Достаточные условия эффективной трансляции локально генерических запросов*

С. М. ДУДАКОВ
Тверской государственный университет
e-mail: Sergey.Dudakov@tversu.ru

УДК 510.652

Ключевые слова: трансляционный результат, язык запросов.

Аннотация

Данная работа является продолжением исследований по теории языков запросов первого порядка к базам данных. Ранее было установлено, что во многих разрешимых теориях имеет место трансляционная теорема: каждый локально генерический запрос эквивалентен некоторому ограниченному, но вопрос о возможности эффективного нахождения этого запроса почти не исследовался. Используя полученные нами ранее результаты, мы предлагаем метод эффективного нахождения этих запросов для широкого класса теорий, который включает арифметику Пресбургера и теорию действительных чисел.

Abstract

S. M. Dudakov, Sufficient conditions for effective translation of locally generic queries, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 5, pp. 49—61.

This paper continues investigations in the database query first-order languages theory. It is known that for many decidable theories, the collapse result holds: each locally generic query is equivalent to some restricted query. But till now, the problem of effective construction of this query is almost unexplored. We use earlier results of the author on the construction of a method of effective obtaining this query. The method is rather general, it is applicable, for example, to the Presburger arithmetic and the real number theory.

1. Введение

Задача, которая решается в данной работе, проистекает из теории баз данных. База данных — конечная совокупность конечных таблиц. Таблицы можно считать конечными отношениями, названия которых образуют конечную сигнатуру Ξ, а элементы таблиц берутся из какого-либо фиксированного множества A. Хотя количество таблиц и количество элементов в каждой из них конечно, эти количества потенциально неограниченны, поэтому A следует считать бесконечным. Таким образом, базу данных можно считать алгебраической

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 07-01-00637 и 08-01-00241.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 5, с. 49—61.

системой $\mathfrak{D}$ сигнатуры Ξ, носитель которой — конечное подмножество A. Любая информация реально хранится в некотором порядке, поэтому всегда можно считать, что на $\mathfrak{D}$, кроме отношений базы данных, есть линейный порядок. Для извлечения информации из базы данных, как правило, используются языки первого порядка. В простейшем случае запросы являются замкнутыми формулами первого порядка. Хорошо известно, что не всякое свойство алгебраических систем может быть записано такими формулами. Например, если сигнатура базы данных содержит только один одноместный предикатный символ P, то невозможно записать в этой сигнатуре формулу первого порядка, выделяющую в точности те базы данных, в которых количество элементов P является чётным.

Один из путей, который помог бы преодолеть это ограничение, состоит в следующем. Обычно над множеством A, элементы которого используются для построения $\mathfrak{D}$, определены какие-либо стандартные отношения, образующие сигнатуру Σ. Например, если $A = \omega$, то над ω в качестве таких отношений можно использовать операции сложения и умножения. Таким образом, элементы, составляющие $\mathfrak{D}$, являются элементами некой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ. Если в языке запросов использовать отношения не только из Ξ, но и из Σ (запросы в сигнатуре $\Sigma \cup \Xi$ называются расширенными), то, вероятно, можно будет записать какие-то свойства, которые нельзя записать запросами в сигнатуре Ξ (ограниченными запросами). Разумеется, речь должна идти не о связи отношений из Ξ и Σ, а только о свойствах отношений из Ξ. Более точно, мы хотим, чтобы значение запроса не менялось при произвольных изоморфизмах $\mathfrak{D}$ внутри $\mathfrak{A}$, сохраняющих порядок. Такие запросы называются локально генерическими.

Как известно (см., например, [2, 4—6, 8]), для многих разрешимых теорий выполняется следующая трансляционная теорема: для любой модели $\mathfrak{A}$ такой теории любой локально генерический в ней запрос эквивалентен некоторому ограниченному. Однако до сих пор оставался практически неисследованным вопрос об эффективности такого преобразования. Единственный результат в этой области относится к теории линейных порядков (см. [5]).

Результаты работы [3] дали нам возможность разработать весьма общий алгоритм такой трансляции сразу для большого класса теорий, куда входят, например, арифметика Пресбургера и арифметика действительных чисел.

В разделе 2 мы даём основные определения и формулируем результаты. В разделе 3 мы приводим достаточные условия эффективной трансляции и даём схему алгоритма, который эту трансляцию осуществляет. В разделе 4 мы показываем, как полученные результаты можно применить к перечисленным выше теориям.

