varphi}_x(t)z(t) + \hat{\varphi}_y(t)z(t-\theta_1), & t \in [\tau+\theta_1, t_1], \end{cases} \tag{3.2}$$

с начальным условием

$$z(\tau) = \hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau), \tag{3.3}$$

а на отрезке $[\tau+\theta_2, t_1]$ *(если* $\tau+\theta_2 > t_1$, *то этого случая не будет) удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, но с начальным условием*

$$z(\tau+\theta_2) = \hat{\varphi}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{\varphi}(\tau+\theta_2) + \tilde{z}(\tau+\theta_2), \tag{3.4}$$

где $\tilde{z}(\tau+\theta_2)$ — *значение решения системы дифференциальных уравнений* (3.2) *с начальным условием* (3.3) *в точке* $t = \tau+\theta_2$, *продолженное по непрерывности.*

Доказательство. Доказательство леммы будем проводить по частям. Сначала докажем её для случая, когда функция $\hat{u}(t)$ непрерывна. Тогда из (2.2) в силу условий, наложенных на функцию φ, получаем, что траектория $\hat{x}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = \varphi\big(t, x, y, u_\alpha(t), u_\alpha(t-\theta_2)\big), \tag{3.5}$$

$$\dot{x} = \varphi\big(t, x, y, \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)\big). \tag{3.6}$$

Согласно (3.1) правые части этих уравнений совпадают при $t < \tau - \alpha$, а так как $x_\alpha(t) = \hat{x}(t) = x_0(t)$ при $t \in [t_0-\theta_1, t_0]$, то по теореме существования и единственности решения для уравнения с запаздыванием (см. [7, с. 31—33]) для $t < \tau-\alpha$ справедливо $x_\alpha(t) \equiv \hat{x}(t)$, и по непрерывности решения

$$\xi_1(\alpha) = x_\alpha(\tau-\alpha) = \hat{x}(\tau-\alpha). \tag{3.7}$$

В частности, функция $\xi_1(\alpha)$ непрерывно дифференцируема по α как композиция непрерывно дифференцируемых функций, и

$$\xi_1(0) = \hat{x}(\tau), \quad \xi_1'(0) = -\dot{\hat{x}}(\tau) = -\hat{\varphi}(\tau). \tag{3.8}$$

Обозначим через $\nu_1(t, s, \xi_1)$ решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), \hat{x}(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)\big), \\ &x(s) = \xi_1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Можно считать $\alpha > 0$ настолько малым, что $\tau - \alpha > \tau - \theta_i$, $i = 1, 2$. Тогда для $t \in [\tau - \alpha, \tau]$ дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), x(t - \theta_1), v, u_\alpha(t - \theta_2)\big), \\ &x(t) = \hat{x}(t), \quad t \in [\tau - \alpha - \theta_1, \tau - \alpha], \end{aligned}$$

эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению (3.9).

В соответствии с локальной теоремой существования и единственности (см. [1, с. 169—173]) можно подобрать такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$, что функция $\nu_1(t, s, \xi_1)$ определена при

$$|t - \tau| < \delta_1, \quad |s - \tau| < \delta_1, \quad |\xi_1 - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_1,$$

а в силу теоремы о дифференциальной зависимости решений от начальных данных (см. [1, с. 185—188]) функция ν_1 является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных.

Согласно (3.1) и (3.7) для определения $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau - \alpha, \tau]$ мы должны в (3.9) положить $\xi_1 = \xi_1(\alpha) = \hat{x}(\tau - \alpha)$ и $s = \tau - \alpha$. Если $\alpha_1 < \delta_1$ выбрано так, что $|\xi_1(\alpha) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_1$, то при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ имеем

$$x_\alpha(t) = \nu_1\big(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)\big), \quad \tau - \alpha \leqslant t \leqslant \tau.$$

В частности, функция

$$\xi_2(\alpha) = x_\alpha(\tau) = \nu_1\big(\tau, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)\big),$$

будучи суперпозицией непрерывно дифференцируемых функций, сама является непрерывно дифференцируемой по α, кроме того, выполнены соотношения

$$\xi_2(0) = \hat{x}(\tau), \quad \xi_2'(0) = \hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau).$$

Функция ν_1 непрерывна в точке $\big(\tau, \tau, \hat{x}(\tau)\big)$, причём $\nu_1\big(\tau, \tau, \hat{x}(\tau)\big) = \hat{x}(\tau)$, а функция $\hat{x}(\cdot)$ непрерывна в точке τ. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при

$$|t - \tau| < \delta, \quad |s - \tau| < \delta, \quad |\xi_1 - \hat{x}(\tau)| < \delta$$

