

Кривизна и числа Тачибаны

С. Е. СТЕПАНОВ

Финансовая академия при Правительстве РФ
e-mail: stepanov@vtsnet.ru

УДК 514.764.212

Ключевые слова: компактное риманово многообразие, дифференциальные формы, эллиптический оператор, скалярные инварианты.

Аннотация

Цель статьи состоит в определении r -чисел Тачибаны t_r для n -мерного компактно ориентированного риманова многообразия как размерности пространства конформно киллинговых r -форм для $r = 1, 2, \dots, n - 1$ и описания свойств этих чисел по аналогии со свойствами r -чисел Бетти b_r компактного ориентированного риманова многообразия.

Abstract

S. E. Stepanov, Curvature and Tachibana Numbers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 6, pp. 211–222.

The purpose of this paper is to define the r th Tachibana number t_r of an n -dimensional closed and oriented Riemannian manifold (M, g) as the dimension of the space of all conformal Killing r -forms for $r = 1, 2, \dots, n - 1$ and to formulate some properties of these numbers as an analogue to properties of the r th Betti number b_r of a closed and oriented Riemannian manifold.

1. Введение

1.1. В настоящей статье мы определяем числа Тачибаны компактного ориентированного риманова многообразия и, опираясь на это определение, интерпретируем хорошо известные результаты теории римановых многообразий, в том числе и полученные нами. В работе мы использовали идеи классической монографии [11].

Статья основана на докладе автора на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и топология», посвящённой 100-летию со дня рождения Льва Семёновича Понтрягина, которая состоялась в Москве 17–22 июня 2008 года (см. [22]).

1.2. В дальнейшем мы сконцентрируем своё внимание на четырёх подпространствах векторного пространства $\Omega^r(M, \mathbf{R})$ внешних дифференциальных r -форм на римановом многообразии (M, g) , а именно на подпространствах

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 6, с. 211–222.

© 2009 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

$\mathbf{H}^r(M, \mathbf{R})$ гармонических, $\mathbf{T}^r(M, \mathbf{R})$ конформно киллинговых, $\mathbf{K}^r(M, \mathbf{R})$ козамкнутых конформно киллинговых и $\mathbf{P}^r(M, \mathbf{R})$ замкнутых конформно киллинговых дифференциальных r -форм для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Для замкнутого и ориентированного многообразия (M, g) мы назовём $t_r = \dim \mathbf{T}^r(M, \mathbf{R})$ *числом Тачибаны*, $k_r = \dim \mathbf{K}^r(M, \mathbf{R})$ — числом Киллинга и $p_r = \dim \mathbf{P}^r(M, \mathbf{R})$ — *числом планарности* многообразия (M, g) , подобно тому как число $b_r = \dim \mathbf{H}^r(M, \mathbf{R})$ называют *числом Бетти* многообразия (M, g) .

Мы установим, что числа Тачибаны t_r являются конформными скалярными инвариантами, а числа Киллинга k_r и числа планарности p_r являются проективными скалярными инвариантами компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) и обладают при этом следующими свойствами дуальности: $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

В дополнении к сказанному мы выведем тождество $t_r = k_r + p_r$ для n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) постоянной секционной кривизны $C > 0$. Кроме того, мы докажем теорему исчезновения для чисел Тачибаны t_r ($1 \leq r \leq n-1$). В последнем разделе статьи мы сформулируем две нерешённые задачи о числах Тачибаны.

2. Семь векторных пространств дифференциальных r -форм

В этом разделе мы определим семь подпространств пространства внешних дифференциальных форм на n -мерном римановом многообразии (M, g) , опираясь на теорию естественных дифференциальных операторов первого порядка, задаваемых на внешних дифференциальных r -формах ($1 \leq r \leq n-1$).

2.1. Более тридцати лет назад Ж.-П. Бургиньон [2] рассмотрел пространство $\text{Diff}_1(\Lambda^r M, \mathfrak{Z}M)$ естественных (относительно изометрических диффеоморфизмов) дифференциальных операторов порядка 1 на пространстве C^∞ -сечений векторного расслоения $\Lambda^r M$ внешних дифференциальных r -форм со значениями в пространстве $\mathfrak{Z}M$ однородных тензоров на (M, g) .