2. Основные определения

Основные понятия теории моделей можно найти, например, в [7]. Пусть P — одноместный предикатный символ, Σ — произвольная предикатная сигнатура, не содержащая символа P.

Определение 1 (P-ограниченная формула [4]). Формула первого порядка φ сигнатуры (Σ, P) называется *P-ограниченной*, если она или не содержит символа P (т. е. является формулой в сигнатуре Σ), или построена из P-ограниченных формул с помощью булевых связок и P-ограниченных кванторов, т. е. кванторов вида $(\forall\, x \in P)$ и $(\exists\, x \in P)$.

Определим свойство I-сводимости.

Определение 2 (I-сводимость [4]). Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры Σ с носителем A. Пусть I — плотно упорядоченное множество без концевых элементов в $\mathfrak{A}$, которое является неразличимой в $\mathfrak{A}$ последовательностью.

Система $\mathfrak{A}$ обладает свойством *I-сводимости*, если для любой P-ограниченной формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ существует такая бескванторная порядковая формула $\psi_\varphi(\bar{z}, \bar{y})$, что для любого набора $\bar{m} \in A$ существует такой набор $\bar{c}_\varphi(\bar{m}) \in I$, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall\, \bar{y} \in P)\big(\varphi(\bar{m}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(\bar{m}), \bar{y})\big).$$

Мы будем называть I-сводимость эффективной, если формула ψ_φ строится по формуле φ эффективно.

Как доказано в [8] (см. также [4]), для того чтобы система была I-сводимой, достаточно, чтобы условие I-сводимости выполнялось лишь для формул сигнатуры Σ.

Определение 3 (независимая формула [4]). Формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ называется *независимой* в теории T, если в теории T для любого натурального числа N выполняется следующее утверждение: существуют наборы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_N$ длины $|\bar{x}|$ и для любого $K \subseteq \{1, \ldots, N\}$ существует набор $\bar{b}_K$ длины $|\bar{y}|$, такие что для любого $i = 1, \ldots, N$

$$i \in K \Longleftrightarrow \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_K).$$

Неформально это означает, что можно найти сколь угодно большие конечные множества наборов, из которых формула способна выделить произвольное подмножество. В [4] показано, что из отсутствия в теории независимой формулы следует I-сводимость некоторых её моделей.

Определение 4 (тотальная I-сводимость [4, 8]). Пусть I — плотно упорядоченное множество без концевых элементов в системе $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ, являющееся неразличимой в $\mathfrak{A}$ последовательностью.

Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *тотально I-сводимой*, если для любой формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры (Σ, P) (не обязательно P-ограниченной) существует такая бескванторная порядковая формула $\psi_\varphi(\bar{z}, \bar{y})$, что для любого $\bar{m} \in A$ существует набор $\bar{c}_\varphi(\bar{m}) \in I$, такой что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall\, \bar{y} \in P)\big(\varphi(\bar{m}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_\varphi(\bar{c}_\varphi(\bar{m}), \bar{y})\big).$$

Пусть T — теория сигнатуры Σ. Пусть Ω — конечная предикатная сигнатура, не имеющая общих символов с Σ, за исключением порядка $<$. При рассмотрении моделей сигнатуры $\Sigma \cup \Omega$ мы всегда считаем, что отношения порядка Σ и Ω согласованы, следовательно, противоречий не возникает.

Определение 5 (трансляционный результат [5, 6]). *Запрос* (формулу первого порядка) в сигнатуре $\Sigma \cup \Omega$ мы называем *расширенным*, в сигнатуре Ω — *ограниченным*. Если $\mathfrak{A}$ — модель T, $\mathfrak{B}$ — интерпретация символов из Ω над $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ называется *состоянием* в $\mathfrak{A}$. Состояние $\mathfrak{B}$ называется *конечным*, если интерпретации всех символов из Ω конечны. Запрос называется *локально генерическим относительно конечных состояний* (или просто *локально генерическим*), если для любого конечного состояния $\mathfrak{B}$ из истинности запроса в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ следует его истинность в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ для любого изоморфного $\mathfrak{B}$ состояния $\mathfrak{C}$. Свойство теории, когда каждый локально генерический расширенный запрос эквивалентен на конечных состояниях некоторому ограниченному запросу, называется *трансляционным результатом* (в теории выполняется *трансляционная теорема*).