выполняются неравенства

$$|\nu_1(t, s, \xi_1) - \hat{x}(\tau)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\hat{x}(t) - \hat{x}(\tau)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Возьмём положительное $\alpha_1 \leqslant \delta$ столь малым, чтобы при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ выполнялось неравенство $|\xi_1(\alpha) - \hat{x}(\tau)| < \delta$. Тогда для любых $t \in [\tau - \alpha, \tau]$, $s = \tau - \alpha$ и $\xi_1 = \xi_1(\alpha)$ будет иметь место неравенство

$$\big|\nu_1\big(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)\big) - \hat{x}(\tau)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что $x_\alpha(t) = \nu_1\big(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)\big)$, для $\tau - \alpha \leqslant t \leqslant \tau$ получаем

$$\begin{aligned} &|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| = \big|\nu_1\big(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)\big) - \hat{x}(t)\big| \leqslant \\ &\quad \leqslant \big|\nu_1\big(t, \tau - \alpha, \xi_1(\alpha)\big) - \hat{x}(\tau)\big| + |\hat{x}(\tau) - \hat{x}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \tau - \alpha \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned}$$

Поскольку $x_\alpha(t) \equiv \hat{x}(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau - \alpha$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\alpha_1 \geqslant 0$, что для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, имеем

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.11}$$

Итак, для $t \in [t_0, \tau]$ мы получили

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \hat{x}(t), & t \in [t_0, \tau - \alpha], \\ \nu_1\big(t, \tau - \alpha, \hat{x}(\tau - \alpha)\big), & t \in [\tau - \alpha, \tau]. \end{cases} \tag{3.12}$$

Теперь рассмотрим отрезок $[\tau, \tau + \theta_2 - \alpha]$. Без ограничения общности можно считать, что $\theta_1 \geqslant \theta_2$. Тогда из $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2 - \alpha$ следует, что $\tau - \theta_2 \leqslant t - \theta_2 \leqslant \tau - \alpha$, откуда по (3.1) получаем, что $u_\alpha(t - \theta_2) = \hat{u}(t - \theta_2)$, и $\tau - \theta_1 \leqslant t - \theta_1 \leqslant \tau - \alpha$, откуда по (3.12) получаем, что $x_\alpha(t - \theta_1) = \hat{x}(t - \theta_1)$. Учитывая (3.1), имеем, что для $t \in [\tau, \tau + \theta_2 - \alpha]$ уравнение (3.5) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), \hat{x}(t - \theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t - \theta_2)\big). \tag{3.13}$$

Обозначим через $\nu_2(t, \xi_2)$ решение этого уравнения с начальным условием $x(\tau) = \xi_2$. По теореме о дифференциальной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных (см. [1, с. 185—188]) получим, что существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что функция $\nu_2(t, \xi_2)$ определена при $|\xi_2 - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_2$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2$ и является непрерывно дифференцируемой по совокупности аргументов. Тогда для определения $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau, \tau + \theta_2 - \alpha]$ положим $\xi_2 = \xi_2(\alpha)$. Если α_2 выбрано так, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ выполняется неравенство $|\xi_2(\alpha) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_2$, то при тех же значениях α имеем

$$x_\alpha(t) = \nu_2\big(t, \xi_2(\alpha)\big), \quad t \in [\tau, \tau + \theta_2 - \alpha].$$

В частности эта функция, как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, сама является непрерывно дифференцируемой по (t, α) при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$. Итак, при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2 - \alpha$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ существует и непрерывна по (t, α) производная $\frac{d}{d\alpha} x_\alpha(t; \tau, v)$. Введём обозначение

$$M = \max_{t \in [\tau, \tau + \theta_2]} z(t),$$

где

$$z(t) = \frac{d}{d\alpha} x_\alpha(t; \tau, v)\bigg|_{\alpha = 0} = \lim_{\alpha \to 0+0} \frac{x_\alpha(t) - \hat{x}(t)}{\alpha}.$$

Тогда для $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2 - \alpha$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ имеем

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| \leqslant \alpha M \leqslant \alpha_2 M.$$

Возьмём положительное α_2 настолько малым, что $\alpha_2 M < \varepsilon$. Тогда

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2 - \alpha. \tag{3.14}$$

Перейдём от уравнения (3.13) с начальным условием $\xi_2 = \xi_2(\alpha)$ к эквивалентному интегральному уравнению

$$x_\alpha(t) = \xi_2(\alpha) + \int_\tau^t \varphi\big(\sigma, x_\alpha(\sigma), \hat{x}(\sigma - \theta_1), \hat{u}(\sigma), \hat{u}(\sigma - \theta_2)\big)\, d\sigma. \tag{3.15}$$

Дифференцируя это уравнение по α и полагая $\alpha = 0$, находим, что на интервале $[\tau, \tau+\theta_2)$ функция $z(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{z}(t) = \hat{\varphi}_x(t) z(t) \tag{3.16}$$

