Финслеровы 3-спиноры и обобщённое уравнение Даффина—Кеммера

А. В. СОЛОВЬЁВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: a.v.solovyov@gmail.com

УДК 514.744.2+514.763.6

Ключевые слова: финслеров 3-спинор, финслерова геометрия, уравнение Даффина—Кеммера.

Аннотация

Приведены основные положения геометрии финслеровых 3-спиноров. Установлена тесная связь между финслеровыми 3-спинорами и векторами девятимерного линейного финслерова пространства. Дано описание группы изометрий этого пространства. Изложена процедура размерной редукции к четырёхмерным величинам. Получено обобщённое уравнение Даффина—Кеммера для финслеровой 3-спинорной волновой функции свободной частицы в импульсном представлении. С точки зрения четырёхмерного наблюдателя это девятимерное уравнение распадается на стандартные уравнения Дирака и Клейна—Гордона.

Abstract

A. V. Solov'yov, Finslerian 3-spinors and the generalized Duffin—Kemmer equation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 6, pp. 201—210.

The main facts of the geometry of Finslerian 3-spinors are formulated. The close connection between Finslerian 3-spinors and vectors of the 9-dimensional linear Finslerian space is established. The isometry group of this space is described. The procedure of dimensional reduction to 4-dimensional quantities is formulated. The generalized Duffin—Kemmer equation for a Finslerian 3-spinor wave function of a free particle in the momentum representation is obtained. From the viewpoint of a 4-dimensional observer, this 9-dimensional equation splits into the standard Dirac and Klein—Gordon equations.

Введение

В [7, 8] были введены *гиперспиноры* и рассмотрены их основные свойства. Эти же математические объекты под названием N-компонентных спиноров совершенно независимо изучались в [1, 5]. Наконец, в [11] была построена общая алгебраическая теория *финслеровых N-спиноров*. Последний термин представляется наиболее удачным, поскольку отражает тесную связь, существующую между гиперспинорами и финслеровой геометрией.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 6, с. 201—210.

Настоящая работа посвящена изложению основных положений геометрии финслеровых 3-спиноров и выводу обобщённого уравнения Даффина—Кеммера для финслеровой 3-спинорной волновой функции свободной частицы в импульсном представлении.

Вкратце о структуре статьи. Вначале формулируется определение пространства финслеровых 3-спиноров и строится ассоциированная финслерова геометрия. После получения явного выражения для длины вектора в 9-мерном линейном финслеровом пространстве даётся описание соответствующей группы изометрий. Далее излагается процедура размерной редукции, которая позволяет представить выражение для финслеровой длины 9-мерного вектора в гораздо более обозримом виде с использованием только 4-мерных геометрических объектов. Статья завершается выводом обобщённого уравнения Даффина—Кеммера для финслеровой 3-спинорной волновой функции свободной частицы в импульсном представлении.

Геометрия финслеровых 3-спиноров

Пусть $\mathbb{C}^3$ — линейное пространство 3-компонентных столбцов комплексных чисел относительно стандартных матричных операций сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{C}$. Рассмотрим антисимметричную 3-линейную форму

$$[\xi, \eta, \lambda] = \varepsilon_{abc}\,\xi^a \eta^b \lambda^c, \tag{1}$$

где $\xi, \eta, \lambda \in \mathbb{C}^3$, ε_{abc} — символ Леви-Чивита, нормированный условием $\varepsilon_{123} = 1$, индексы a, b, c независимо пробегают значения от 1 до 3, $\xi^a, \eta^b, \lambda^c \in \mathbb{C}$. Здесь и во всех последующих формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Пространство $\mathbb{C}^3$ с заданной на нём формой (1) назовём *пространством финслеровых* 3*-спиноров*. Само же комплексное число $[\xi, \eta, \lambda]$ будем называть *симплектическим скалярным* 3*-произведением* финслеровых 3-спиноров ξ, η и λ.

Поскольку (1) представляет собой не что иное, как определитель

$$[\xi, \eta, \lambda] = \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 & \lambda^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \lambda^2 \\ \xi^3 & \eta^3 & \lambda^3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

со столбцами ξ, η и λ, то по известной теореме алгебры [3] симплектическое скалярное 3-произведение $[\xi, \eta, \lambda]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда финслеровы 3-спиноры ξ, η и λ линейно зависимы. В частности, $[\xi, \xi, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \mathbb{C}^3$.