В [4, 5, 8] даны достаточные признаки выполнения в тех или иных теориях трансляционной теоремы. Однако важная задача об эффективности трансляции исследована пока только для теорий линейных порядков [5]. Наша работа восполняет этот существенный пробел. Мы формулируем достаточно общие условия, при которых перевод запросов из расширенной сигнатуры в ограниченную выполняется эффективно, и параллельно указываем алгоритмы трансляции. В качестве завершения мы применяем полученные результаты к некоторым классическим теориям, которые наиболее широко используются на практике: арифметике Пресбургера и арифметике действительных чисел.

3. Достаточные условия эффективной трансляции

Итак, мы считаем, что имеется алгебраическая система сигнатуры Σ. Пусть Ω — сигнатура ограниченных запросов.

Определение 6 (активная область, активный запрос). *Активная область* состояния $\mathfrak{B}$ — множество всех таких $a \in \mathfrak{A}$, которые участвуют хотя бы в одном отношении Ω. Активную область состояния мы обозначаем через AD. Очевидно, что AD определяется некоторой формулой сигнатуры Ω. Запрос, в котором все кванторы являются AD-ограниченными, называется *активным*.

Запрос в сигнатуре (Ω, P), в котором все кванторы являются ограниченными по множеству P, а других вхождений P нет, мы называем P-запросом.

Лемма 1. *Пусть φ — P-запрос, а множество I — интерпретация символа P — является плотно упорядоченным множеством без концевых элементов. Тогда запрос φ эквивалентен относительно конечных состояний в I активному запросу в сигнатуре Ω.*

Доказательство. Расширим сигнатуру, добавив константы для наименьшего и наибольшего элемента активной области: a_0 и a_m соответственно. Очевидно, их можно определить с помощью AD-ограниченных кванторов.

Разобьём в запросе φ каждый P-ограниченный квантор на два квантора: по множеству AD и по множеству $P \setminus \mathrm{AD}$ (для краткости будем обозначать последнее множество через $\overline{\mathrm{AD}}$):

$$(\exists x \in P)\chi \equiv (\exists\, x \in \mathrm{AD})\chi \,\vee\, (\exists\, x \in \overline{\mathrm{AD}})\chi,$$
$$(\forall\, x \in P)\chi \equiv (\forall\, x \in \mathrm{AD})\chi \,\wedge\, (\forall\, x \in \overline{\mathrm{AD}})\chi.$$

Приведём полученную формулу к предварённому виду. Пусть теперь запрос φ имеет вид

$$\varphi \sim (\mathtt{Q}_1 x_1 \in \mathrm{AD}^{\varepsilon_1}) \ldots (\mathtt{Q}_k x_k \in \mathrm{AD}^{\varepsilon_k})\varphi'(\bar{x}),$$

где $\mathrm{AD}^{\varepsilon_i}$ означает AD или $\overline{\mathrm{AD}}$. Пусть $\bar{u}$ — переменные формулы φ', связанные кванторами по AD, $\bar{v}$ — переменные, связанные кванторами по $\overline{\mathrm{AD}}$.

Наша задача — обратной индукцией по l доказать, что формулы

$$(\mathtt{Q}_l x_l \in \mathrm{AD}^{\varepsilon_l}) \ldots (\mathtt{Q}_k x_k \in \mathrm{AD}^{\varepsilon_k})\varphi'(\bar{x})$$

эквивалентны формулам вида

$$\bigvee_j (\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\big(\chi_j(\bar{c}_j, \bar{v}) \,\wedge\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big), \tag{1}$$

где формулы χ_j являются конъюнкциями атомных порядковых формул и не содержат переменных $\bar{u}$, а формулы θ_j содержат только AD-ограниченные кванторы и не содержат переменных $\bar{v}$.

Базис индукции ($l = k + 1$) получается тривиально: достаточно привести φ' к дизъюнктивной нормальной форме и заметить, что для любого $v \in \overline{\mathrm{AD}}$ все атомные формулы сигнатуры Ω (кроме порядковых) ложны, а неравенства вида $u < v$ и $v < u$ эквивалентны формулам

$$(\exists\, c \in \mathrm{AD})(c < v \,\wedge\, c = u)$$

и

$$(\exists\, c \in \mathrm{AD})(v < c \,\wedge\, c = u)$$

соответственно.

