

Фильтрация монотонных выпуклых сигналов, искажённых шумом, и оценка положения особых точек*

Д. С. ДЁМИН

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: dmitryy.demin@gmail.com*

А. И. ЧУЛИЧКОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: achulichkov@gmail.com*

УДК 519.21

Ключевые слова: фильтрация сигнала, анализ данных, оптимальное оценивание, проверка статистических гипотез, морфологический анализ.

Аннотация

На основе построения наилучшей в среднеквадратичном аппроксимации заданного фрагмента неизвестного сигнала функцией заданного класса выпуклости и монотонности решена задача фильтрации сигнала и получены оценки положения его экстремумов и точек перегиба. Оценки минимизируют максимальную погрешность определения положения точек при гарантированной надёжности оценивания.

Abstract

D. S. Demin, A. I. Chulichkov, Filtering of monotonic convex noise-distorted signals and estimates of positions of special points, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 6, pp. 15–31.

The problem of an unknown signal filtering has been solved on the basis of mean-square approximation of the given signal segment with known monotonicity and convexity. Also the estimates of the positions of special points (local extremum and inflection points) are given. The estimates given minimize the maximum estimate error with the guaranteed reliability level.

1. Введение

Часто на практике не удаётся априори указать параметрический класс функций, описывающих экспериментальные данные, можно лишь предполагать некоторые их качественные свойства. Если результаты измерений описываются скалярной функцией одного переменного, то такими качественными свойствами

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 08-07-00120-а.

может являться информация об известном типе монотонности и/или заданном типе выпуклости. Такие задачи возникают, например, при исследовании процессов релаксации излучения: зависимость от времени интенсивности света, испускаемого веществом после его освещения внешним источником, представляет собой монотонно убывающую выпуклую вниз функцию, она несёт информацию о составе и свойствах исследуемого вещества. Так как экспериментальные данные искажены погрешностью, возникает проблема фильтрации данных.

Стандартный метод фильтрации состоит в аппроксимации экспериментально полученных зависимостей линейной комбинацией известных функций с неизвестными параметрами, как правило экспонентами, и подбора значений параметров, например методом наименьших квадратов. Недостатки этого подхода состоят в сложности учёта априорных ограничений на возможные значения параметров, в неустойчивости процедуры минимизации в случае, когда наблюдается смесь излучений от веществ с близкими параметрами релаксации.

В первой части настоящей работы (раздел 2) предлагается метод фильтрации, основанный на наилучшем приближении экспериментальных данных монотонными выпуклыми зависимостями. Экспериментальные данные рассматриваются как вектор конечномерного евклидова пространства, задача фильтрации ставится как задача поиска проекции этого вектора на множество сигналов, являющихся дискретным аналогом монотонных выпуклых функций, получен алгоритм её точного решения за конечное число шагов.

В ряде случаев важную информацию об изучаемом процессе несут точки смены характерного качественного поведения функциональной зависимости. К ним, в частности, относятся точки локальных экстремумов и точки перегиба. Задача оценивания положения максимума унимодальной на отрезке функции решена в [3]. Во второй части настоящей работы (раздел 3) использован морфологический критерий проверки статистических гипотез, отличный от [3]; на его основе предложен метод поиска точек экстремума и перегиба.

2. Задача фильтрации

2.1. Математическая модель регистрации сигнала

Будем считать, что измерения некоторой величины проводились через равные промежутки времени, в результате чего был получен одномерный массив значений данной величины на равномерной сетке. Результат измерения будем представлять как конечномерный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ евклидова пространства \mathbb{R}^n , такой что его m -я координата ξ_m , $m = 1, \dots, n$, есть значение измеренной величины в момент времени $t_0 + \delta m$. Пусть априори известно, что данный сигнал должен описываться зависимостью с заданным классом выпуклости и монотонности, но из-за шума, сопровождающего процесс регистрации, полученный сигнал не принадлежит данному классу. Без ограничения общности будем считать, что полезная составляющая сигнала является выпуклой (вниз) и

монотонно невозрастающей. Предположим, что сигнал ξ представим в виде

$$\xi = \mathbf{f} + \nu, \quad \nu \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I), \quad (1)$$

где ν — аддитивный некоррелированный нормально распределённый вектор с нулевым математическим ожиданием, а полезная часть сигнала ξ , сигнал $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, принадлежит множеству $V^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклому замкнутому конусу, заданному условием

$$V^{(n)} = \left\{ \mathbf{g} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} g_i \geq g_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1, \\ 2g_j \leq g_{j-1} + g_{j+1}, & j = 2, \dots, n-1 \end{array} \right\}, \quad (2)$$

который далее в соответствии с [6] будем называть формой невозрастающих выпуклых вниз сигналов.

2.2. Формальная постановка задачи

Задачу фильтрации поставим как задачу наилучшего в \mathbb{R}^n приближения вектора ξ элементами множества $V^{(n)}$, т. е. поиска проекции $P_{V^{(n)}}\xi$ вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ на форму $V^{(n)}$:

$$\|P_{V^{(n)}}\xi - \xi\|^2 = \inf_{\mathbf{g} \in V^{(n)}} \|\mathbf{g} - \xi\|^2. \quad (3)$$

Данная задача является задачей выпуклого программирования и всегда разрешима единственным образом вследствие существования и единственности проекции вектора на выпуклое замкнутое множество евклидова пространства [1] (минимизируется выпуклая функция $\Xi(\mathbf{g}) = \|\mathbf{g} - \xi\|^2$ на выпуклом замкнутом множестве $V^{(n)}$).

Задачи выпуклого программирования можно решать методом поиска седловой точки функции Лагранжа [1] или путём поиска безусловного экстремума взвешенной суммы оптимизируемой выпуклой функции и функции, описывающей отклонение аргумента от заданных условий минимизации [11]. Метод поиска седловой точки функции Лагранжа осложняется при большой размерности аргумента и, как следствие, большом количестве проверяемых условий. Метод же поиска безусловного экстремума взвешенной суммы оптимизируемой функции и невязки условий, будучи методом численным, может не дать глобального минимума или же не сойтись к точке, где выполняются условия оптимизации. Далее в работе предлагается метод точного построения проекции, основанный на принципе динамического программирования [1]. Перед описанием непосредственно метода докажем вспомогательное утверждение.