Найдём изометрии пространства финслеровых 3-спиноров, т. е. линейные преобразования

$$\xi' = D\xi \iff \xi'^a = d^a_b \xi^b \quad (D = \|d^a_b\|;\ d^a_b \in \mathbb{C};\ a, b = \overline{1,3}), \tag{3}$$

сохраняющие симплектическое скалярное 3-произведение:

$$[\xi', \eta', \lambda'] = [\xi, \eta, \lambda] \quad \text{для любых} \quad \xi, \eta, \lambda \in \mathbb{C}^3. \tag{4}$$

Подставляя (3) и аналогичные выражения для η', λ' в условие (4), с учётом (2) получаем

$$[\xi, \eta, \lambda] \det D = [\xi, \eta, \lambda]. \tag{5}$$

Ввиду произвольности $\xi, \eta, \lambda \in \mathbb{C}^3$ из (5) следует унимодулярность матрицы преобразования (3): $\det D = 1$. Таким образом, изометрии пространства финслеровых 3-спиноров образуют группу $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$.

Рассмотрим подпространство линейного пространства $\mathbb{C}^3 \otimes \overline{\mathbb{C}^3}$, состоящее из эрмитовых тензоров. Это подпространство изоморфно 9-мерному *действительному* линейному пространству $\mathrm{Herm}(3) = \{X \mid X = X^+\}$, образованному всеми эрмитовыми (3×3)-матрицами с комплексными элементами. Здесь и далее черта обозначает комплексное, а крест — эрмитово сопряжение.

В качестве базиса пространства $\mathrm{Herm}(3)$ выберем следующие линейно независимые матрицы:

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$ — хорошо известные матрицы Гелл-Манна). Тогда для любого $X \in \mathrm{Herm}(3)$ имеет место разложение

$$X = X^A \lambda_A \quad (A = \overline{0,8}), \tag{7}$$

где $X^A \in \mathbb{R}$ — компоненты 9-мерного вектора X относительно базиса (6). Наряду с матрицами (6) введём ещё один набор эрмитовых (3×3)-матриц с верхними индексами: $\lambda^B = \lambda_B$ $(B \neq 8)$, $\lambda^8 = 2\lambda_8$. При таком выборе матриц выполняются замечательные соотношения

$$\mathrm{Tr}(\lambda^A \lambda_B) = 2\delta^A_B \quad (A, B = \overline{0,8}), \tag{8}$$

где Tr обозначает операцию вычисления следа матрицы, а δ^A_B — символ Кронекера. На основании (7) и (8) немедленно заключаем, что

$$X^A = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\lambda^A X). \tag{9}$$

Наделим $\mathrm{Herm}(3)$ структурой финслерова пространства. Для этого определим *длину* $|X|$ 9-мерного вектора $X \in \mathrm{Herm}(3)$ следующим образом:

$$|X| \equiv \sqrt[3]{\det X}.$$

Вычисляя определитель от левой и правой частей разложения (7), получаем выражение для $|X|^3$ в базисе (6):

$$\begin{aligned}|X|^3 = G_{ABC}X^AX^BX^C = [(X^0)^2-(X^1)^2-(X^2)^2-(X^3)^2]X^8 -\\ - X^0[(X^4)^2+(X^5)^2+(X^6)^2+(X^7)^2]+2X^1[X^4X^6+X^5X^7]+\\ +2X^2[X^5X^6-X^4X^7]+X^3[(X^4)^2+(X^5)^2-(X^6)^2-(X^7)^2],\end{aligned} \tag{10}$$

где G_{ABC} — компоненты симметричного ковариантного тензора третьего ранга на $\mathrm{Herm}(3)$. Таким образом, финслерова длина 9-мерного вектора $X \in \mathrm{Herm}(3)$ задаётся в базисе (6) формой третьей степени относительно переменных (9). Особо отметим обстоятельство, что форма (10) является знаконеопределённой, т. е. возможны три случая: $|X|^3 > 0$, $|X|^3 < 0$ или $|X|^3 = 0$. Поскольку $|X|^3 = \det X$, последний случай реализуется тогда и только тогда, когда $\det X = 0$.