и начальному условию

$$z(\tau) = \hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau). \tag{3.17}$$

Положим

$$\xi_3(\alpha) = x_\alpha(\tau+\theta_2-\alpha) = \nu_2\big(\tau+\theta_2-\alpha, \xi_2(\alpha)\big).$$

Функция $\xi_3(\alpha)$ непрерывно дифференцируема по α, и, в силу того что $\xi_2(0) = \hat{x}(\tau)$, имеем

$$\xi_3(0) = \hat{x}(\tau+\theta_2), \quad \xi_3'(0) = -\hat{\varphi}(\tau+\theta_2) + \tilde{z}(\tau+\theta_2),$$

где $\tilde{z}(\tau+\theta_2)$ — значение решения уравнения (3.16) с начальным условием (3.17) в точке $\tau+\theta_2$, продолженное по непрерывности.

Переходя к отрезку $[\tau+\theta_2-\alpha, \tau+\theta_2]$ и учитывая, что $\theta_1 \geqslant \theta_2$ и α мало, получим с учётом (3.1), что уравнение (3.5) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), v).$$

Обозначим через $\nu_3(t, s, \xi_3)$ решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \hat{x}(t-\theta_1), \hat{u}(t), v), \\ &x(s) = \xi_3. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Опять в соответствии с локальной теоремой существования и единственности можно подобрать такие $\varepsilon_3 > 0$ и $\delta_3 > 0$, что функция $\nu_3(t, s, \xi_3)$ определена при

$$|t-(\tau+\theta_2)| < \delta_3, \quad |s-(\tau+\theta_2)| < \delta_1, \quad |\xi_3 - \hat{x}(\tau+\theta_2)| < \varepsilon_3,$$

а в силу теоремы о дифференциальной зависимости решений от начальных данных функция ν_3 является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных.

Положим $\xi_3 = \xi_3(\alpha) = \hat{x}(\tau+\theta_2-\alpha)$ и $s = \tau+\theta_2-\alpha$. Если $\alpha_3 < \delta_3$ выбрано так, что $|\xi_3(\alpha) - \hat{x}(\tau+\theta_2)| < \varepsilon_3$, то при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3$ имеем

$$x_\alpha(t) = \nu_3\big(t, \tau+\theta_2-\alpha, \xi_3(\alpha)\big), \quad \tau+\theta_2-\alpha \leqslant t \leqslant \tau+\theta_2.$$

В частности, функция $x_\alpha(t)$, как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, сама является непрерывно дифференцируемой по (t,α) функцией при $\tau+\theta_2-\alpha \leqslant t \leqslant \tau+\theta_2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3$.

Так как функция ν_3 непрерывна в точке $\big(\tau+\theta_2, \tau+\theta_2, \hat{x}(\tau+\theta_2)\big)$, причём $\nu_3\big(\tau+\theta_2, \tau+\theta_2, \hat{x}(\tau+\theta_2)\big) = \hat{x}(\tau+\theta_2)$, а функция $\hat{x}(\cdot)$ непрерывна в точке $\tau+\theta_2$, то, поступая аналогично вышеизложенному, убеждаемся, что для достаточно малого α_3 при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_3$ выполнено неравенство

$$
\begin{aligned}
&|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| = \bigl|\nu_3\bigl(t, \tau + \theta_2 - \alpha, \xi_3(\alpha)\bigr) - \hat{x}(t)\bigr| \leqslant \\
&\quad \leqslant \bigl|\nu_3\bigl(t, \tau + \theta_2 - \alpha, \xi_3(\alpha)\bigr) - \hat{x}(\tau + \theta_2)\bigr| + |\hat{x}(\tau + \theta_2) - \hat{x}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \\
&\quad \tau + \theta_2 - \alpha \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2.
\end{aligned}
$$

Поскольку для $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ выполняется неравенство (3.11), а для $\tau \leqslant t \leqslant \leqslant \tau + \theta_2 - \alpha$ выполняется неравенство (3.14), то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\alpha_0 \geqslant 0$ ($\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$), что для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$, имеем

$$
|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \theta_2. \tag{3.19}
$$

Перейдём от уравнения (3.18) с начальным условием $\xi_3 = \xi_3(\alpha)$ к эквивалентному интегральному уравнению

$$
x_\alpha(t) = \xi_3(\alpha) + \int\limits_{\tau+\theta_2-\alpha}^{t} \varphi(\sigma, x_\alpha(\sigma), \hat{x}(\sigma - \theta_1), \hat{u}(\sigma), v)\, d\sigma. \tag{3.20}
$$

Дифференцируя это уравнение по α и полагая $\alpha = 0$, получаем

$$
z(\tau + \theta_2) = \xi_3'(0) + \hat{\varphi}_w^v(\tau + \theta_2) = \hat{\varphi}_w^v(\tau + \theta_2) - \hat{\varphi}(\tau + \theta_2) + \tilde{z}(\tau + \theta_2),
$$