2.3. Необходимое и достаточное условие для проекции

Теорема 1. Пусть в евклидовых пространствах \mathbb{R}^{m+k} , \mathbb{R}^m , \mathbb{R}^k , $\mathbb{R}^{m+k} = \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^k$, элементами которых являются последовательности чисел (координат) $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{m+k}) \equiv (t_1, \dots, t_m, s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^{m+k}$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$,

$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k$, заданы конусы

$$\begin{aligned} V_1^{(m+k)} &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m+k} : \begin{array}{ll} z_i \geq z_{i+1}, & i = 1, \dots, m+k-1, \\ 2z_j \leq z_{j-1} + z_{j+1}, & j = 2, \dots, m+k-1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^{m+k}, \\ V_1^{(m)} &= \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m : \begin{array}{ll} h_i \geq h_{i+1}, & i = 1, \dots, m-1, \\ 2h_j \leq h_{j-1} + h_{j+1}, & j = 2, \dots, m-1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^m, \\ V_{m+1}^{(k)} &= \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^k : \begin{array}{ll} h_i \geq h_{i+1}, & i = 1, \dots, k-1, \\ 2h_j \leq h_{j-1} + h_{j+1}, & j = 2, \dots, k-1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^k, \end{aligned} \quad (4)$$

и операторы проецирования $P_{V_1^{(m+k)}}$, $P_{V_1^{(m)}}$, $P_{V_{m+1}^{(k)}}$ на эти конусы в \mathbb{R}^{m+k} , \mathbb{R}^m , \mathbb{R}^k соответственно. Тогда для того чтобы для любого вектора $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{m+k}$ выполнялось неравенство

$$P_{V_1^{(m+k)}} \mathbf{g} = (P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t}, P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s}), \quad \mathbf{g} = (\mathbf{t}, \mathbf{s}), \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы $(m-1)$ -я и m -я координаты проекции $P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t}$ и первые две координаты проекции $P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s}$ были связаны соотношениями

$$\begin{cases} (P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t})_m \geq (P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s})_1, \\ 2(P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t})_m \leq (P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t})_{m-1} + (P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s})_1, \\ 2(P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s})_1 \leq (P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t})_m + (P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s})_2. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Для проекторов $P_{V_1^{(m)}}$ и $P_{V_{m+1}^{(k)}}$ запишем

$$\begin{aligned} \|P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t} - \mathbf{t}\|^2 + \|P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s} - \mathbf{s}\|^2 &= \inf_{\mathbf{x} \in V_1^{(m)}} \sum_{i=1}^m (t_i - x_i)^2 + \inf_{\mathbf{y} \in V_{m+1}^{(k)}} \sum_{i=1}^k (s_i - y_i)^2 = \\ &= \inf_{\substack{\mathbf{x} \in V_1^{(m)}, \mathbf{y} \in V_{m+1}^{(k)}, \\ x_m \geq y_1, \\ 2x_m \leq x_{m-1} + y_1, \\ 2y_1 \leq x_m + y_2}} \left(\sum_{i=1}^m (t_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^k (s_i - y_i)^2 \right) = \\ &= \inf_{\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_1^{(m+k)}} \sum_{i=1}^{m+k} (g_i - z_i)^2 = \|P_{V_1^{(m+k)}} \mathbf{g} - \mathbf{g}\|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как неравенства

$$x_m \geq y_1, \quad 2x_m \leq x_{m-1} + y_1, \quad 2y_1 \leq x_m + y_2$$

выполнены в силу (6), их добавление в условия, при которых минимизируется функционал в (7), не влияет на решение этой задачи на минимум. Следовательно, в силу единственности проекции на выпуклое замкнутое множество, выполнено и равенство (5).

Пусть неравенства (6) не выполняются. Тогда

$$\begin{aligned}
 \|P_{V_1^{(m+k)}} \mathbf{g} - \mathbf{g}\|^2 &= \inf_{\mathbf{z}=(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_1^{(m+k)}} \sum_{i=1}^{m+k} (g_i - z_i)^2 = \\
 &= \inf_{\substack{\mathbf{x} \in V_1^{(m)}, \mathbf{y} \in V_{m+1}^{(k)}, \\ x_m \geq y_1, \\ 2x_m \leq x_{m-1} + y_1, \\ 2y_1 \leq x_m + y_2}} \left(\sum_{i=1}^m (t_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^k (s_i - y_i)^2 \right) \geq \\
 &\geq \inf_{\mathbf{x} \in V_1^{(m)}, \mathbf{y} \in V_{m+1}^{(k)}} \left(\sum_{i=1}^m (t_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^k (s_i - y_i)^2 \right) = \\
 &= \|P_{V_1^{(m)}} \mathbf{t} - \mathbf{t}\|^2 + \|P_{V_{m+1}^{(k)}} \mathbf{s} - \mathbf{s}\|^2,
 \end{aligned}$$

так как точная нижняя грань в правой части неравенства вычисляется по более широкому множеству. Следовательно, не выполнено и (5). \square

2.4. Построение метода вычисления проекции

Теорема 1 позволяет предложить следующий алгоритм решения задачи (3), основанный на последовательном вычислении проекции $\mathbf{f}^{(m+1)} = P_{V_1^{(m+1)}} \boldsymbol{\xi}^{(m+1)}$ вектора $\boldsymbol{\xi}^{(m+1)} = (\xi_1, \dots, \xi_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ на конус

$$V_1^{(m+1)} = \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{m+1} : \begin{array}{ll} h_i \geq h_{i+1}, & i = 1, \dots, m, \\ 2h_j \leq h_{j-1} + h_{j+1}, & j = 2, \dots, m \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

при известной проекции $\boldsymbol{\xi}^{(m)} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ на конус $V_1^{(m)} \subset \mathbb{R}^m$ (4), вычисленной на предыдущем шаге алгоритма.