Всякое линейное преобразование (3) пространства финслеровых 3-спиноров индуцирует в $\mathrm{Herm}(3)$ преобразование вида

$$X' = DXD^+ \iff X'^{a\dot b} = d^a_c\overline{d^{\dot b}_{\dot e}}X^{c\dot e} \quad (X' = \|X'^{a\dot b}\|;\ X = \|X^{c\dot e}\|), \tag{11}$$

где как пунктирные, так и непунктирные индексы пробегают значения от 1 до 3 (точка над индексом означает, что он относится к элементу матрицы, комплексно сопряжённой матрице $D = \|d^a_b\|$), $X \in \mathrm{Herm}(3)$. Очевидно, преобразование (11) обладает следующими свойствами:

1) если $X = X^+$, то $X' = X'^+$, т. е. преобразование (11) не выводит за пределы пространства $\mathrm{Herm}(3)$;
2) преобразование (11) является линейным относительно X;
3) если $\det D = 1$, то $\det X' = \det X$ для любого $X \in \mathrm{Herm}(3)$.

Поскольку $|X| = \sqrt[3]{\det X}$, последнее свойство означает, что при $D \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ линейное преобразование (11) пространства $\mathrm{Herm}(3)$ является финслеровой изометрией: $|X'| = |X|$. Понятно, что все такие изометрии образуют некоторую группу. Дадим явное матричное описание этой группы в базисе (6).

Подставим в (11) вместо $X', X \in \mathrm{Herm}(3)$ их разложения $X' = X'^A\lambda_A$, $X = X^B\lambda_B$. Умножим получившееся равенство слева на λ^A, вычислим след от обеих его сторон и воспользуемся соотношениями (8). В результате будем иметь

$$X'^A = L(D)^A_BX^B \quad (A, B = \overline{0,8}), \tag{12}$$

где

$$L(D)^A_B = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\lambda^AD\lambda_BD^+) - \tag{13}$$

элементы матрицы линейного преобразования (11) в базисе (6) (подчеркнём, что $L(D)^A_B \in \mathbb{R}$). Таким образом, при любой унимодулярной комплексной (3×3)-матрице D из группы $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ преобразование (12), (13) сохраняет форму (10):

$$G_{ABC}X'^AX'^BX'^C = G_{ABC}X^AX^BX^C.$$

Поскольку группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ локально изоморфна собственной ортохронной подгруппе $\mathrm{O}_{+}^{\uparrow}(1,3)$ группы Лоренца [4], имеет смысл рассмотреть преобразования (12), (13) при $D \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, т. е. с позиций «4-мерного наблюдателя». Помимо всего прочего, это позволит представить выражение (10) для финслеровой длины 9-мерного вектора в полностью 4-мерном виде.

Пусть

$$D_2 = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & 0 \\ d_1^2 & d_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D_2 = 1 \quad (d_{\hat{b}}^{\hat{a}} \in \mathbb{C};\ \hat{a}, \hat{b} = 1, 2). \tag{14}$$