где $\tilde{z}(\tau + \theta_2)$ определено выше. Положим

$$
\eta(\alpha) = x_\alpha(\tau + \theta_2) = \nu_3\bigl(\tau + \theta_2, \tau + \theta_2 - \alpha, \xi_3(\alpha)\bigr). \tag{3.21}
$$

Эта функция, будучи суперпозицией непрерывно дифференцируемых функций, сама непрерывно дифференцируема по α, и выполнены соотношения

$$
\eta(0) = \hat{x}(\tau + \theta_2), \quad \eta'(0) = \hat{\varphi}_w^v(\tau + \theta_2) - \hat{\varphi}(\tau + \theta_2) + \tilde{z}(\tau + \theta_2). \tag{3.22}
$$

Итак, для $t \in [t_0, \tau + \theta_2]$ мы получили

$$
x_\alpha(t) = \begin{cases}
\hat{x}(t), & t \in [t_0, \tau - \alpha], \\
\nu_1\bigl(t, \tau - \alpha, \hat{x}(\tau - \alpha)\bigr), & t \in [\tau - \alpha, \tau], \\
\nu_2\bigl(t, x_\alpha(\tau)\bigr), & t \in [\tau, \tau + \theta_2 - \alpha], \\
\nu_3\bigl(t, \tau + \theta_2 - \alpha, x_\alpha(\tau + \theta_2 - \alpha)\bigr), & t \in [\tau + \theta_2 - \alpha, \tau + \theta_2].
\end{cases} \tag{3.23}
$$

Осталось определить $x_\alpha(t)$ для $t \in [\tau + \theta_2, t_1]$. (Предполагается, что t_1 столь велико, что выполняется $t_1 > \tau + \theta_2$, так как иначе этого случая вообще не будет.) Для этой цели разобьём отрезок $[\tau + \theta_2, t_1]$ на подотрезки

$$
[\tau + \theta_2, \tau + \theta_2 + \theta_1], \ldots, [\tau + \theta_2 + (k-1)\theta_1, \tau + \theta_2 + k\theta_1],\ [\tau + \theta_2 + k\theta_1, t_1],
$$

где k определяется из условия

$$
k = \max\bigl\{\tilde{k} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \tau + \theta_2 + \tilde{k}\theta_1 \leqslant t_1\bigr\}.
$$

На каждом отрезке $[\tau+\theta_2+i\theta_1, \tau+\theta_2+(i+1)\theta_1]$, $i=0,\ldots,k$ (при $i=k$ имеется в виду отрезок $[\tau+\theta_2+k\theta_1, t_1]$), рассмотрим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \varphi\big(t, x(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)\big) \tag{3.24}$$

с начальным условием

$$x(\tau+\theta_2+i\theta_1) = x_\alpha(\tau+\theta_2+i\theta_1). \tag{3.25}$$

Вместо того чтобы рассматривать дифференциальное уравнение с запаздыванием (3.5) на отрезке $[\tau+\theta_2, t_1]$ с начальным условием $x(t) = x_\alpha(t)$, $t \in [\tau+\theta_2-\theta_1, \tau+\theta_2]$, где $x_\alpha(t)$ определяется из (3.23), мы разобьём отрезок $[\tau+\theta_2, t_1]$ на подотрезки и на каждом таком подотрезке рассмотрим своё обыкновенное дифференциальное уравнение. При этом для определения $u_\alpha(t)$ мы воспользуемся формулой (3.1). Теперь поясним сам ход рассуждений, который ещё называют *методом шагов* (см. [7, с. 17—25]).

Сначала рассмотрим отрезок $[\tau+\theta_2, \tau+\theta_2+\theta_1]$ и заменим $x(t-\theta_1)$ в (3.5) на $x_\alpha(t-\theta_1)$ согласно (3.23), а $u_\alpha(t)$ раскроем по формуле (3.1). В результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение (3.24). Так как мы ищем непрерывное решение, то в качестве начального условия следует взять

$$x(\tau+\theta_2) = x_\alpha(\tau+\theta_2) = \eta(\alpha).$$

Решение этого уравнения на отрезке $[\tau+\theta_2, \tau+\theta_2+\theta_1]$ обозначим через

$$X_0(t) = X_0\big(t, \eta(\alpha)\big).$$

Согласно (3.1), а также в силу теоремы единственности $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau+\theta_2, \tau+\theta_2+\theta_1]$ совпадает с $X_0(t)$.