На первом шаге алгоритма спроецируем $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (\xi_1, \xi_2)$ на форму

$$V_1^{(2)} = \{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2, h_1 \geq h_2 \} \subset \mathbb{R}^2$$

по алгоритму проецирования на монотонно невозрастающую функцию [3, 4]: если $\xi_1 \geq \xi_2$, примем $f_i = \xi_i$, $i = 1, 2$, иначе $f_i = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$. Пусть на $(m-1)$ -м шаге, где $m \geq 3$, вычислена проекция $\mathbf{f}^{(m)} = P_{V_1^{(m)}} \boldsymbol{\xi}^{(m)}$ вектора $\boldsymbol{\xi}^{(m)}$ на конус $V_1^{(m)}$. Вычислим проекцию $\mathbf{f}^{(m+1)} = P_{V_1^{(m+1)}} \boldsymbol{\xi}^{(m+1)}$ вектора $\boldsymbol{\xi}^{(m+1)}$ на конус $V_1^{(m+1)}$.

1. Если справедливы неравенства

$$f_m^{(m)} \geq \xi_{m+1} \geq 2f_i^{(m)} - f_{i-1}^{(m)}, \quad (8)$$

то вектор с координатами $(f_1^{(m)}, \dots, f_m^{(m)}, \xi_{m+1})$ является искомой проекцией:

$$\mathbf{f}^{(m+1)} = P_{V_1^{(m+1)}} \boldsymbol{\xi}^{(m+1)} = (f_1^{(m)}, \dots, f_m^{(m)}, \xi_{m+1}). \quad (9)$$

2. Если левое неравенство (8) не выполнено ($f_m^{(m)} < \xi_{m+1}$), используем алгоритм проецирования на монотонно невозрастающую функцию [3, 4]: будем уменьшать j на 1, пока не будет выполнено

$$f_{m-j}^{(m)} \geq \frac{1}{j-1} \sum_{k=1}^j \xi_{m-k+1}$$

или $m-j < 0$. После этого примем

$$f_{m-j+1}^{(m+1)} \cdots f_{m+1}^{(m+1)} = \frac{1}{j-1} \sum_{k=1}^j \xi_{m-k+1}.$$

3. Если правое неравенство (8) не выполнено, т. е. $\xi_{m+1} < 2f_m^{(m)} - f_{m-1}^{(m)}$, что равносильно тому, что $f_m^{(m)} - \xi_{m+1} > f_{m-1}^{(m)} - f_m^{(m)}$, воспользуемся методом наименьших квадратов для аппроксимации набора значений на равномерной сетке $\boldsymbol{\eta}_{m-1}^{(3)} = (f_{m-1}^{(m)}, f_m^{(m)}, \xi_{m+1})$ прямой вида $f_i^{(3)} = a_{(1)} * i + b_{(1)}$, $i = 1, \dots, 3$. Положим

$$\boldsymbol{f}^{(m+1)} = \left(f_1^{(m)}, \dots, f_{m-2}^{(m)}, f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)} \right).$$

4. Если не найдётся такого $k = 2, \dots, m-1$, что

$$f_k^{(m+1)} - f_{k+1}^{(m+1)} > f_{k-1}^{(m+1)} - f_k^{(m+1)}, \quad (10)$$

проекция $\boldsymbol{f}^{(m+1)} = P_{V_1^{(m+1)}} \boldsymbol{\xi}^{(m+1)}$ найдена. Если же такое k найдётся, аппроксимируем с помощью метода наименьших квадратов набор $\boldsymbol{\eta}_{k-1}^{(m-k+3)} = (f_{k-1}^{(m)}, f_m^{(m)}, \xi_{m+1})$. Получим прямую вида $f_i^{(m-k+3)} = a_{(m-k+1)} * i + b_{(m-k+1)}$, $i = 1, \dots, m-k+3$. Положим

$$\boldsymbol{f}^{(m+1)} = \left(f_1^{(m)}, \dots, f_{k-2}^{(m)}, f_1^{(m-k+3)}, \dots, f_{m-k+3}^{(m-k+3)} \right)$$

и перейдём отсюда опять к пункту 4.

В результате будет вычислена проекция $\boldsymbol{f}^{(m+1)} = P_{V_1^{(m+1)}} \boldsymbol{\xi}^{(m+1)}$ вектора $\boldsymbol{\xi}^{(m+1)}$ на конус $V_1^{(m+1)}$.

2.5. Обоснование алгоритма вычисления проекции

Доказательство пункта 2 известно (см. [3]). Пункт 4 следует из теоремы 1 и того факта, что если для любых фиксированных чисел m и p , $m = 2, \dots, n-1$, $p = 2, \dots, m-1$, и для любого $q = 2, \dots, p$ найдётся такое $k = m-p$ из пункта 4, что выполняется неравенство (10), то проекция вектора с координатами $(\xi_{m-q-1}, \dots, \xi_{m+1})$ на конус $V_{m-q-1}^{(q+2)}$ совпадает с проекцией на его ребро

$$\tilde{V}_1^{(q)} = \{ \boldsymbol{z}: z_{m-q-1} - z_{m-q} = z_{m-q} - z_{m-q+1} = \dots = z_{m+1} - z_m \}, \quad q = 2, \dots, p.$$

Докажем это методом математической индукции. Если для $p = 2$ не выполняется правая часть неравенства (8) и, следовательно, неравенство (10) для $k = m$, то проекцией на конус $V_{m-1}^{(3)}$ вектора $(\xi_{m-1}, \xi_m, \xi_{m+1})$ является вектор $f_i^{(3)} = a_{(1)} * i + b_{(1)}$, $i = 1, \dots, 3$, т. е. проекция вектора $(\xi_{m-1}, \xi_m, \xi_{m+1})$ на ребро $\{\xi_{m-1} - \xi_m = \xi_m - \xi_{m+1}\}$ конуса $V_{m-1}^{(3)}$, так как метод наименьших квадратов в данном случае сводится к решению задачи

$$\inf_{a,b} \sum_{i=1}^3 (\xi_{m-2+i} - a * i - b)^2.$$

Пусть теперь для всех $q = 2, \dots, p$ существует такое $k = m - p$ из пункта 4, что выполняется неравенство (10) и для каждого $q = 2, \dots, p-1$ проекция на конус $V_{m-q-1}^{(q+2)}$ вектора с координатами $(\xi_{m-q-1}, \dots, \xi_{m+1})$ совпадает с проекцией этого вектора на ребро этого конуса $\tilde{V}_1^{(q)}$. Предположим, что при этих условиях проекция вектора с координатами $(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1})$ на конус $V_{m-p-1}^{(p+2)}$ не совпадает с проекцией на его ребро $\tilde{V}_1^{(p)}$. Тогда хотя бы для одной пары координат $(P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_i, (P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_{i+1}$ проекции $P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}), i = 2, \dots, p+2$, выполнено строго хотя бы одно из неравенств

$$\begin{cases} 2(P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_i \leq \\ \leq (P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_{i-1} + (P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_{i+1}, \\ 2(P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_{i+1} \leq \\ \leq (P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_i + (P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}))_{i+2}. \end{cases}$$