Совокупность матриц (14) образует в $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Подставим в (13) вместо D матрицу D_2 из (14). Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
L(D_2)_0^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_1^1} + d_2^1\overline{d_2^1} + d_1^2\overline{d_1^2} + d_2^2\overline{d_2^2}),\\
L(D_2)_1^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_2^1} + d_1^2\overline{d_2^2} + d_2^1\overline{d_1^1} + d_2^2\overline{d_1^2}),\\
L(D_2)_2^0 &= \frac{i}{2}(d_2^1\overline{d_1^1} + d_2^2\overline{d_1^2} - d_1^1\overline{d_2^1} - d_1^2\overline{d_2^2}),\\
L(D_2)_3^0 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_1^1} + d_1^2\overline{d_1^2} - d_2^1\overline{d_2^1} - d_2^2\overline{d_2^2}),\\
L(D_2)_0^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_1^2} + d_1^2\overline{d_1^1} + d_2^1\overline{d_2^2} + d_2^2\overline{d_2^1}),\\
L(D_2)_1^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_2^2} + d_1^2\overline{d_2^1} + d_2^1\overline{d_1^2} + d_2^2\overline{d_1^1}),\\
L(D_2)_2^1 &= \frac{i}{2}(d_2^1\overline{d_1^2} + d_2^2\overline{d_1^1} - d_1^1\overline{d_2^2} - d_1^2\overline{d_2^1}),\\
L(D_2)_3^1 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_1^2} + d_1^2\overline{d_1^1} - d_2^1\overline{d_2^2} - d_2^2\overline{d_2^1}),\\
L(D_2)_0^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1\overline{d_1^2} - d_1^2\overline{d_1^1} + d_2^1\overline{d_2^2} - d_2^2\overline{d_2^1}),\\
L(D_2)_1^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1\overline{d_2^2} - d_1^2\overline{d_2^1} + d_2^1\overline{d_1^2} - d_2^2\overline{d_1^1}),\\
L(D_2)_2^2 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_2^2} + d_2^2\overline{d_1^1} - d_2^1\overline{d_1^2} - d_1^2\overline{d_2^1}),\\
L(D_2)_3^2 &= \frac{i}{2}(d_1^1\overline{d_1^2} - d_1^2\overline{d_1^1} - d_2^1\overline{d_2^2} + d_2^2\overline{d_2^1}),\\
L(D_2)_0^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_1^1} - d_1^2\overline{d_1^2} + d_2^1\overline{d_2^1} - d_2^2\overline{d_2^2}),\\
L(D_2)_1^3 &= \frac{1}{2}(d_1^1\overline{d_2^1} - d_1^2\overline{d_2^2} + d_2^1\overline{d_1^1} - d_2^2\overline{d_1^2}),
\end{aligned}$$

$$L(D_2)^3_2 = \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^1_1} - d^2_2\overline{d^2_1} - d^1_1\overline{d^1_2} + d^2_1\overline{d^2_2}),$$
$$L(D_2)^3_3 = \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^1_2} - d^2_1\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^2_2}), \tag{15}$$

$L(D_2)^{3+i}_{3+j} = M(D_2)^i_j$ $(i,j=\overline{1,4})$, где

$$\begin{aligned}
M(D_2)^1_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_1} + d^1_1), & M(D_2)^3_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_1} + d^2_1),\\
M(D_2)^1_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_1} - d^1_1), & M(D_2)^3_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_1} - d^2_1),\\
M(D_2)^1_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_2} + d^1_2), & M(D_2)^3_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_2} + d^2_2),\\
M(D_2)^1_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_2} - d^1_2), & M(D_2)^3_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_2} - d^2_2),\\
M(D_2)^2_1 &= \frac{i}{2}(d^1_1 - \overline{d^1_1}), & M(D_2)^4_1 &= \frac{i}{2}(d^2_1 - \overline{d^2_1}),\\
M(D_2)^2_2 &= \frac{1}{2}(d^1_1 + \overline{d^1_1}), & M(D_2)^4_2 &= \frac{1}{2}(d^2_1 + \overline{d^2_1}),\\
M(D_2)^2_3 &= \frac{i}{2}(d^1_2 - \overline{d^1_2}), & M(D_2)^4_3 &= \frac{i}{2}(d^2_2 - \overline{d^2_2}),\\
M(D_2)^2_4 &= \frac{1}{2}(d^1_2 + \overline{d^1_2}), & M(D_2)^4_4 &= \frac{1}{2}(d^2_2 + \overline{d^2_2}),
\end{aligned} \tag{16}$$

$L(D_2)^8_8 = 1$, а все оставшиеся элементы матрицы преобразования $X'^A = L(D_2)^A_B X^B$ обращаются в нуль. Таким образом, при $D = D_2$ финслерова изометрия (12) принимает вид

$$X'^\alpha = L(D_2)^\alpha_\beta X^\beta \ \ (\alpha,\beta=\overline{0,3}), \quad \theta'^i = M(D_2)^i_j\theta^j \ \ (i,j=\overline{1,4}), \quad X'^8 = X^8, \tag{17}$$

где $L(D_2)^\alpha_\beta$, $M(D_2)^i_j$ даются формулами (15), (16) и использованы обозначения $\theta'^i = X'^{3+i}$, $\theta^j = X^{3+j}$.