Далее рассмотрим отрезок $[\tau+\theta_2+\theta_1, \tau+\theta_2+2\theta_1]$ и заменим $x(t-\theta_1)$ в (3.5) на $x_\alpha(t-\theta_1) = X_0(t-\theta_1)$. В результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение (3.24). Так как мы ищем непрерывное решение, то в качестве начального условия следует положить

$$x(\tau+\theta_2+\theta_1) = x_\alpha(\tau+\theta_2+\theta_1) = X_0(\tau+\theta_2+\theta_1).$$

Решение этого уравнения на отрезке $[\tau+\theta_2+\theta_1, \tau+\theta_2+2\theta_1]$ обозначим через

$$X_1(t) = X_1\big(t, X_0(\tau+\theta_2+\theta_1)\big).$$

Опять в силу (3.1) и по теореме единственности $x_\alpha(t)$ на отрезке $[\tau+\theta_2+\theta_1, \tau+\theta_2+2\theta_1]$ совпадает с $X_1(t)$.

Аналогично рассматривая все последующие подотрезки, получим, что на каждом отрезке $[\tau+\theta_2+i\theta_1, \tau+\theta_2+(i+1)\theta_1]$, $i=0,\ldots,k$,

$$x_\alpha(t) \equiv X_i(t) = X_i\big(t, X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1)\big),$$

где

$$X_{-1}(\tau) = x_\alpha(\tau) = \eta(\alpha).$$

Учитывая это, перепишем обыкновенное дифференциальное уравнение (3.24) с начальным условием (3.25) в эквивалентной интегральной форме

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) = X_i(t) = \\ = X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1) + \int\limits_{\tau+\theta_2+i\theta_1}^{t} \varphi\bigl(\sigma, x_\alpha(\sigma), x_\alpha(\sigma-\theta_1), \hat{u}(\sigma), \hat{u}(\sigma-\theta_2)\bigr)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Раскрывая $X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1)$ по этой же формуле вплоть до $i=0$, получим, что для $t \in [\tau+\theta_2, t_1]$

$$x_\alpha(t) = \eta(\alpha) + \int\limits_{\tau+\theta_2}^{t} \varphi\bigl(\sigma, x_\alpha(\sigma), x_\alpha(\sigma-\theta_1), \hat{u}(\sigma), \hat{u}(\sigma-\theta_2)\bigr)\, d\sigma. \tag{3.26}$$

По теореме о дифференциальной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных (см. [1, с. 185—188]) получаем, что существует такое $\tilde{\varepsilon}_i > 0$, что функция

$$x_\alpha(t) \equiv X_i(t) = X_i\bigl(t, X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1)\bigr)$$

определена при

$$|X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1) - \hat{x}(\tau+\theta_2+i\theta_1)| < \tilde{\varepsilon}_i, \quad \tau+\theta_2+i\theta_1 \leqslant t \leqslant \tau+\theta_2+(i+1)\theta_1$$

и является непрерывно дифференцируемой, и так для каждого $i = 0, \ldots, k$. Следовательно, функция $x_\alpha(t)$ определена на отрезке $[\tau+\theta_2, t_1]$ по формуле (3.26) и, как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, сама является непрерывно дифференцируемой по (t, α) при $\tau+\theta_2 \leqslant t \leqslant t_1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_4$, где α_4 выбрано так, чтобы при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_4$ выполнялись все неравенства

$$|X_{i-1}(\tau+\theta_2+i\theta_1) - \hat{x}(\tau+\theta_2+i\theta_1)| < \tilde{\varepsilon}_i, \quad i = 0, \ldots, k.$$

Значит, при $\tau+\theta_2 \leqslant t \leqslant t_1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_4$ существует и непрерывна по α производная $\frac{d}{d\alpha} x_\alpha(t; \tau, v)$. Полагая $\tilde{\alpha} = \min(\alpha_0, \alpha_4)$, мы видим, что верно второе утверждение леммы.

Дифференцируя уравнение (3.26) по α и полагая $\alpha = 0$, находим, что

$$z(t) = \eta'(0) + \int\limits_{\tau+\theta_2}^{t} [\hat{\varphi}_x(\sigma) z(\sigma) + \hat{\varphi}_y(\sigma)]\, d\sigma.$$

Легко заметить, что это интегральное уравнение эквивалентно уравнению (3.2) с начальным условием $z(\tau+\theta_2) = \eta'(0)$, совпадающим с (3.4) согласно (3.22). Таким образом, верно третье утверждение леммы.