Ж.-П. Бургиньон доказал [2] существование в пространстве $\text{Diff}_1(\Lambda^r M, \mathfrak{Z}M)$ базиса из трёх операторов D_1 , D_2 и D_3 , но при этом определил только три оператора. Первым стал оператор D_1 внешнего дифференцирования $d: C^\infty \Lambda^r M \rightarrow C^\infty \Lambda^{r+1} M$, а вторым D_2 — оператор кодифференцирования $d^*: C^\infty \Lambda^r M \rightarrow C^\infty \Lambda^{r-1} M$, определяемый посредством равенства (см. [1, 4])

$$d^* = (-1)^{np+n+1} * d *, \quad (1)$$

где $*$ — оператор Ходжа, отображающий каждую внешнюю дифференциальную r -форму в $(n-r)$ -форму так, что $*$: $\Omega^r(M, \mathbf{R}) \rightarrow \Omega^{n-r}(M, \mathbf{R})$ становится изоморфизмом и при этом $*^2 = (-1)^{p(n-p)} \text{Id}_{\Lambda^r M}$ для фиксированной локальной ориентации многообразия (M, g) .

О третьем базисном естественном дифференциальном операторе D_3 в [2] было сказано, что для случая $r > 1$ этот оператор не имеет какой-либо геометрической интерпретации. При этом было добавлено, что для случая $r = 1$ ядро оператора D_3 состоит из инфинитезимальных конформных преобразований многообразия (M, g) .

2.2. В уточнении результата Ж.-П. Бургиньона (см. [21]) нами было доказано, что базис естественных дифференциальных операторов первого порядка на внешних дифференциальных r -формах состоит из трёх операторов вида

$$D_1 = \frac{1}{r+1}d, \quad D_2 = \frac{1}{n-r+1}g \wedge d^*, \quad D_3 = \nabla - \frac{1}{r+1}d - \frac{1}{n-r+1}g \wedge d^*,$$

где

$$\begin{aligned} (g \wedge d^*\omega)(X_0, X_1, \dots, X_r) &= \\ &= \sum_{\alpha=2}^r (-1)^\alpha g(X_0, X_\alpha)(d^*\omega)(X_1, \dots, X_{\alpha-1}, X_{\alpha+1}, \dots, X_r) \end{aligned}$$

для произвольных r -формы ω и векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_r$ на (M, g) .

Ядро оператора D_1 состоит из *замкнутых внешних дифференциальных r -форм*, ядро оператора D_2 состоит из *козамкнутых внешних дифференциальных r -форм*, и наконец, ядро оператора D_3 состоит из *конформно киллинговых внешних дифференциальных r -форм*, или, по другой терминологии, конформно киллинговых кососимметрических тензоров порядка r (см. [12, 24]), которые составляют три векторных пространства, $\mathbf{D}^r(M, \mathbf{R})$, $\mathbf{F}^r(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{T}^r(M, \mathbf{R})$ соответственно.

Замечание. Конформно киллинговы кососимметрические тензоры были введены в рассмотрение Ш. Тачибаной более сорока лет назад (см. [20]) как обобщение конформно киллинговых векторных полей (или, по другой терминологии, инфинитезимальных конформных преобразований). Им же были описаны их свойства. Дальнейшее развитие теории конформно киллинговых тензоров нашла во множестве других работ (см., например, [12, 15, 21] и др.).