Предположим, что для $l + 1$ наше утверждение доказано. Чтобы сделать индукционный шаг, мы должны доказать, что формулы вида

$$(\exists\, x_l \in \mathrm{AD}^{\varepsilon_l})\Big(\bigvee_j (\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\big(\chi_j(\bar{c}_j, \bar{v}) \,\wedge\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big)\Big),$$
$$(\forall\, x_l \in \mathrm{AD}^{\varepsilon_l})\Big(\bigvee_j (\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\big(\chi_j(\bar{c}_j, \bar{v}) \,\wedge\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big)\Big)$$

тоже эквивалентны формулам вида (1).

В первом случае, если $x_l \in \mathrm{AD}$, то квантор существования вносится под знак дизъюнкции, а переменная x_l просто включается в множество переменных $\bar{c}$:

$$\bigvee_j (\exists\, x_l \in \mathrm{AD})(\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\big(\chi_j(\bar{c}_j, \bar{v}) \,\wedge\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big).$$

Если квантор существования ограничен по $\overline{\mathrm{AD}}$, то точно так же формула будет эквивалентна формуле

$$\bigvee_j (\exists\, x_l \in \overline{\mathrm{AD}})(\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\big(\chi_j(\bar{c}_j, \bar{v}) \,\wedge\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big),$$

а последняя формула эквивалентна формуле

$$\bigvee_j (\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\Big(\big((\exists\, x_l \in \overline{\mathrm{AD}})\chi_j(\bar{c}_j, \bar{v})\big) \,\wedge\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\Big),$$

поскольку x_l входить в θ_j не может.

Чтобы доказать утверждение для квантора всеобщности, достаточно доказать, что отрицание формул вида

$$\bigvee_j (\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})(\chi_j \wedge \theta_j)$$

эквивалентно формулам такого же вида. Действительно,

$$\neg \bigvee_j (\exists\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\big(\chi_j(\bar{c}_j, \bar{v}) \,\wedge\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big) \equiv \bigwedge_j (\forall\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})\big(\neg\, \chi_j(\bar{c}_j, \bar{v}) \vee \neg\, \theta_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big).$$

Напомним, что формулы χ_j содержат только неравенства.

Неравенства вида $v_i < v_j$ можно вынести из-под квантора всеобщности.

Для каждого v_i выполнено в точности одно из трёх неравенств:

$$v_i < a_0, \quad a_0 < v_i < a_m, \quad a_m < v_i.$$

Добавим к формуле дизъюнкции такие неравенства для каждого v_i и раскроем скобки. В первом случае все неравенства вида $v_i < c$ истинны, а вида $c < v_i$ ложны, в последнем случае наоборот. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $a_0 < v_i < a_m$.

Тогда для любого v_i существуют ближайшие к нему элементы $y_{1i}, y_{2i} \in \mathrm{AD}$: $y_{1i} < v_i < y_{2i}$, а формула

$$(\forall\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})(\neg\, \chi_j \vee \neg\, \theta_j)$$

эквивалентна формуле

$$(\exists\, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathrm{AD})\bigg(\bigwedge_i y_{1i} < v_i < y_{2i} \,\wedge$$
$$\wedge\, (\forall\, y \in \mathrm{AD})\bigg(\bigwedge_i (y < y_{2i} \,\vee\, y_{1i} < y)\bigg) \,\wedge\, (\forall\, \bar{c}_j \in \mathrm{AD})(\neg\, \chi'_j \vee \neg\, \theta_j)\bigg),$$

где формула χ'_j получается из χ_j заменой неравенств вида $v_i < c$ на $y_{1i} < c$, а неравенств вида $c < v_i$ на $c < y_{2i}$.

Осталось внести неравенства вида $v_i < v_j$, $a_0 < v_i < a_m$ и т. д. внутрь квантора существования, и мы снова получим формулу нужного вида.

Итак, мы доказали наше утверждение по индукции. Когда мы выполним последний шаг, в формуле больше не останется кванторов по $\overline{\mathrm{AD}}$. □

Следствие 1. *Способ трансляции P-запросов в активные запросы является эффективным.*

Напомним, что мы считаем неразличимую последовательность I интерпретацией одноместного предикатного символа P.

Лемма 2. *Пусть система $\mathfrak{A}$ является тотально I-сводимой. Тогда всякий расширенный запрос эквивалентен в области I запросу вида*

$$(\exists\,\bar{c} \in P)\big(\psi(\bar{c}) \wedge \theta(\bar{c})\big),$$

где формула ψ записана в сигнатуре (Σ, P), а формула θ является P-формулой.