Осталось доказать первое утверждение. Выше мы уже показали, что оно выполнено на отрезке $[t_0, \tau+\theta_2]$, это легко следует из неравенства (3.14). Осталось показать, что оно выполнено и на отрезке $[t_0, t_1]$. Обозначим

$$M = \max_{t \in [\tau+\theta_2, t_1]} z(t),$$

где

$$z(t) = \lim_{\alpha \to 0+0} \frac{x_\alpha(t) - \hat{x}(t)}{\alpha}.$$

Тогда для $\tau + \theta_2 \leqslant t \leqslant t_1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde{\alpha}$ имеем

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| \leqslant \alpha M \leqslant \tilde{\alpha} M.$$

Возьмём положительное $\tilde{\alpha}$ настолько малым, что $\tilde{\alpha} M < \varepsilon$. Тогда

$$|x_\alpha(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \quad \tau + \theta_2 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{3.27}$$

Объединяя (3.14) с (3.27), получим, что $x_\alpha(t)$ равномерно на $[t_0, t_1]$ сходится к $\hat{x}(t)$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \tilde{\alpha}$.

Итак, мы получили все утверждения леммы для непрерывного управления $\hat{u}(\cdot)$. Осталось рассмотреть случай, когда управление $\hat{u}(\cdot)$ является кусочно-непрерывной функцией. Для этого поступим следующим образом. Для простоты пусть точек разрыва будет две, скажем α_1 и α_2. Также предположим, что точка τ, в которой $\hat{u}(\cdot)$ должно быть непрерывным, расположена между ними: $t_0 < \alpha_1 < \tau < \alpha_2 < t_1$. На отрезке $[t_0, \alpha_1]$ дифференциальные уравнения (3.5) и (3.6), в которых при $t = \alpha_1$ нужно считать управление равным его предельному значению $\hat{u}(\alpha_1 - 0) = \lim\limits_{t \to \alpha_1 - 0} \hat{u}(t)$, совпадают, и по теореме единственности $x_\alpha(t) \equiv \hat{x}(t)$ при $t \in [t_0, \alpha_1]$.

Теперь перейдём к отрезку $[\alpha_1, \alpha_2]$, снова полагая на его границах управление равным предельным значениям $\hat{u}(\alpha_1 + 0)$ при $t = \alpha_1$ и $\hat{u}(\alpha_2 - 0)$ при $t = \alpha_2$. Здесь мы решаем дифференциальные уравнения (3.5) и (3.6) с начальным условием $x(t) = \hat{x}(t)$, $t \in [\alpha_1 - \theta_1, \alpha_1]$. Относительно точки $\tau + \theta_2$ возможны три ситуации:

1) $\tau + \theta_2 \in (\alpha_1, \alpha_2)$;
2) $\tau + \theta_2 = \alpha_2$;
3) $\tau + \theta_2 > \alpha_2$.

Разбирая по отдельности эти случаи, убеждаемся, что в каждом из них верны все утверждения леммы. Итак, лемма полностью доказана и для общего случая, когда управление $\hat{u}(\cdot)$ является кусочно-непрерывной функцией. □

3.2. Лемма о приращении функционала

Положим $\chi(\alpha) = \mathcal{F}\big(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)\big)$ и докажем, что эта функция дифференцируема справа в точке $\alpha = 0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} p(t) = \begin{cases} \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t) + \hat{f}_y(t + \theta_1) - p(t + \theta_1)\hat{\varphi}_y(t + \theta_1), & t \in [t_0, t_1 - \theta_1], \\ \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t), & t \in [t_1 - \theta_1, t_1], \end{cases} \\ &p(t_1) = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Лемма 2. *Пусть* $p(\cdot)$ — *решение системы* (3.28). *Тогда в условиях теоремы* 1

$$\chi'(0+0) = \frac{d}{d\alpha}\mathcal{F}\big(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)\big)\Big|_{\alpha=0+0} = a(\tau, v),$$

где

$$a(\tau,v) = \begin{cases} \hat{f}_u^v(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{f}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2) - \\ \quad - p(\tau)[\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau)] - \\ \quad - p(\tau+\theta_2)[\hat{\varphi}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{\varphi}(\tau+\theta_2)], & \tau+\theta_2 \leqslant t_1, \\ \hat{f}_u^v(\tau) - \hat{f}(\tau) - p(\tau)[\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{\varphi}(\tau)], & \tau+\theta_2 > t_1. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\theta_1 \geqslant \theta_2$. Случай $\theta_1 \leqslant \theta_2$ рассматривается аналогично. Без ограничения общности можно считать, что t_1 настолько велико, что $t_1 - \theta_i > \tau$, $i = 1, 2$. Используя соотношение (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) - \chi(0) = \int\limits_{\tau-\alpha}^{\tau} \big[f\big(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), v, \hat{u}(t-\theta_2)\big) - \hat{f}(t)\big]\,dt + \\ + \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta_2-\alpha} \big[f\big(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)\big) - \hat{f}(t)\big]\,dt + \\ + \int\limits_{\tau+\theta_2-\alpha}^{\tau+\theta_2} [f(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), v) - \hat{f}(t)]\,dt + \\ + \int\limits_{\tau+\theta_2}^{t_1} \big[f\big(t, x_\alpha(t), x_\alpha(t-\theta_1), \hat{u}(t), \hat{u}(t-\theta_2)\big) - \hat{f}(t)\big]\,dt. \end{aligned}$$