2.3. В отсутствие требования компактности для многообразия (M, g) условие

$$\omega \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$$

характеризует r -форму ω как гармоническую (см. [11]). Следовательно, пространство гармонических r -форм может быть определено как

$$\mathbf{H}^r(M, \mathbf{R}) = \mathbf{D}^r(M, \mathbf{R}) \cap \mathbf{F}^r(M, \mathbf{R}).$$

Условие

$$\omega \in \text{Ker } D_3 \cap \text{Ker } D_2$$

характеризует r -форму ω как козамкнутую конформно киллингову r -форму. Козамкнутую конформно киллингову форму называют ещё *тензором Киллинга*

(см., например, [6, 12, 23]). Векторное пространство козамкнутых конформно киллинговых r -форм определяется тогда как

$$\mathbf{K}^r(M, \mathbf{R}) = \mathbf{F}^r(M, \mathbf{R}) \cap \mathbf{T}^r(M, \mathbf{R}).$$

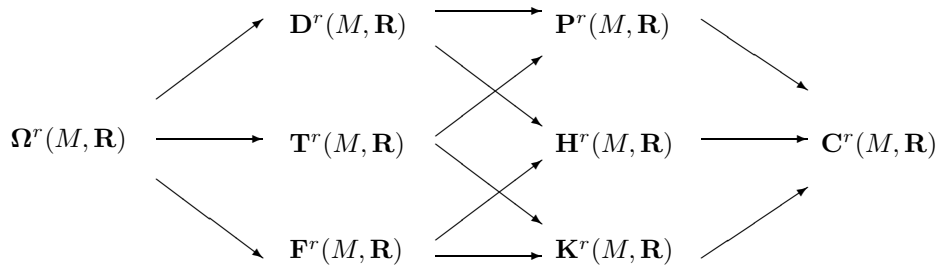
Условие

$$\omega \in \text{Ker } D_1 \cap \text{Ker } D_2$$

характеризует r -форму ω как замкнутую конформно киллингову r -форму. Иногда замкнутые конформно киллинговы формы называют *планарными*. В итоге векторное пространство замкнутых конформно киллинговых r -форм мы можем определить как

$$\mathbf{P}^r(M, \mathbf{R}) = \mathbf{D}^r(M, \mathbf{R}) \cap \mathbf{T}^r(M, \mathbf{R}).$$

2.4. Обозначим на (M, g) , как и раньше, векторное пространство всех внешних дифференциальных r -форм через $\Omega^r(M, \mathbf{R})$, а векторное пространство параллельных в связности Леви-Чивита ∇ r -форм — через $\mathbf{C}^r(M, \mathbf{R})$. В этом случае мы можем составить следующую диаграмму включений (см. [8, 19, 21]):



Здесь, например, запись $\mathbf{F}^p(M, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{K}^p(M, \mathbf{R})$ означает, что векторное пространство $\mathbf{K}^p(M, \mathbf{R})$ является подпространством векторного пространства $\mathbf{F}^p(M, \mathbf{R})$.

3. Числа Бетти

В этом разделе мы суммируем известные сведения о числах Бетти замкнутого риманова многообразия.

3.1. Пусть (M, g) — n -мерное компактное ориентированное риманово многообразие. Рассмотрим пространство C^∞ -сечений векторного расслоения $\Lambda^r M$ как векторное пространство $\Omega^r(M, \mathbf{R})$ всех дифференциальных форм r -форм ω на римановом многообразии (M, g) .

Внешняя дифференциальная r -форма ω называется *гармонической*, если $\Delta\omega = 0$, где $\Delta = d^*d + dd^*$ является лапласианом Ходжа—де Рама, действующим на внешних дифференциальных формах (см. [1, 4]).

На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) условие $\omega \in \text{Ker } \Delta$ равносильно (см. [11]) условию $\omega \in \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$, поэтому гармонические r -формы, определяемые условием $\omega \in \text{Ker } \Delta$, по-прежнему будут составлять векторное пространство $\mathbf{H}^r(n, \mathbf{R})$.

Важным свойством лапласиана Ходжа—де Рама является его коммутируемость $*\Delta = \Delta*$ с оператором Ходжа $*$ (см. [1, 4]). Отсюда, в частности, следует, что если ω является гармонической r -формой, то $(n-r)$ -форма $*\omega$ будет также гармонической, т. е. отображение $*$: $\mathbf{H}^r(n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{H}^{n-r}(n, \mathbf{R})$ является изоморфизмом. Это означает справедливость равенства $b_r = b_{n-r}$, которое хорошо известно как *теорема двойственности Пуанкаре для чисел Бетти*.