Доказательство. Рассмотрим произвольный запрос φ. Разобьём в запросе φ каждый квантор на два квантора, по P и по дополнению P:

$$(\exists\,x)\chi \equiv (\exists\,x \in P)\chi \,\vee\, (\exists\,x \notin P)\chi.$$

Приведём φ к предварённому виду:

$$\varphi \sim (\mathtt{Q}_1 x_1 \in^{\varepsilon_1} P)\ldots(\mathtt{Q}_k x_k \in^{\varepsilon_k} P)\varphi'(\bar{x}),$$

где φ' — бескванторная формула. Так как мы рассматриваем только состояния в I, то из $x \notin P$ автоматически следует $\neg\, S(\ldots, x, \ldots)$, если $S \in \Omega$. Следовательно, можно считать, что все переменные, входящие в формулы вида $S(\ldots)$, где $S \in \Omega$, связаны ограниченными по P кванторами. Пусть $\bar{u}$ — переменные формулы φ', связанные кванторами по P, $\bar{v}$ — переменные, связанные кванторами по дополнению P.

Наша задача — индукцией по количеству кванторов доказать, что формулы

$$(\mathtt{Q}_l x_l \in^{\varepsilon_l} P)\ldots(\mathtt{Q}_k x_k \in^{\varepsilon_k} P)\varphi'(\bar{x})$$

эквивалентны формулам вида

$$(\exists\,\bar{c} \in P)\big(\psi(\bar{c}, \bar{v}) \wedge \theta(\bar{c}, \bar{u})\big),$$

где формула ψ записана в сигнатуре Σ, а θ — P-формула. Кроме того, ψ содержит только переменные $\bar{c}$ и $\bar{v}$, а θ — только $\bar{c}$ и $\bar{u}$.

Базис индукции — бескванторная формула $\varphi'(\bar{u}, \bar{v})$. Для каждого символа $R_j \in \Sigma$, который входит в указанную формулу, согласно условию I-сводимости выполняется формула

$$(\forall\,\bar{u} \in P)\big(R_j(\bar{u}, \bar{v}) \leftrightarrow \chi_j(\bar{c}_j, \bar{u})\big)$$

для некоторых $\bar{c}_j \in I$ и порядковой формулы χ_j. Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi'(\bar{u}, \bar{v}) \equiv (\exists\,\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m \in P)&\\ \bigg(\bigg(\bigwedge_j (\forall\,\bar{w} \in P)\big(R_j(\bar{w}, \bar{v}) \leftrightarrow \chi_j(\bar{c}_j, \bar{w})\big)\bigg) &\wedge \varphi''(\bar{u}, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m)\bigg),\end{aligned}$$

где формула φ'' получена из φ' заменой всех формул $R_j(\bar{u}, \bar{v})$ на $\chi_j(\bar{c}_j, \bar{u})$.

Теперь докажем, что отрицание формулы вида

$$(\exists\,\bar c\in P)\big(\psi(\bar c,\bar v)\wedge\theta(\bar c,\bar u)\big)$$

эквивалентно формуле такого же вида:

$$\neg\,(\exists\,\bar c\in P)\big(\psi(\bar c,\bar v)\wedge\theta(\bar c,\bar u)\big)\equiv(\forall\,\bar c\in P)\big(\neg\,\psi(\bar c,\bar v)\vee\neg\,\theta(\bar c,\bar u)\big).$$

Согласно свойству тотальной I-сводимости существуют $\bar d\in I$ и порядковая формула χ, такие что

$$(\forall\,\bar w\in P)\big(\neg\,\psi(\bar w,\bar v)\leftrightarrow\chi(\bar d,\bar w)\big).$$

Следовательно,

$$(\forall\,\bar c\in P)\big(\neg\,\psi(\bar c,\bar v)\vee\neg\,\theta(\bar c,\bar u)\big)\equiv$$
$$\equiv(\exists\,\bar d\in P)\Big(\Big((\forall\,\bar w\in P)\big(\neg\,\psi(\bar c,\bar v)\leftrightarrow\chi(\bar d,\bar w)\big)\Big)\ \wedge\ (\forall\bar c\in P)\big(\chi(\bar d,\bar c)\vee\neg\,\theta(\bar c,\bar u)\big)\Big),$$

что и требовалось.

Теперь при добавлении новых кванторов мы можем считать, что они перестановочны с первой группой кванторов. Следовательно, кванторы по P относятся только к формулам θ, так как ψ не содержит $\bar u$, а кванторы по дополнению P — только к ψ, так как θ не содержит $\bar v$.