Значит, в силу теоремы 1

$$\begin{aligned} P_{V_{m-p-1}^{(p+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_{m+1}) &= \\ &= (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i), P_{V_{i+1}^{(m-i)}}(\xi_{i+1}, \dots, \xi_{m+1})), \end{aligned}$$

причём

$$\begin{aligned} &(P_{V_{i+1}^{(m-i)}}(\xi_{i+1}, \dots, \xi_{m+1}))_1 - (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i))_i \geq \\ &\geq (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i))_i - (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i))_{i-1} \geq \dots \geq \\ &\geq (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i))_{k+1} - (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i))_k \geq \\ &\geq (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i))_k - (P_{V_{m-p-1}^{(i+p-m+2)}}(\xi_{m-p-1}, \dots, \xi_i))_{k-1}, \end{aligned}$$

т. е. не выполняется неравенство (10) для $q = m - i$, что противоречит исходным условиям. Значит, предположение неверно, и координаты искомой проекции определяются с помощью описанного выше алгоритма.

2.6. Вычислительный эксперимент

Приведённый выше алгоритм фильтрации был успешно реализован с использованием пакета MATLAB. На рис. 1 изображён результат фильтрации убывающего выпуклого вниз сигнала, искажённого нормально распределённым шумом.

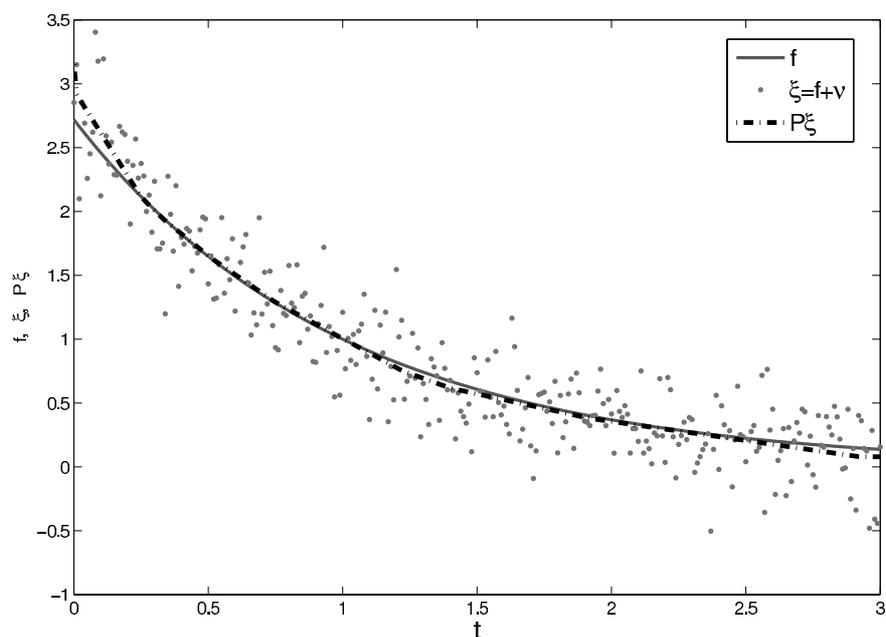


Рис. 1. Пример работы алгоритма фильтрации монотонно невозрастающего выпуклого вниз сигнала

3. Морфологический метод оценивания положения экстремумов и точек перегиба на зашумлённом сигнале

3.1. Постановка задачи

Располагая методами приближения предоставленных сигналов сигналами известного класса выпуклости и монотонности, перейдём теперь к задаче оценивания положения экстремумов и точек перегиба на зашумлённых сигналах. Пусть известно, что на анализируемом отрезке лежит только одна особая точка одного из перечисленных выше типов и математическая модель формирования сигнала даётся формулой (1).

Введём следующие множества-формы: форму

$$V_{\text{inc}}^{(n)} = \{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n : g_i \geq g_{i-1}\}$$

сигнала, принадлежащего классу монотонно неубывающих сигналов, форму

$$V_{\text{dec}}^{(n)} = \{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n : g_i \leq g_{i-1}\}$$

сигнала, принадлежащего классу монотонно невозрастающих сигналов, форму

$$V_{\text{up}}^{(n)} = \{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n : 2g_i \geq g_{i-1} + g_{i+1}\}$$

сигнала, принадлежащего классу невыпуклых вниз сигналов, и форму

$$V_{\text{dn}}^{(n)} = \{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n : 2g_i \leq g_{i-1} + g_{i+1}\}$$

сигнала, принадлежащего классу невыпуклых вверх сигналов. Тогда если в точке i_0 равномерной сетки $i = 1, \dots, n$ полезная составляющая имеет минимум, то

$$\mathbf{f}_1^{(i_0)} = (f_1, \dots, f_{i_0}) \in V_{\text{inc}}^{(i_0)}, \quad \mathbf{f}_{i_0}^{(n-i_0+1)} = (f_{i_0}, \dots, f_n) \in V_{\text{dec}}^{(n-i_0+1)},$$

Если она имеет максимум, то

$$\mathbf{f}_1^{(i_0)} = (f_1, \dots, f_{i_0}) \in V_{\text{dec}}^{(i_0)}, \quad \mathbf{f}_{i_0}^{(n-i_0+1)} = (f_{i_0}, \dots, f_n) \in V_{\text{inc}}^{(n-i_0+1)}.$$