3.2. Для риманова многообразия (M, g) произвольная форма $\omega \in \mathbf{H}^r(n, \mathbf{R})$ останется гармонической r -формой после конформного преобразования метрики $\hat{g} = e^{2f}g$ для произвольной дифференцируемой функции f на (M, g) , если $n = 2r$ (см. [1]). Это означает, что числа Бетти b_r являются конформными скалярными инвариантами риманова многообразия (M, g) размерности $n = 2r$.

3.3. *Грубый лапласиан Бохнера* определяется как $\nabla^*\nabla$ для связности Леви-Чивита ∇ в расслоении $\Lambda^r M$ внешних дифференциальных r -форм и формально сопряжённого ∇ оператора ∇^* (см. [1, 4]). Грубый лапласиан Бохнера и лапласиан Ходжа—де Рама связаны классической формулой Бохнера—Вайценбока $\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + F_r(\omega)$, где $F_r(\omega)$ — квадратичная форма, коэффициентами которой являются компоненты тензора кривизны и Риччи многообразия (M, g) (см., например, [1, 18]).

Из формулы Бохнера—Вайценбока $\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + F_r(\omega)$ на основании теоремы Грина

$$\int_M \operatorname{div} X \, dv = 0$$

(см. [11]) непосредственно следует интегральная формула

$$\int_M g(\Delta\omega, \omega) \, dv = \int_M \|\nabla\omega\|^2 \, dv + \int_M g(F_r(\omega), \omega) \, dv.$$

Если при этом r -форма ω является гармонической, то из этой интегральной формулы мы выводим (см. [18])

$$0 = \int_M \|\nabla\omega\|^2 \, dv + \frac{1}{4} \int_M \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \|\Theta_{\alpha}, \omega\|^2 \, dv, \quad (2)$$

где λ_{α} — собственные значения стандартного симметрического риманова оператора кривизны $\bar{R}: \Lambda^2(TM) \rightarrow \Lambda^2(TM)$, задаваемого равенством

$$g(\bar{R}(X \wedge Y), Z \wedge U) = g(R(X, Y)U, Z)$$

для произвольных векторных полей X, Y, Z и U , тензора кривизны R многообразия (M, g) и форм Θ_{α} , дуальных собственным векторам оператора кривизны $\bar{R}$.

Скажем, что (M, g) имеет положительный оператор кривизны, если собственные значения $\bar{R}$ положительные. В этом случае будем писать $\bar{R} > 0$.

Пусть (M, g) имеет положительный оператор кривизны, тогда $\lambda_{\alpha} > 0$ и из формулы (2) следует, что $\nabla\omega = 0$ и $[\Theta_{\alpha}, \omega] = 0$ для всех α . В этом случае ω

должна обратиться в нуль для всех r , не равных 0 и n (см. [18]). Следовательно, $b_r = 0$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$. В частности, для компактного риманова многообразия постоянной положительной секционной кривизны или для компактного конформно плоского ориентированного риманова многообразия с положительно определённым тензором Риччи $b_r = 0$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Это наиболее известные результаты «техники Бохнера» (см., например, [8, 11, 18]).

3.4. Пусть (M, g) — n -мерное замкнутое ориентированное риманово многообразие. Для такого риманова многообразия (M, g) векторное пространство $\Omega^r(M, \mathbf{R})$ имеет ортогональное (относительно глобального скалярного произведения) разложение (см. [3, 4])

$$\Omega^r(M, \mathbf{R}) = \text{Ker } \Delta \oplus d(C^\infty \Lambda^{r-1} M) \oplus d^*(C^\infty \Lambda^{r+1} M),$$

где $\text{Ker } \Delta := \mathbf{H}^r(n, \mathbf{R})$ и имеют место ортогональные разложения следующего вида (см. [3]):

$$\text{Ker } \Delta = \text{Im } d^* \oplus \text{Ker } d,$$

$$\text{Ker } d^* = \text{Im } d^* \oplus \text{Ker } \Delta, \quad \text{Ker } d = \text{Im } d \oplus \text{Ker } \Delta.$$