В [11] было показано, что (15) и (16) являются элементами матриц преобразований лоренцева 4-мерного вектора и майорановского 4-спинора соответственно. Поэтому результат (17) сводится к утверждению, что при $D = D_2$ 9-мерный вектор X^A расщепляется на лоренцев 4-мерный вектор X^α, майорановский 4-спинор θ^i и лоренцев 4-скаляр X^8.

Сказанное составляет суть процедуры размерной редукции, позволяющей выявлять «4-мерный состав» встречающихся 9-мерных выражений. Применим эту процедуру к довольно громоздкой формуле (10) для финслеровой длины 9-мерного вектора X^A. Принимая во внимание (17), получаем

$$|X|^3 = g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu X^8 - g_{\mu\nu}X^\mu\overline{\theta}\gamma^\nu\theta, \tag{18}$$

где $\mu,\nu = \overline{0,3}$, $\|g_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ — матрица компонент метрического тензора пространства Минковского в псевдоортонормированном базисе,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}) —$$

матрицы Дирака в майорановском представлении [11], $\theta \in \mathbb{R}^4$ — 4-компонентный столбец действительных чисел $\theta^j = X^{3+j}$ $(j = \overline{1,4})$, $\overline{\theta} \equiv \theta^\top \gamma^0$ (символ $\top$ обозначает операцию транспонирования матрицы). Таким образом, выражение (10) записано в гораздо более компактной 4-мерной форме (18).

Обобщённое уравнение Даффина—Кеммера

Используем развитый выше формализм для квантового описания свободной 3-спинорной частицы в 9-мерном финслеровом пространстве с метрикой (10). Соответствующее волновое уравнение было получено в [2, 8]. В [8] использовалось координатное, а в [2] — импульсное представление одного и того же волнового уравнения. Все дальнейшие построения производятся в импульсном представлении, поскольку в нём уравнения для волновых функций свободных частиц превращаются из дифференциальных в алгебраические и их проще анализировать.

Пусть i^r и $\beta_{\dot{s}}$ $(r, s = \overline{1,3})$ — финслеровы 3-спиноры, а $P \equiv \|P^{r\dot{s}}\|$ является элементом пространства $\mathrm{Herm}(3)$, обсуждавшегося в предыдущем разделе. Подставляя в (7) вместо X матрицу P и вычисляя определитель, в обозначениях формулы (10) получаем

$$\det P = G_{ABC} P^A P^B P^C, \tag{19}$$

где соотношения между $P^{r\dot{s}}$ и P^A имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &P^{1\dot{1}} = P^0 + P^3, \quad P^{1\dot{2}} = P^1 - iP^2, \quad P^{1\dot{3}} = P^4 - iP^5, \\ &P^{2\dot{1}} = P^1 + iP^2, \quad P^{2\dot{2}} = P^0 - P^3, \quad P^{2\dot{3}} = P^6 - iP^7, \\ &P^{3\dot{1}} = P^4 + iP^5, \quad P^{3\dot{2}} = P^6 + iP^7, \quad P^{3\dot{3}} = P^8. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

В [2] для описания свободной 3-спинорной частицы с волновой функцией $i^r(P^A)$, $\beta_{\dot{s}}(P^A)$ было предложено $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$-ковариантное уравнение

$$\left.\begin{aligned} &P^{r\dot{s}}\beta_{\dot{s}} = M i^r, \\ &P_{r\dot{s}}\, i^r = M^2 \beta_{\dot{s}}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где $P^{r\dot{s}}$ выражаются через компоненты 9-импульса P^A частицы согласно (20), M — положительный скаляр, а $P_{r\dot{s}}$ — алгебраические дополнения элементов $P^{r\dot{s}}$

матрицы P. Естественно назвать M 9-массой частицы, поскольку подстановка верхнего равенства (21) в нижнее (и наоборот) приводит к финслерову аналогу уравнения Клейна—Гордона для каждой из 3-спинорных компонент волновой функции:

$$(G_{ABC}P^AP^BP^C - M^3)i^r = 0, \quad (G_{ABC}P^AP^BP^C - M^3)\beta_{\dot{s}} = 0.$$

Полагая $P^{3+i} = 0$ ($i = \overline{1,4}$), $P^8 = M$ и производя размерную редукцию как в (17), приходим к важному выводу, что уравнение (21) расщепляется на стандартные 4-мерные уравнения Дирака (для компонент i^1, i^2, $\beta_{\dot{1}}$, $\beta_{\dot{2}}$) и Клейна—Гордона (для компоненты $i^3 = \beta_{\dot{3}}$) в импульсном представлении, описывающие свободные частицы массы M [2].