Поскольку по лемме о свойствах элементарной вариации $x_\alpha(t)$ непрерывно дифференцируема по α, то, переходя к пределу при $\alpha \to 0+0$, воспользуемся теоремой о среднем и применим обычное правило дифференцирования под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \chi'(0+0) = \hat{f}_u^v(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{f}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2) + \\ + \int\limits_{\tau}^{\tau+\theta_1} \hat{f}_x(t)z(t)\,dt + \int\limits_{\tau+\theta_1}^{t_1} [\hat{f}_x(t)z(t) + \hat{f}_y(t)z(t-\theta_1)]\,dt. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Функция $p(\cdot)$ удовлетворяет системе (3.28), а $z(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.2) с начальным условием (3.3), поэтому на интервале $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta_1$

$$\frac{d}{dt}p(t)z(t) = \big(\hat{f}_x(t) + \hat{f}_y(t+\theta_1) - p(t+\theta_1)\hat{\varphi}_y(t+\theta_1)\big)z(t);$$

на интервале $\tau + \theta_1 \leqslant t \leqslant t_1 - \theta_1$

$$\frac{d}{dt}p(t)z(t) = \big(\hat{f}_x(t) + \hat{f}_y(t+\theta_1) - p(t+\theta_1)\hat{\varphi}_y(t+\theta_1)\big)z(t) + p(t)\hat{\varphi}_y(t)z(t-\theta_1);$$

на интервале $t_1 - \theta_1 \leqslant t \leqslant t_1$

$$\frac{d}{dt}p(t)z(t) = \hat{f}_x(t)z(t) + p(t)\hat{\varphi}_y(t)z(t-\theta_1).$$

Учитывая это, последние два интеграла в формуле (3.29) можно переписать следующим образом:

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+\theta_1} \hat{f}_x(t)z(t)\,dt + \int\limits_{\tau+\theta_1}^{t_1} [\hat{f}_x(t)z(t) + \hat{f}_y(t)z(t-\theta_1)]\,dt = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d}{dt}p(t)z(t)\,dt.$$

Раскрывая этот интеграл и принимая во внимание краевое условие $p(t_1) = 0$ и условия (3.3), (3.4) для $z(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned}\chi'(0+0) = \hat{f}^v_u(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{f}^v_w(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2) - {}\\ - p(\tau)[\hat{\varphi}^v_u(\tau) - \hat{\varphi}(\tau)] - p(\tau+\theta_2)[\hat{\varphi}^v_w(\tau+\theta_2) - \hat{\varphi}(\tau+\theta_2)].\end{aligned}$$

Итак, лемма о приращении функционала полностью доказана. □

3.3. Доказательства принципа максимума Понтрягина в задаче с запаздыванием

По определению график оптимальной фазовой траектории лежит в G. В силу первого утверждения леммы 1 о свойствах элементарной вариации график $x_\alpha(\cdot)$ при достаточно малом $\alpha \geqslant 0$ также лежит в G. Поэтому пара $\big(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)\big)$ является допустимым процессом для задачи (2.1)—(2.4). Значит, если $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$ — оптимальный процесс, то при малых $\alpha \geqslant 0$

$$\chi(\alpha) = \mathcal{F}\big(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)\big) \geqslant \mathcal{F}\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big) = \chi(0).$$

Следовательно, $\alpha = 0$ является локальным решением вспомогательной задачи

$$\chi(\alpha) = \mathcal{F}\big(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)\big) \to \inf, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Применим к этой задаче правило множителей Лагранжа (см. [1, с. 227]): существуют такие множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda} \leqslant 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\hat{\lambda}_0\chi(\alpha) + \hat{\lambda}\alpha)\bigg|_{\alpha=0+0} = 0.$$

Поскольку $\hat{\lambda} \leqslant 0$, то это условие можно переписать в виде $\hat{\lambda}_0\chi'(0+0) \geqslant 0$. Применив лемму 2, получим $\hat{\lambda}_0 a(\tau, v) \geqslant 0$. Теперь положим $\hat{p}(\cdot) = \hat{\lambda}_0 p(\cdot)$, тогда последнее неравенство можно записать в виде

$$\hat{p}(\tau)\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{f}_u^v(\tau) + \hat{p}(\tau+\theta_2)\hat{\varphi}_w^v(\tau+\theta_2) - \hat{f}_w^v(\tau+\theta_2) \leqslant \\ \leqslant \hat{p}(\tau)\hat{\varphi}(\tau) - \hat{f}(\tau) + \hat{p}(\tau+\theta_2)\hat{\varphi}(\tau+\theta_2) - \hat{f}(\tau+\theta_2)$$

при $\tau \in [t_0, t_1 - \theta_1]$,

$$\hat{p}(\tau)\hat{\varphi}_u^v(\tau) - \hat{f}_u^v(\tau) \leqslant \hat{p}(\tau)\hat{\varphi}(\tau) - \hat{f}(\tau)$$

при $\tau \in [t_1 - \theta_1, t_1]$.