Если (M, g) — риманово многообразие с положительным оператором кривизны, будем иметь

$$\Omega^r(M, \mathbf{R}) = d(C^\infty \Lambda^{r-1} M) \oplus d^*(C^\infty \Lambda^{r+1} M)$$

для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$, что означает, что

$$\Omega^r(M, \mathbf{R}) = \mathbf{D}^r(M, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{F}^r(M, \mathbf{R}), \quad (3)$$

где $\mathbf{D}^r(M, \mathbf{R})$ и $\mathbf{F}^r(M, \mathbf{R})$ — векторные пространства замкнутых и козамкнутых r -форм на (M, g) соответственно.

4. Числа Тачибаны

4.1. Пусть (M, g) — n -мерное компактное риманово многообразие. В [7] мы определили оператор D_3^* , формально сопряжённый естественному базисному оператору D_3 , как оператор

$$D_3^* = \nabla^* - \frac{1}{r+1} d^* - \frac{1}{n-r+1} d \circ \text{trace},$$

сконструировали *грубый лапласиан* $D_3^* D_3$ вида

$$D_3^* D_3 = \frac{1}{r(r+1)} \left(\nabla^* \nabla - \frac{1}{r+1} d^* d - \frac{1}{n-r+1} d d^* \right)$$

и описали его свойства. В частности (см. также [8]), мы получили, что

$$\begin{aligned} \omega \in \mathbf{T}^r(M, \mathbf{R}) &\iff \omega \in \text{Ker}(D_3^* D_3), \\ \omega \in \mathbf{K}^r(M, \mathbf{R}) &\iff \omega \in \text{Ker}(D_3^* D_3) \cap \text{Ker } d^*, \\ \omega \in \mathbf{P}^r(M, \mathbf{R}) &\iff \omega \in \text{Ker}(D_3^* D_3) \cap \text{Ker } d. \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор D_3 является типичным примером так называемого оператора Стейна—Вейса, рассмотренного Т. Брансоном в [13]. В частности, в [13] было доказано, что такого рода операторы являются эллиптическими. Поэтому $D_3^* D_3$ также является эллиптическим оператором (см. также [20]), и на компактном римановом многообразии (M, g) его ядро, как это следует из общей теории (см. [1]), должно иметь конечную размерность. На этом основании заключаем, что

$$\dim \mathbf{T}^r(M, \mathbf{R}) = \dim_{\mathbf{R}} (\text{Ker } D_3^* D_3) < \infty.$$

Более того, используя последний факт, заключаем также, что $\dim \mathbf{K}^r(M, \mathbf{R}) < \infty$ и $\dim \mathbf{P}^r(M, \mathbf{R}) < \infty$.

Определение. Числом Тачибаны t_r n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) называется размерность пространства всех конформно киллинговых r -форм $(1 \leq r \leq n-1)$ на (M, g) .

Число $k_r = \dim \mathbf{K}^r(M, \mathbf{R})$ назовём *числом Киллинга*, а $p_r = \dim \mathbf{P}^r(M, \mathbf{R})$ — *планарным числом* риманова многообразия (M, g) .

4.2. Зафиксируем ориентацию риманова многообразия (M, g) и рассмотрим действие оператора Ходжа

$$*: \Omega^r(M, \mathbf{R}) \cong \Omega^{n-r}(M, \mathbf{R}).$$

Очевидны следующие два изоморфизма:

$$*: \Omega^r(M, \mathbf{R}) \cong \Omega^{n-r}(M, \mathbf{R}), \quad *: \mathbf{C}^r(M, \mathbf{R}) \cong \mathbf{C}^{n-r}(M, \mathbf{R}).$$

Благодаря (1) мы имеем также следующий изоморфизм:

$$*: \mathbf{F}^r(M, \mathbf{R}) \cong \mathbf{D}^{n-r}(M, \mathbf{R}). \quad (5)$$