Следовательно, запрос φ эквивалентен в состояниях над I запросу вида

$$(\exists\bar c\in P)\big(\psi(\bar c)\wedge\theta(\bar c)\big).\qquad\square$$

Следствие 2. *В I-сводимой системе $\mathfrak A$ всякий расширенный запрос эквивалентен в области I запросу вида*

$$(\exists\,\bar c\in P)\big(\psi(\bar c)\wedge\theta(\bar c)\big).$$

Доказательство. Как известно, если система $\mathfrak A$ является I-сводимой, то существуют система $(\mathfrak B,J)$ — элементарное расширение $(\mathfrak A,I)$ — и плотно упорядоченное множество $J'\subseteq J$, такие что система $\mathfrak B$ является тотально J'-сводимой (см. [3]). Следовательно, в $(\mathfrak B,J')$ любой запрос эквивалентен в J' некоторому запросу вида

$$(\exists\,\bar c\in P)\big(\psi(\bar c)\wedge\theta(\bar c)\big),$$

где θ содержит лишь P-ограниченные кванторы. Но так как I имеет тот же тип, что и J', и тоже является плотно упорядоченным, то запрос

$$(\exists\,\bar c\in P)\big(\psi(\bar c)\wedge\theta(\bar c)\big)$$

будет истинен на состоянии $\mathfrak C_1$ в J' в системе $\mathfrak B$ тогда и только тогда, когда он будет истинен на изоморфном ему состоянии $\mathfrak C_2$ в I в системе $\mathfrak A$. $\square$

Следствие 3. *Если система $\mathfrak A$ является эффективно I-сводимой, то по всякому расширенному запросу можно эффективно построить эквивалентный ему в области I запрос вида*

$$(\exists\,\bar c\in P)\big(\psi(\bar c)\wedge\theta(\bar c)\big).$$

Доказательство. Если система $\mathfrak{A}$ является эффективно I-сводимой, то и тотальное J'-сведение из предыдущего следствия осуществляется эффективно (см. [3]), т. е. порядковая формула χ для любой формулы находится эффективно, следовательно, и всё построение эффективно. $\square$

Теорема 1. *Пусть система $\mathfrak{A}$ эффективно I-сводима и тип последовательности I рекурсивен. Тогда по всякому локально генерическому запросу φ в сигнатуре $\Sigma \cup \Omega$ эффективно строится эквивалентный ему активный запрос φ' в сигнатуре Ω.*

Доказательство. Так как запрос локально генерический, то, передвигая активную область состояния в I, мы не меняем истинности запроса.

Согласно следствию 3 в I по запросу φ эффективно строится запрос вида

$$(\exists\, \bar{c} \in P)\big(\psi(\bar{c}) \wedge \theta(\bar{c})\big),$$

эквивалентный φ относительно состояний в I. Так как тип I рекурсивен, то формула $\psi(\bar{c})$ для $\bar{c} \in I$ эквивалентна некоторой порядковой формуле χ, причём χ по ψ строится эффективно. Следовательно,

$$(\exists\, \bar{c} \in P)\big(\psi(\bar{c}) \wedge \theta(\bar{c})\big) \equiv (\exists\, \bar{c} \in P)\big(\chi(\bar{c}) \wedge \theta(\bar{c})\big).$$

Итак, мы построили P-запрос, эквивалентный исходному для состояний над I. Согласно лемме 1 и следствию 1 он может быть эффективно перетранслирован в активный ограниченный запрос. Но активный ограниченный запрос сохраняет свою истинность (или ложность) при произвольных передвижениях активной области, как и исходный запрос. Значит, они эквивалентны для любых состояний. $\square$

4. Приложения к классическим теориям

Лемма 3. *Если теория T сигнатуры Σ полна, разрешима и не имеет независимой формулы, то любая её модель $\mathfrak{A}$ с неразличимым множеством I является эффективно I-сводимой.*

Доказательство. Как известно (см. [4]), в условиях леммы модель $\mathfrak{A}$ является I-сводимой. Нам нужно доказать, что для любой формулы $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры Σ эффективно строится порядковая формула $\chi(\bar{c}, \bar{y})$, для которой

$$(\forall\, \bar{x})(\exists\, \bar{c} \in P)(\forall\, \bar{y} \in P)\big(\psi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \chi(\bar{c}, \bar{y})\big).$$