Если она имеет точку перегиба, то

$$\mathbf{f}_1^{(i_0)} = (f_1, \dots, f_{i_0}) \in V_{\text{up}}^{(i_0)}, \quad \mathbf{f}_{i_0}^{(n-i_0+1)} = (f_{i_0}, \dots, f_n) \in V_{\text{dn}}^{(n-i_0+1)}$$

или же

$$\mathbf{f}_1^{(i_0)} = (f_1, \dots, f_{i_0}) \in V_{\text{dn}}^{(i_0)}, \quad \mathbf{f}_{i_0}^{(n-i_0+1)} = (f_{i_0}, \dots, f_n) \in V_{\text{up}}^{(n-i_0+1)}.$$

Таким образом, формой полезной составляющей будет являться множество сигналов, «начало» которых принадлежит одному из классов $\hat{V}^{(i_0)}$, а «окончание» — другому классу $\check{V}^{(n-i_0+1)}$, а параметром формы, подлежащим оцениванию, будет являться i_0 :

$$V_{(i_0)}^n = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{f}_1^{(i_0)} \in \hat{V}^{(i_0)}, \mathbf{f}_{i_0}^{(n-i_0+1)} \in \check{V}^{(n-i_0+1)}\}. \quad (11)$$

Задача состоит в том, что требуется по предоставленному сигналу ξ оценить параметр i_0 .

3.2. Задача морфологического оценивания параметра по зашумлённому сигналу

Предположим теперь, что форма сигнала зависит от некоторого набора параметров $\lambda \in \Lambda$, $V_f^\lambda = V_f(\lambda)$, и требуется по измеренному сигналу

$$\xi = \mathbf{g} + \nu, \quad \mathbf{g} \in V_f^{\lambda_0}, \quad \nu \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I) \quad (12)$$

с заданной вероятностью p оценить параметры λ_0 , а также погрешность данной оценки $\Delta\lambda_0$. Естественно считать, что чем больше квадрат расстояния

$$\|\xi - P_f^\lambda \xi\|^2 \quad (13)$$

между измеренным сигналом и его проекцией на форму V_f^λ , тем меньше сходство по форме между сигналами ξ и f^λ . Однако распределение статистики $\|\xi - P_f^\lambda \xi\|^2$ зависит от неизвестной дисперсии σ^2 шума ν и поэтому не может служить количественной характеристикой схождения по форме сигнала ξ с f^λ . Для этой цели лучше подходит статистика [5, 6]

$$\tau^\lambda(\xi) = \frac{\|\xi - P_f^\lambda \xi\|^2}{\|P_0 \xi - P_f^\lambda \xi\|^2}. \quad (14)$$

Здесь вектор $P_0 \xi = (c_0, c_0, \dots, c_0)^T$ — это проекция на множество $V_0 = \{h: h_i = h(t_i) = c_0\}$ — решение задачи наилучшего приближения вектора ξ вектором, все координаты которого одинаковы и равны одной и той же константе $(P_0 \xi)_i = c_0$:

$$\|\xi - P_0 \xi\|^2 = \sum_{i=1}^n (\xi_i - c_0)^2 = \inf_c \sum_{i=1}^n (\xi_i - c)^2. \quad (15)$$

Решая эту задачу, получим значение константы

$$c_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Поясним, из каких соображений выбрана мера схождения сигналов по форме в виде (14). Пусть, например, предъявляется сигнал ξ , равный константе, $\xi_i = c$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $P_f^\lambda \xi = \xi$, так как такой сигнал будет принадлежать V_f^λ . В результате сигналы, «близкие к константе», будут сходны по форме с любыми сигналами, если пользоваться мерой схождения (13). Однако такое решение вряд ли устроит исследователя, если на практике его интересуют особенности формы, заключённые в положениях локальных экстремумов и интервалах строгой монотонности.

Чтобы получить решающее правило, учитывающее эту особенность формы сигнала, определим, насколько отличная от константы «часть» сигнала, сравнимая по форме с f^λ , отличается от шумовой составляющей. Если математическое ожидание сигнала ξ сравнимо по форме с f^λ , то величину шума характеризует значение числителя дроби (14), в то время как величину отличной от константы «части» сигнала, сравнимой по форме с f^λ , оценивает значение знаменателя дроби (14). Если при этом знаменатель имеет тот же порядок величины, что и числитель, или много меньше его, то отличие «части» сигнала ξ , сравнимой по форме с f^λ , от константы несущественно по сравнению с шумом. В этом случае естественно считать, что сигнал ξ не имеет существенного схождения по форме с сигналом f^λ . Иными словами, значение дроби (14) тем больше, чем больше сигнал ξ похож по форме на константу по сравнению с близостью ξ к V_f .

Распределение статистики (14) в меньшей степени, чем (13), зависит от неизвестных параметров распределения случайного вектора ξ , в частности, не изменяется при умножении ξ на любое число, отличное от нуля, и при сложении ξ с любым вектором $\mathbf{h} \in V_0$, для которого $\mathbf{h}_i \in V_0, i = 1, \dots, n$ [5, 6].

Значения статистик (13) и (14) могут быть использованы для принятия решения о значении параметра λ , при котором сигнал наиболее близок к \mathbf{f}^λ по форме.

Более подробный анализ формы сигналов может быть проведён на основе методов теории проверки статистических гипотез. Как показано в [10], проверка сходства по форме сигнала ξ с \mathbf{f}^λ сводится к задаче проверки статистической гипотезы о параметрах нормального распределения вектора ξ . Если гипотеза

$$H(\lambda): \quad \xi \sim N(\mathbf{q}, \sigma^2 I), \quad \mathbf{q} \in V_f^\lambda \setminus V_0, \quad (16)$$

справедлива, математическое ожидание вектора ξ сравнимо по форме с \mathbf{f}^λ , но отлично от константы, при альтернативе

$$K(\lambda): \quad \xi \sim N(\mathbf{q}, \sigma^2 I), \quad \mathbf{q} \in V_0, \quad (17)$$

математическое ожидание вектора ξ равно константе (т. е. вектору с одинаковыми координатами). В этой ситуации всё, что отличает сигнал ξ по форме от \mathbf{f}^λ , считается шумом.