В свою очередь, из (5) мы выводим хорошо известный изоморфизм

$$*: \mathbf{H}^r(M, \mathbf{R}) \cong \mathbf{H}^{n-r}(M, \mathbf{R})$$

векторных пространств гармонических форм. Изоморфизм (см. [5, 15])

$$*: \mathbf{T}^r(M, \mathbf{R}) \cong \mathbf{T}^{n-r}(M, \mathbf{R}) \quad (6)$$

векторных пространств конформно киллинговых форм также хорошо известен. Из (5) и (6) выводим следующий изоморфизм (см. также [21]):

$$*: \mathbf{P}^r(M, \mathbf{R}) \cong \mathbf{K}^{n-r}(M, \mathbf{R}). \quad (7)$$

Из (6) и (7) мы заключаем, что t_r , k_r и p_r обладают свойствами дуальности вида $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$. Эти равенства являются аналогами теоремы двойственности Пуанкаре для чисел Бетти. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть (M, g) — компактное ориентированное риманово многообразие размерности $n \geq 2$. Числа Тачибаны t_r , числа Киллинга k_r и числа планарности p_r многообразия (M, g) обладают свойствами дуальности вида $t_r = t_{n-r}$ и $k_r = p_{n-r}$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Заметим, что на компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с положительной постоянной секционной кривизной нет гармонических r -форм $(1 \leq r \leq n-1)$, и мы имеем разложение (3). Используя это разложение и условие (4), М. Кора доказал в [15] справедливость следующего разложения векторного пространства конформно киллинговых r -форм:

$$\mathbf{T}^r(M, \mathbf{R}) = \mathbf{K}^r(M, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{P}^r(M, \mathbf{R}).$$

В итоге будет справедливой следующая теорема.

Теорема. Пусть (M, g) — n -мерное $(n \geq 2)$ компактное ориентированное риманово многообразие с положительной постоянной секционной кривизной. Тогда числа Тачибаны t_r многообразия допускают разложение $t_r = k_r + p_r$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$.

4.3. Одно из важных свойств конформно киллинговых форм является их конформная инвариантность (см. [9, 12]), т. е. если рассмотреть тождественное конформное отображение $\text{id}: (M, g) \rightarrow (M, \hat{g})$, такое что $\hat{g} := e^{2f}g$ для любой дифференцируемой функции f на (M, g) , то для любой конформно киллинговой r -формы ω форма $\hat{\omega} := e^{(r+1)f}\omega$ будет конформно киллинговой r -формой риманова многообразия $(M, \hat{g})$ с метрикой $\hat{g} := e^{2f}g$.

С другой стороны, если рассмотреть тождественное проективное отображение $\text{id}: (M, g) \rightarrow (M, \hat{g})$, т. е. отображение, сохраняющее геодезические, то для каждой замкнутой (козамкнутой) конформно киллинговой r -формы ω форма $\hat{\omega} := e^{-(r+1)f}\omega$, где $f = (n+1)^{-1} \ln \sqrt{\det g / \det \hat{g}}$ будет замкнутой (соответственно козамкнутой) конформно киллинговой r -формой риманова многообразия $(M, \hat{g})$ с проективно эквивалентной метрикой $\hat{g}$ (см. [6, 9]).

В результате мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть (M, g) — компактное ориентированное риманово многообразие размерности $n \geq 2$. Числа Тачибаны t_r являются конформными скалярными инвариантами, а числа Киллинга k_r и числа планарности p_r являются проективными скалярными инвариантами многообразия (M, g) .

Эта теорема является аналогом утверждения о конформной инвариантности чисел Бетти.

5. О существовании чисел Тачибаны

В этом разделе мы приводим два примера римановых многообразий с ненулевыми числами Тачибаны.

5.1. Пусть E^{n+1} — евклидово пространство с ортогональной системой координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$. Тогда произвольная козамкнутая конформно киллингова 2-форма ω в E^{n+1} имеет компоненты $\omega_{i_1 i_2} = A_{k i_1 i_2} x^k + B_{i_1 i_2}$, где $A_{k i_1 i_2}$ и $B_{i_1 i_2}$ являются компонентами кососимметричных постоянных тензоров и $k, i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n$ (см. [23]).