Рассмотрим произвольную формулу $\psi(\bar{x}, \bar{y})$. Будем последовательно проверять истинность последовательности формул

$$(\exists\, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m) \bigwedge_{K \subseteq \{1,\ldots,m\}} (\exists\, \bar{a}) \bigwedge_{i=1}^{m} (\psi(\bar{a}, \bar{b}_i) \leftrightarrow i \in K) \tag{2}$$

для $m = 1, 2, 3, \ldots$. Так как в теории независимой формулы нет, то для некоторого m формула (2) окажется ложной. Таким образом, максимальная длина согласованной (когерентной) последовательности (см. [4]) может быть найдена эффективно. Следовательно, и формула χ может быть построена эффективно. □

Теорема 2. *Пусть в теории T нет независимой формулы. Пусть T имеет модель $\mathfrak{A}$, в которой существует неразличимая последовательность I, имеющая рекурсивный тип. Тогда по всякому локально генерическому запросу φ в сигнатуре $\Sigma \cup \Omega$ эффективно строится эквивалентный ему запрос φ' в сигнатуре Ω.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3 и теоремы 1. □

Для применения полученных результатов к конкретным теориям нам будет полезно следующее определение.

Определение 7. Последовательность I без последнего элемента назовём *почти неразличимой* в алгебраической системе $\mathfrak{A}$, если для каждой формулы $\psi(\bar{x})$ существует такое $M_\psi \in I$, что для любых двух одинаково упорядоченных наборов $\bar{x}_1 \in I$ и $\bar{x}_2 \in I$, все элементы которых больше M_ψ, выполнено

$$\mathfrak{A} \models \psi(\bar{x}_1) \leftrightarrow \psi(\bar{x}_2).$$

Другими словами, последовательность является почти неразличимой, если каждое условие неразличимости выполняется для всех достаточно больших её элементов. Множество формул, выполняющихся на всех возрастающих последовательностях достаточно больших элементов, назовём типом этой последовательности.

Лемма 4. *Если I — почти неразличимая последовательность в $\mathfrak{A}$, то существуют модель $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ и неразличимая в $\mathfrak{B}$ последовательность J, которая имеет тот же тип, что и I.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы компактности. □

Теорема 3. *Пусть T — полная разрешимая теория без независимой формулы. Пусть в некоторой модели $\mathfrak{A}$ теории T существует почти неразличимая последовательность I, тип которой рекурсивен. Тогда по каждому локально генерическому расширенному запросу может быть эффективно построен эквивалентный ограниченный запрос.*

Доказательство. Утверждение следует из предыдущей леммы и теоремы 2. □

Для удобства мы будем называть множество I, удовлетворяющее условиям теоремы, трансляционным множеством.

4.1. Арифметика Пресбургера

Как известно (см., например, [1]), арифметика Пресбургера допускает элиминацию кванторов в сигнатуре

$$\Sigma = \{+, <, Q_2, Q_3, \ldots\},$$

где Q_i — предикат делимости на i. Будем рассматривать стандартную модель арифметики
$$\mathfrak{N} = (\omega, +, <, Q_2, Q_3, \ldots).$$
Рассмотрим множество факториалов натуральных чисел:
$$I = \{n!\colon n \in \omega\}.$$

Лемма 5. *I — трансляционное множество в $\mathfrak{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу $\psi(\bar{x})$. Мы можем считать, что $\psi(\bar{x})$ составлена из линейных неравенств с целыми коэффициентами предикатов делимости с помощью булевых связок. Пусть $M_\psi = L!$, где L — сумма всех модулей коэффициентов и индексов имён предикатов Q_i из формулы ψ. Тогда, очевидно, для любых $\bar{y} \in I$, бо́льших M_ψ, выполняется $Q_i(y_j)$ и
$$\alpha y_n > \sum_{j<n} \beta_j y_j,$$
если $\bar{y}$ упорядочены по возрастанию. □

Теорема 4. *Существует алгоритм, который по любому локально генерическому в арифметике Пресбургера расширенному запросу строит эквивалентный ему активный ограниченный запрос.*

Доказательство. Независимой формулы в арифметике Пресбургера нет из-за её квази-о-минимальности. Множество факториалов I является трансляционным. Следовательно, существование алгоритма следует из теоремы 3. □