Заметим, что уравнение (21) квадратично по отношению к P^A. Это вытекает из (20) и того факта, что $P_{r\dot{s}}$ пропорциональны минорам второго порядка матрицы P. Попробуем представить (21) в виде уравнения, линейного относительно компонент 9-импульса P^A.

Следуя [10], введём новые переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$, такие что

$$\left.\begin{aligned} P^{2\dot{1}}i^1 - P^{1\dot{1}}i^2 = M\xi_1, \quad P^{2\dot{2}}i^1 - P^{1\dot{2}}i^2 = M\xi_4,\\ P^{3\dot{1}}i^1 - P^{1\dot{1}}i^3 = M\xi_2, \quad P^{3\dot{2}}i^1 - P^{1\dot{2}}i^3 = M\xi_5,\\ P^{3\dot{1}}i^2 - P^{2\dot{1}}i^3 = M\xi_3, \quad P^{3\dot{2}}i^2 - P^{2\dot{2}}i^3 = M\xi_6. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

При помощи (22) можно переписать нижнее равенство (21) в виде

$$\left.\begin{aligned} P^{3\dot{3}}\xi_4 - P^{2\dot{3}}\xi_5 + P^{1\dot{3}}\xi_6 = M\beta_{\dot{1}},\\ -P^{3\dot{3}}\xi_1 + P^{2\dot{3}}\xi_2 - P^{1\dot{3}}\xi_3 = M\beta_{\dot{2}},\\ -P^{3\dot{1}}\xi_4 + P^{2\dot{1}}\xi_5 - P^{1\dot{1}}\xi_6 = M\beta_{\dot{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Таким образом, (21) эквивалентно системе уравнений $P^{r\dot{s}}\beta_{\dot{s}} = Mi^r$, (22), (23), или, что то же самое, одному матричному уравнению

$$\hat{P}\Psi = M\Psi, \tag{24}$$

где $\Psi = (i^1, i^2, i^3, \beta_{\dot{1}}, \beta_{\dot{2}}, \beta_{\dot{3}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)^\top$ — 12-компонентный столбец, а

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_1 & P_2\\ P_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ P_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \tag{25}$$

(12×12)-матрица, составленная из (3×3)-блоков

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P^{1\dot{1}} & P^{1\dot{2}} & P^{1\dot{3}}\\ P^{2\dot{1}} & P^{2\dot{2}} & P^{2\dot{3}}\\ P^{3\dot{1}} & P^{3\dot{2}} & P^{3\dot{3}} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -P^{3\dot{3}} & P^{2\dot{3}} & -P^{1\dot{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} P^{3\dot{3}} & -P^{2\dot{3}} & P^{1\dot{3}} \\ 0 & 0 & 0 \\ -P^{3\dot{1}} & P^{2\dot{1}} & -P^{1\dot{1}} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} P^{2\dot{1}} & -P^{1\dot{1}} & 0 \\ P^{3\dot{1}} & 0 & -P^{1\dot{1}} \\ 0 & P^{3\dot{1}} & -P^{2\dot{1}} \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} P^{2\dot{2}} & -P^{1\dot{2}} & 0 \\ P^{3\dot{2}} & 0 & -P^{1\dot{2}} \\ 0 & P^{3\dot{2}} & -P^{2\dot{2}} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Возведём (25) в четвёртую степень. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\hat{P}^4 = (\det P)\hat{P}. \tag{29}$$

С другой стороны, используя (20) и (26)—(28), легко представить (25) в виде линейной комбинации

$$\hat{P} = P^A \delta_A \tag{30}$$

девяти (12×12)-матриц δ_A (в явной форме эти матрицы приведены в приложении к статье [10]). Подстановка (19) и (30) в (29) немедленно приводит к тождеству

$$(P^A \delta_A)^4 = G_{ABC} P^A P^B P^C (P^D \delta_D), \tag{31}$$

справедливому для любых P^A; здесь $A, B, C, D = \overline{0, 8}$.