Пусть $S^n: (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1$ — n -мерная гиперсфера единичного радиуса евклидова пространства E^{n+1} . Ш. Тачибана доказал в [23], что $\omega_{i_1 i_2} = A_{k i_1 i_2} x^k$ являются компонентами киллинговой 2-формы, глобально заданной на S^n . Теперь на основании этого мы можем утверждать, что число Киллинга k_2 не равно нулю для произвольной единичной гиперсферы S^n евклидова $(n+1)$ -мерного пространства E^{n+1} . Одновременно из равенства $t_2 = k_2 + p_2$ имеем $t_2 \geq k_2 > 0$ и, следовательно, $t_2 \neq 0$.

В дополнение к сказанному в [21] мы доказали следующее. Пусть (M, g) — n -мерное локально плоское риманово многообразие с ортогональной системой координат $x^1, \dots, x^n$. Тогда произвольная козамкнутая конформно киллингова r -форма ω имеет компоненты $\omega_{i_1 i_2 \dots i_r} = A_{k i_1 i_2 \dots i_r} x^k + B_{i_1 i_2 \dots i_r}$, где $A_{k i_1 i_2 \dots i_r}$ и $B_{i_1 i_2 \dots i_r}$ являются компонентами постоянных кососимметричных тензоров и $k, i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$. В [10] вслед за Ш. Тачибаной мы построили пример козамкнутой конформно киллинговой r -формы ($1 \leq r \leq n-1$) $\omega_{i_1 i_2 \dots i_r} = A_{k i_1 i_2 \dots i_r} x^k$, глобально заданной на единичной гиперсфере S^n . Мы можем заключить, что число Киллинга k_r ($1 \leq r \leq n-1$) не равно нулю на произвольной единичной гиперсфере S^n евклидова $(n+1)$ -мерного пространства E^{n+1} . Более того, $t_r \neq 0$, поскольку $t_r = k_r + p_r > 0$ для всех $r = 1, \dots, n-1$.

Теорема. Числа Тачибаны t_r ($1 \leq r \leq n-1$) не равны нулю на n -мерной единичной сфере S^n евклидова пространства E^{n+1} .

5.2. Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) — римановы многообразия, для которых $\dim M_1 = 1$ и $\dim M_{n-1} = n-1$. Пусть далее f — положительная гладкая функция на M_1 . Искривлённым произведением $M_1 \times_f M_2$ римановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2) является многообразие (см. [1]) топологического произведения $M = M_1 \times M_2$ с метрикой $g = g_1 \times_f g_2$, определяемой равенством $g_1 \times_f g_2 = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1) \pi_2^* g_2$, где $\pi_1: M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ и $\pi_2: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ — естественные проекции на M_1 и M_2 соответственно. Если оба многообразия (M_1, g_1) и (M_2, g_2) компактные ориентированные римановы, то их искривлённое произведение $M_1 \times_f M_2$ также является компактным ориентированным римановым многообразием.

Для произвольной не обращающейся в нуль дифференцируемой функции $\lambda: M_1 \rightarrow \mathbf{R}$ форма $\omega = \text{grad } \lambda$ является замкнутой конформно киллинговой 1-формой (или, по другой терминологии, *конциркулярным векторным полем*), глобально заданной на $S^1 \times_f S^{n-1}$ (см. [16]). Поэтому мы можем заключить, что $p_1 = k_{n-1} \geq 1$. Тогда $t_1 \geq 1$ и $t_{n-1} \geq 1$, поскольку $t_1 \geq p_1$ и $t_{n-1} \geq k_{n-1}$.

Теорема. На искривлённом произведении единичных сфер $S^1 \times_f S^{n-1}$ $t_1 \geq 1$ и $t_{n-1} \geq 1$.

6. Теорема исчезновения для чисел Тачибаны

В этом разделе мы докажем теорему исчезновения для чисел Тачибаны компактного ориентированного риманова многообразия с отрицательно опре-

делённым оператором кривизны, используя для этого «технику Бохнера» (см., например, [8, 11, 18]).