Морфологический критерий проверки гипотезы (16) при альтернативе (17) определяется критическим множеством [6]

$$S^\lambda = \{z \in \mathbb{R}^n: \tau^\lambda(z) \geq \delta\}, \quad (18)$$

состоящим из тех точек выборочного пространства, в которых значение дроби (14) достаточно велико, т. е. шумовая составляющая не позволяет отличить сигнал $P_f^\lambda \xi$ от константы. Если $\xi \notin S^\lambda$, то гипотеза (16) принимается, и можно считать, что сигнал ξ достаточно близок по форме к сигналу \mathbf{f} .

Степень согласия гипотезы (16) с результатом наблюдения ξ , следуя [7, 8], охарактеризуем надёжностью гипотезы, равной минимальному уровню критерия, при котором по наблюдению ξ гипотеза (16) отвергается в пользу альтернативы (17).

Надёжность гипотезы (16) даётся выражением [3, 9]

$$\alpha(\xi, \lambda) = \sup_{\mathbf{q} \in V_f \setminus V_0, \sigma^2 > 0} \left\{ \int_{\tau^\lambda(z) \geq \tau^\lambda(\xi)} p_{N(\mathbf{q}, \sigma^2 I)}(z) dz \right\}, \quad (19)$$

где $p_{N(\mathbf{q}, \sigma^2 I)}(\cdot)$ — плотность нормального распределения. Точная верхняя грань в (19) равна

$$\alpha(\xi, \lambda) = \int_{\tau^\lambda(z) \geq \tau^\lambda(\xi)} p_{N(\mathbf{q}_0, \sigma^2 I)}(z) dz \quad (20)$$

и с вероятностью единица одна и та же для любого $\mathbf{q}_0 \in V_0$, в частности для $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ и любого $\sigma^2 > 0$. Она может быть вычислена методом Монте-Карло путём разыгрывания реализаций нормально распределённого вектора $z \sim N(\mathbf{0}, I)$

с математическим ожиданием $\mathbf{0}$ и подсчёта частоты реализаций, для которых $\tau^\lambda(\mathbf{z}) \geq \tau^\lambda(\boldsymbol{\xi})$. В данном случае оценка $\boldsymbol{\lambda}$ случайным множеством с заданной вероятностью p имеет вид

$$\Psi_p^\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{\lambda}: \alpha(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) \geq 1 - p\}. \quad (21)$$

Заметим, что эта оценка вероятности накрытия истинного значения параметра $\boldsymbol{\lambda}$ случайным оценивающим множеством $\Psi_p^\lambda(\boldsymbol{\xi})$ получена в условиях неизвестной дисперсии измерительной погрешности; она вычисляется как точная нижняя грань по всем возможным частным распределениям гипотезы и равна пределу надёжности частной гипотезы при стремлении математического ожидания вектора $\boldsymbol{\xi}$ к константе. Однако вектор $\boldsymbol{\xi}$ имеет распределение $N(\mathbf{q}, \sigma^2 I)$, $\mathbf{q} \in V_f^\lambda$, и при этом $\mathbf{q} \notin V_0$, что часто встречается на практике. В этом случае при любом $\sigma^2 > 0$ функция распределения надёжности $\alpha(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$ по $\boldsymbol{\xi}$ не больше функции распределения $\alpha(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$ при $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{q}_0, I)$, $\mathbf{q} \in V_0$ (т. е. надёжность $\alpha(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$ в реальности принимает преимущественно бóльшие значения, чем $\alpha(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$ при $\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{q}_0, I)$, $\mathbf{q} \in V_0$) [7]. Однако поскольку на практике математическое ожидание $\boldsymbol{\xi}$ неизвестно, то можно лишь гарантировать, что оценивающее множество $\Psi_p^\lambda(\boldsymbol{\xi})$ накрывает истинное значение параметра $\boldsymbol{\lambda}$ с вероятностью, не меньшей p (хотя в реальности эта вероятность может быть значительно больше).

3.3. Минимаксное оценивание параметра гарантированной надёжности

Для множества $\Psi_p^\lambda(\boldsymbol{\xi})$ построим минимаксную оценку $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0 = \arg \inf_{\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \Lambda} \sup_{\check{\boldsymbol{\lambda}} \in \Psi^\lambda(\boldsymbol{\xi})} \|\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \check{\boldsymbol{\lambda}}\|. \quad (22)$$

Оценка $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0$ с гарантированной вероятностью p минимизирует максимально возможную погрешность оценивания параметра сдвига. Решением задачи (22) является центр шара минимального радиуса, содержащего множество $\Psi_p^\lambda(\boldsymbol{\xi})$, величина его радиуса является погрешностью оценки $\hat{\Delta}\lambda_0$ [6, 7]. Ясно, что чем выше вероятность p , тем больше погрешность оценивания.

3.4. Решение задачи оценивания положения экстремума или точки перегиба

Решение данной задачи полностью соответствует структуре решения задачи морфологического оценивания параметра сигнала по форме [2–4, 9] и отличается от неё только способом построения проекции $P_{V_{i_0}^n} \boldsymbol{\xi}$ сигнала $\boldsymbol{\xi}$ на форму $V_{i_0}^n$. Задача построения такой проекции сводится к задаче последовательного построения проекций первой ($\boldsymbol{\xi}_1^{(i_0)}$) и второй ($\boldsymbol{\xi}_{i_0}^{(n-i_0+1)}$) частей сигнала $\boldsymbol{\xi}$ — соответственно $P_{\hat{V}_{i_0}} \boldsymbol{\xi}_1^{(i_0)}$ и $P_{\hat{V}^{n-i_0+1}} \boldsymbol{\xi}_{i_0}^{(n-i_0+1)}$ — на множества соответственно $\hat{V}^{(i_0)}$ и

$\check{V}^{(n-i_0+1)}$, причём справедливо аналогичное теореме 1 утверждение о последовательном построении проекции и может быть применён алгоритм, аналогичный описанному выше, для согласования проекций двух частей сигнала ξ с целью получения $P_{V_{i_0}^n} \xi$.