Напомним, что $\tau \in T_0$ и $v \in U$ были произвольны. Следовательно, мы доказали, что для любого $\tau \in T_0$ и для любого $v \in U$ в силу (2.5) справедливо (2.7). Наконец, положим $\hat{\mu} = \hat{p}(t_0)$. Таким образом, теорема полностью доказана.

4. Принцип максимума с бесконечным интервалом времени

По многим причинам предположение о том, что интервал времени бесконечен, более удобно. Действительно, многие процессы в целом не имеют естественной остановки в обозримом будущем, примером может служить процесс накопления капитала в экономике. Хотя мир и не может существовать вечно, в математических моделях, приближённо описывающих реальный мир, часто оказывается более удобным и наглядным перейти к пределу так, чтобы в модели появилась математическая бесконечность, соответствующая бесконечности по времени реального мира.

Формально единственное изменение в описании модели состоит в том, что надо положить $t_1 = +\infty$. Однако переход к пределу, как всегда, связан с некоторым риском. Функционал (2.1) теперь является несобственным интегралом, который может, вообще говоря, расходиться. Чтобы этого избежать, потребуем ограниченности функций f и g, их производных по переменным x^i, y^j $(i, j = 1, \ldots, n)$ и ограниченности фазовой переменной $x(\cdot)$, а также внесём под знак интеграла убывающую экспоненту с показателем $-\rho$:

$$\mathcal{F}\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) = \int_{t_0}^{+\infty} f\big(t, x(t), x(t-\theta_1), u(t), u(t-\theta_2)\big) e^{-\rho t}\, dt \to \inf. \tag{4.1}$$

Тогда по признаку Дирихле (см. [2, с. 230]) этот интеграл сходится. Далее для удобства будем придерживаться тех же предположений и обозначений, которые мы ввели ранее. Нетрудно проверить, что в дополнительных предположениях, как следствие теоремы 1, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\big(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\big)$ — оптимальный допустимый процесс для задачи* (4.1), (2.2)—(2.4), *то существуют множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\hat{\mu}$ и кусочно непрерывно дифференцируемая функция $\hat{p}(\cdot)$, не равные одновременно нулю, при которых выполнены*

1) *уравнение Эйлера*

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t) = -\hat{H}_x(t) - \hat{H}_y(t+\theta_1);$$

2) *принцип максимума Понтрягина*

$$\max_v\{H(t,\hat{x},\hat{y},v,\hat{w}) + H(t+\theta_2,\hat{x},\hat{y},\hat{u},v)\} = \\ = H(t,\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{w}) + H(t+\theta_2,\hat{x},\hat{y},\hat{u},\hat{w}), \quad t\in[t_0,+\infty);$$

3) *условие трансверсальности*

$$\hat{p}(t_0) = \hat{\mu}, \quad \lim_{t\to+\infty}\hat{p}(t) = 0.$$

Теорема доказывается аналогично теореме 1. Сходимость интегралов мы уже обеспечили; чтобы обосновать дифференцирование под знаком интеграла, воспользуемся правилом Лейбница (см. [2, с. 422]). Идея и ход доказательства остаются теми же.

Литература

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Физматлит, 2005.

[2] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003.

[3] Матвеев А. С. Задачи оптимального управления с запаздыванием общего вида и фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 6. — С. 1200—1229.

[4] Мышкис А. Д. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — Рига, 1949.

[5] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

[6] Харатишвили Г. Л. Оптимальные процессы с запаздыванием. — Тбилиси, 1966.

[7] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М., 1971.

[8] Bakke V. L. Optimal fields of problems with delays // J. Optim. Theory Appl. — 1981. — Vol. 33, no. 1. — P. 69—84.

[9] Chyung D. H., Lee E. B. Linear optimal systems with time delays // SIAM J. Control. — 1966. — Vol. 4, no. 3. — P. 548—575.

[10] Guinn T. Reduction of delayed optimal control problems to nondelayed problems // J. Optim. Theory Appl. — 1976. — Vol. 18, no. 3. — P. 371—377.

[11] Halanay A. Optimal controls for systems with time lag // SIAM J. Control. — 1968. — Vol. 6, no. 2. — P. 215—234.

[12] Hestenes M. R. On variational theory and optimal control theory // SIAM J. Control. — 1965. — Vol. 3, no. 1. — P. 23—48.