4.2. Теория действительных чисел

В теории действительных чисел любая формула эквивалентна булевой комбинации алгебраических неравенств с целыми коэффициентами (см., например, [1]). Пусть
$$I = \{2^{n!}\colon n \in \omega\}.$$

Лемма 6. *I — трансляционное множество в стандартной модели*
$$(\mathbb{R}, +, \times, <).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную формулу $\psi(\bar{y})$. Мы можем считать, что $\psi(\bar{y})$ составлена из алгебраических неравенств с помощью булевых связок и что все коэффициенты в неравенствах (включая свободные члены) по модулю не меньше единицы. Пусть L — сумма всех модулей коэффициентов и показателей степеней переменных из ψ. Пусть целое число N больше $L+2\log_2 L$ и $M_\psi = 2^{(N+1)!}$. Пусть набор переменных $\bar{y} \in I$ упорядочен по возрастанию и $y_n = 2^{m!}$ $(m \geqslant N+1)$.

Далее мы будем рассматривать только многочлены, которые получаются из многочленов, составляющих ψ, отбрасыванием слагаемых и делением на переменные.

Индукцией по количеству переменных в нетривиальном многочлене докажем, что его значение по модулю не меньше 1. Для констант это следует из нашего допущения.

Рассмотрим многочлен с n переменными

$$\sum_{j=0}^{k} p_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) y_n^j.$$

Пусть $p_k(y_1, \ldots, y_{n-1}) > 0$. Тогда по предположению индукции

$$p_k(y_1, \ldots, y_{n-1}) \geqslant 1$$

и

$$\sum_{j=0}^{k} p_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) y_n^j \geqslant y_n^k - \sum_{j=0}^{k-1} |p_j(y_1, \ldots, y_{n-1})| y_n^j. \qquad (3)$$

Далее получаем, что $y_n^j \leqslant 2^{m! \cdot (k-1)}$, $k \leqslant L$, и

$$|p_j(y_1, \ldots, y_{n-1})| \leqslant L y_{n-1}^L \leqslant L 2^{(m-1)! \cdot L}.$$

Подставляя эти оценки в (3) получим

$$2^{m! \cdot k} - L \cdot L 2^{(m-1)! \cdot L} \cdot 2^{m! \cdot (k-1)} \geqslant$$
$$\geqslant 2^{m! \cdot (k-1)} (2^{m!} - L^2 \cdot 2^{(m-1)! \cdot L}) \geqslant 2^{m! \cdot (k-1)} (2^{m!} - 2^{(m-1)! \cdot N}) \geqslant 1.$$

Точно так же если $p_k(y_1, \ldots, y_{n-1}) < 0$, то $p_k(y_1, \ldots, y_{n-1}) \leqslant -1$ и

$$\sum_{j=0}^{k} p_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) y_n^j \leqslant -1.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{k} p_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) y_n^j > 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigvee_{j=0}^{k} \Bigl(p_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) > 0 \wedge \bigwedge_{i=j+1}^{k} p_i(y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0 \Bigr). \quad \square$$

Теорема 5. *Существует алгоритм, который по любому локально генерическому в теории действительных чисел расширенному запросу строит эквивалентный ему активный ограниченный запрос.*

Доказательство. Теория действительных чисел o-минимальна, следовательно, независимой формулы нет. Существование алгоритма следует из предыдущей леммы и теоремы 3. $\square$

Литература

[1] Верещагин Н. К., Шень А. Языки и исчисления. — М.: МЦНМО, 2000.

[2] Дудаков С. М. Трансляционный результат для расширений арифметики Пресбургера одноместной функцией, согласованной со сложением // Мат. заметки. — 2004. — Т. 76, № 3. — С. 362—371.

[3] Дудаков С. М. Трансляционная теорема для теорий I-сводимых алгебраических систем // Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — Т. 68, № 5. — С. 67—90.

[4] Baldwin J., Benedikt M. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352, no. 11. — P. 4937—4969.

[5] Belegradek O. V., Stolboushkin A. P., Taitslin M. A. Extended order-generic queries // Ann. Pure Appl. Logic. — 1999. — Vol. 97. — P. 85—125.

[6] Benedict M., Dong G., Libkin L., Wong L. Relational expressive power of constraint query languages // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems. — Montreal, 1996. — P. 5—16.

[7] Chang C. C., Keisler H. J. Model Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1990.

[8] Taitslin M. A. A general condition for collapse results // Ann. Pure Appl. Logic. — 2002. — Vol. 113. — P. 323—330.