3.5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим реализацию сигнала ξ вида $\xi_i = x_i^3 + \nu_i$, где $\nu_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma = 0,25$, $x_i = 0,02i - 1$, $i = 1, \dots, 101$, т. е. зашумлённый участок $[-1, 1]$ кривой $y = x^3$ (рис. 2). Оценим предложенным методом положение точки перегиба ($i_0 = 51$). Для этого для всех возможных значений параметра вычислим проекцию $P_{V_i^{101}} \xi$ на соответствующую форму V_i^{101} (11), затем вычислим значения статистики $\tau^{i_0}(\xi)$ (14) (рис. 3) и оценим методом Монте-Карло надёжность по формуле (20), разыграв 100 векторов $\eta_j \sim N(\mathbf{0}, I)$, $j = 1, \dots, 100$. Полученный график зависимости $\alpha(\xi, i)$ приведён на рис. 4. На этом же рисунке указаны случайные оценивающие множества $I_{0,05}(\xi)$, состоящие из точек, для которых надёжность не менее 0,95, и содержащие в себе истинное значение параметра i_0 с вероятностью гарантированно не менее 0,05. Таким образом, оценкой \hat{i}_0 будет являться середина отрезка минимальной длины, включающего в себя все точки случайного множества $\hat{i}_0 = 53$, а погрешность оценки Δi_0 равна половине длины данного отрезка $\Delta i_0 = 18$.

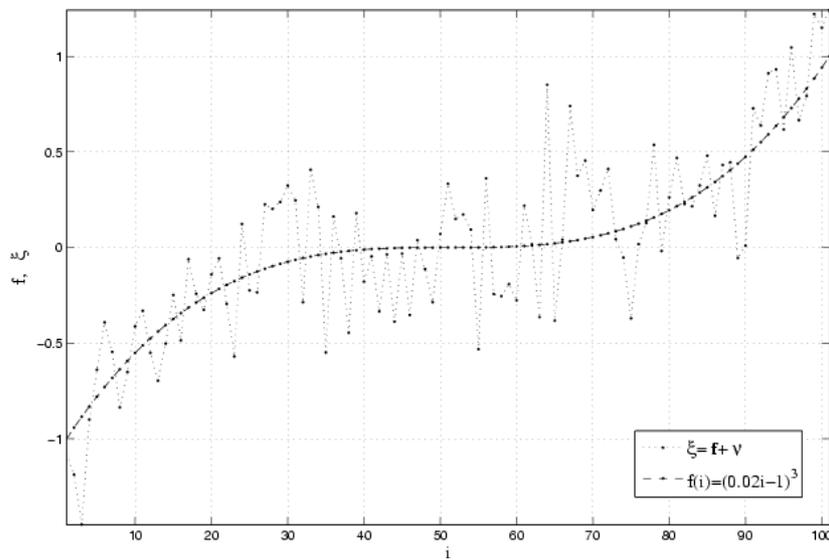
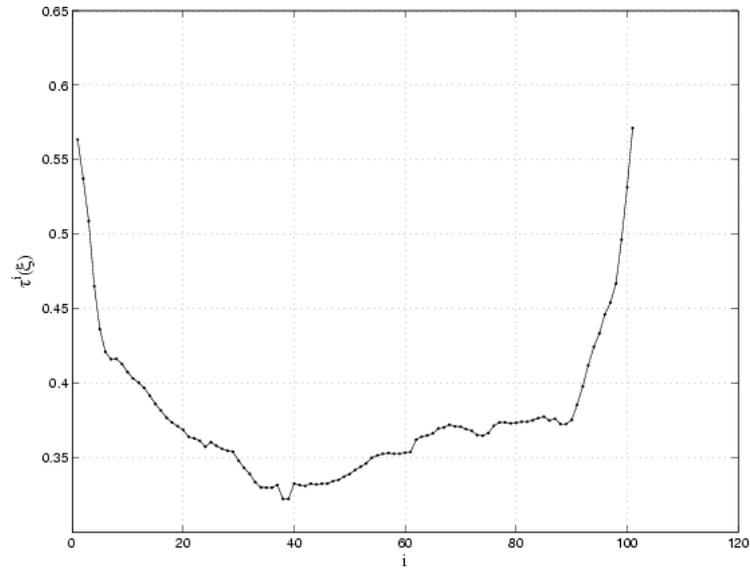
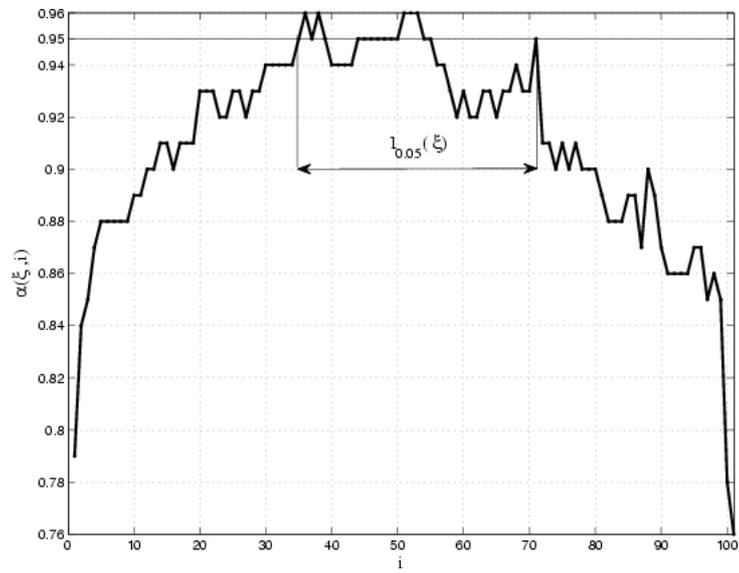


Рис. 2. Исходный и зашумлённый сигналы, анализируемые в вычислительном эксперименте

Рис. 3. Зависимость статистики $\tau^i(\xi)$ от параметра формы i Рис. 4. Зависимость надёжности $\alpha(\xi, i)$ от параметра формы. Приведено случайное оценивающее параметр i с вероятностью 0,05 множество $I_{0,05}(\xi)$

3.6. Описание реализации

Приведённый выше метод оценивания положения экстремума или точки перегиба на заданном отрезке зашумлённого сигнала был реализован в среде MATLAB с целью анализа сигналов, полученных при облучении колонии одноклеточных водорослей при различной степени загрязнения окружающей среды. Был создан соответствующий графический интерфейс (рис. 5), а также про-