Очевидно, что (31) обобщает известное 4-мерное тождество

$$(p^\mu \beta_\mu)^3 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu (p^\lambda \beta_\lambda),$$

где $\mu, \nu, \lambda = \overline{0, 3}$, а β_μ — матрицы Даффина—Кеммера [6, 9]. Кроме того, из (31) следует, что δ-матрицы удовлетворяют условиям

$$\delta_{(A} \delta_B \delta_C \delta_{D)} = 6\{G_{ABC}\delta_D + G_{ABD}\delta_C + G_{ACD}\delta_B + G_{BCD}\delta_A\}, \tag{32}$$

где круглые скобки обозначают симметризацию по всем нижним индексам (т. е. сумму по всем перестановкам A, B, C, D). В этой связи уместно напомнить важные соотношения алгебры Даффина—Кеммера:

$$\beta_{(\mu} \beta_\nu \beta_{\lambda)} = 2\{g_{\mu\nu}\beta_\lambda + g_{\lambda\mu}\beta_\nu + g_{\lambda\nu}\beta_\mu\}. \tag{33}$$

Нетрудно усмотреть полную аналогию между формулами (32) и (33).

Вернёмся к уравнению (24). С помощью (30) оно может быть окончательно записано в следующем виде:

$$(P^A \delta_A - M)\Psi = 0, \tag{34}$$

где δ_A удовлетворяют условиям (32). Таким образом, цель этого раздела достигнута: уравнение (21) представлено в форме обобщённого уравнения Даффина—Кеммера (34).

Заключение

Подводя итоги, сделаем ряд замечаний по поводу полученных результатов.

В этой работе изложены основные факты геометрии финслеровых 3-спиноров 9-мерного линейного пространства с метрической функцией, определяемой алгебраической формой третьей степени (10). Дано явное описание изометрий этого 9-мерного финслерова пространства и процедуры размерной редукции, позволившей представить форму (10) в 4-мерном виде (18). Последнее весьма существенно, поскольку свидетельствует о выполнимости принципа соответствия со стандартной релятивистской теорией на уровне геометрии.

Кроме того, в статье выведено обобщённое уравнение Даффина—Кеммера (34) для финслеровой 3-спинорной частицы в импульсном представлении. Параллельно получен 9-мерный финслеров аналог (32) определяющих соотношений (33) 4-мерной алгебры Даффина—Кеммера. Показано, что уравнение (34) нетривиальным образом объединяет в себе 4-мерные уравнения Дирака и Клейна—Гордона.

Автор благодарен профессору Ю. С. Владимирову за многолетнее плодотворное сотрудничество, выразившееся в ряде совместных работ.

Литература

[1] Владимиров Ю. С., Соловьёв А. В. Физическая структура ранга $(4,4;б)$ и трёхкомпонентные спиноры // Вычислительные системы. — 1990. — Вып. 135. — С. 44—66.

[2] Владимиров Ю. С., Соловьев А. В. Обобщённые уравнения Дирака для свободных частиц в бинарной геометрофизике: 2. Структура ранга $(4,4;б)$ // Изв. высш. учебн. завед. Физика. — 1992. — Т. 35, № 6. — С. 56—59.

[3] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 1994.

[4] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1986.

[5] Соловьёв А. В. К теории бинарных физических структур ранга $(5,5;б)$ и выше // Вычислительные системы. — 1990. — Вып. 135. — С. 67—77.

[6] Duffin R. J. On the characteristic matrices of covariant systems // Phys. Rev. — 1938. — Vol. 54. — P. 1114.

[7] Finkelstein D. Hyperspin and hyperspace // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Vol. 56. — P. 1532—1533.

[8] Finkelstein D., Finkelstein S. R., Holm C. Hyperspin manifolds // Internat. J. Theoret. Phys. — 1986. — Vol. 25. — P. 441—463.

[9] Kemmer N. The particle aspect of meson theory // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1939. — Vol. 173. — P. 91—116.

[10] Solov'yov A. V. On $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$-covariant spinor equation and generalized Duffin—Kemmer algebra // Gravitation Cosmology. — 1995. — Vol. 1, no. 3. — P. 255—257.

[11] Solov'yov A. V., Vladimirov Yu. S. Finslerian N-spinors: Algebra // Internat. J. Theoret. Phys. — 2001. — Vol. 40. — P. 1511—1523.