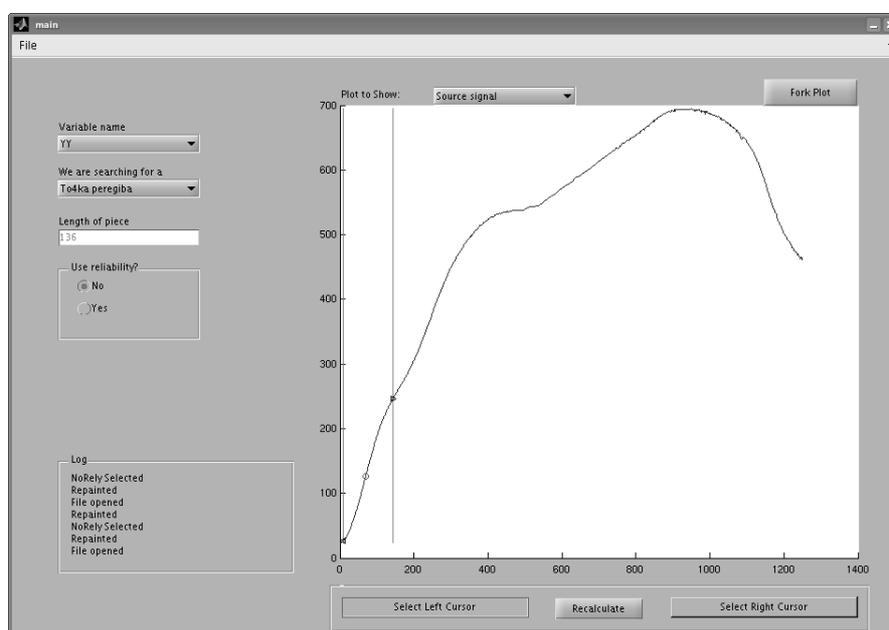


Рис. 5. Общий вид графического интерфейса пользователя:
пример выделения точки перегиба на слабо зашумлённом сигнале

граммное обеспечение, анализирующее данные в автоматическом режиме как при известной разметке сигнала, так и в случае известной длины отрезка, на котором по предположению могла находиться только одна из особых точек, выделяемых алгоритмом. В последнем случае алгоритм также самостоятельно классифицировал типы особых точек, выделенных на отрезке, методом минимума расстояния с использованием в качестве близости по форме статистику $\tau^\lambda(\xi)$ (см. формулу (14)). Пример автоматического выделения особых точек на одном из наборов сигналов, соответствующих временной зависимости интенсивности люминесценции после облучения, приведён на рис. 6.

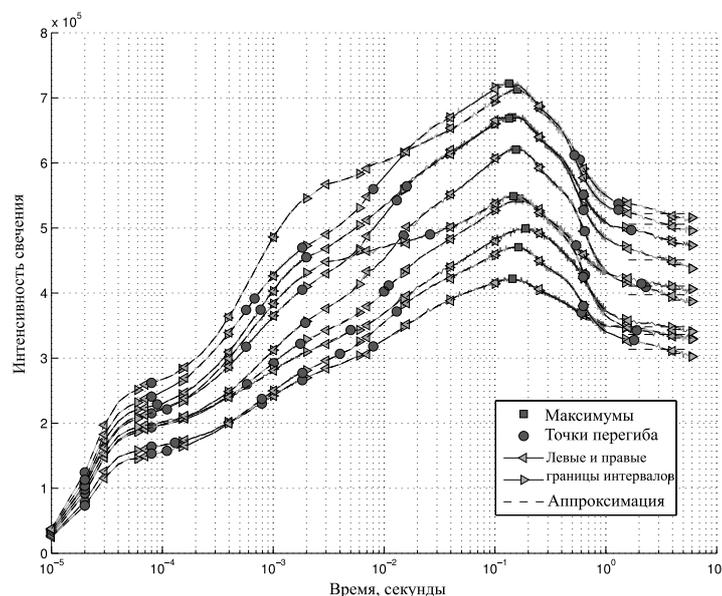


Рис. 6. Пример автоматического выделения экстремумов и точек перегиба на графиках интенсивности люминесценции колонии водорослей. Расположение особых точек служит количественной характеристикой изучаемого процесса

4. Заключение

В работе описан метод фильтрации монотонных выпуклых сигналов путём точного решения задачи проецирования вектора полученных в эксперименте значений этого сигнала на выпуклый замкнутый конус векторов евклидова пространства. На основе решения задачи вычисления проекции предложен метод оценивания положения точек локального максимума, локального минимума и точек перегиба сигналов, минимизирующий максимальную погрешность оценки гарантированной надёжности.

Литература

- [1] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
- [2] Животников Г. С. О задаче оптимального оценивания параметров объекта по его изображению // Математические методы распознавания образов. Доклады XI Всероссийской конференции. — М., 2003.
- [3] Захарченко А. А. Морфологические методы измерения рельефа поверхности с помощью оптического микроскопа: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2006.

- [4] Захарченко А. А., Чуличков А. И. Измерение микрорельефа поверхности по набору изображений с различным положением фокуса // Измерительная техника. — 2006.
- [5] Пытьев Ю. П. Морфологический анализ изображений // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 5. — С. 1061—1064.
- [6] Пытьев Ю. П. Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. — М.: Наука, 1984.
- [7] Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. — М.: Физматлит, 2002.
- [8] Чуличков А. И. Основы теории измерительно-вычислительных систем. Стохастические линейные измерительно-вычислительные системы. — Тамбов: Изд-во Тамбовского гос. тех. ун-та, 2000.
- [9] Чуличков А. И., Куличков С. Н., Дёмин Д. С. Оценки относительного времени задержки сигналов, основанные на анализе их формы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физика, астрономия. — 2007. — № 6. — С. 17—21.
- [10] Чуличков А. И., Морозова И. В. Классификация размытых изображений и оценка параметров системы регистрации методами морфологического анализа // Интеллект. сист. — 2005. — Т. 9, вып. 1—4. — С. 321—344.
- [11] The MathWorks: Optimization Toolbox User's Guide. — 2008.