6.1. Пусть (M, g) — n -мерное компактное риманово многообразие. Из равенства

$$D_3^* D_3 \omega = \frac{1}{r(r+1)} \left(\nabla^* \nabla \omega - \frac{1}{r+1} d^* d \omega - \frac{1}{n-r+1} dd^* \omega \right)$$

для произвольной внешней дифференциальной r -формы ω на основании теоремы Грина выводим интегральную формулу

$$r(r+1) \int_M \|D_3 \omega\|^2 dv = \int_M \|\nabla \omega\|^2 dv - \frac{1}{r+1} \int_M \|d\omega\|^2 dv - \frac{1}{n-r+1} \int_M \|d^* \omega\|^2 dv. \quad (8)$$

С другой стороны, из классической формулы Бохнера—Вайценбока $\Delta \omega = \nabla^* \nabla \omega + F_r(\omega)$ интегрированием по многообразию (M, g) мы получаем вторую интегральную формулу (см. [16])

$$\int_M \|d\omega\|^2 dv + \int_M \|d^* \omega\|^2 dv = \int_M \|\nabla \omega\|^2 dv + \frac{1}{4} \int_M \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \|\Theta_{\alpha}, \omega\|^2 dv. \quad (9)$$

Наконец, из (8) и (9) выводим интегральную формулу

$$\begin{aligned} r(r+1) \int_M \|D_3 \omega\|^2 dv &= \\ &= \frac{r}{r+1} \int_M \|d\omega\|^2 dv + \frac{n-r}{n-r+1} \int_M \|d^* \omega\|^2 dv - \frac{1}{4} \int_M \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \|\Theta_{\alpha}, \omega\|^2 dv. \end{aligned} \quad (10)$$

6.2. Рассмотрим компактное ориентированное риманово многообразие (M, g) с отрицательно определённым оператором кривизны $\bar{R}$, что означает выполнение неравенств $\lambda_{\alpha} < 0$ для всех α . Более того, положим в (10) r -форму ω конформно киллинговой. Тогда из (10) будет следовать, что $\nabla \omega = 0$ и $[\Theta_{\alpha}, \omega] = 0$ для всех α . В этом случае r -форма ω должна обратиться в нуль, если только r не равно 0 или n (см. [18]). Это означает, что не существует ненулевых конформно киллинговых r -форм ($1 \leq r \leq n-1$) на n -мерном компактном ориентированном римановом многообразии с отрицательно определённым оператором кривизны (см. также [19]). Следовательно, числа Тачибаны t_r должны быть равны нулю, если только $r = 1, \dots, n-1$. Доказана следующая теорема.

Теорема. Числа Тачибаны t_r ($1 \leq r \leq n-1$) равны нулю для n -мерного компактного ориентированного риманова многообразия (M, g) с отрицательно определённым оператором кривизны.

Из теоремы вытекает, в частности, что для компактного риманова многообразия постоянной отрицательной секционной кривизны или для компактного конформно плоского ориентированного риманова многообразия с отрицательно определённым тензором Риччи $t_r = 0$ для всех $r = 1, 2, \dots, n-1$ (см. [8]).

Эта теорема является аналогом теоремы исчезновения для чисел Бетти.

7. Две открытые проблемы

7.1. Найти числа Тачибаны t_r для $r = 1, 2, \dots, n-1$ на n -мерной единичной сфере S^n евклидова пространства E^{n+1} .

7.2. Установить, выполняются ли равенства $t_r = k_r + p_r$ для $r = 1, 2, \dots, n-1$ на n -мерном компактном римановом многообразии (M, g) с положительным оператором кривизны, метрика g которого не имеет постоянной положительной секционной кривизны.

Литература

- [1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Наука, 1990.
- [2] Бургиньон Ж.-П. Формулы Вейценбека в размерности 4 // Четырёхмерная риманова геометрия. — М.: Мир, 1985. — Р. 260—279.
- [3] Новиков С. П. Топология // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 12. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. — С. 5—282.
- [4] Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М.: ИЛ, 1956.
- [5] Степанов С. Е. Об изоморфизме пространств конформно киллинговых форм // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2000. — Вып. 31. — С. 81—84.
- [6] Степанов С. Е. О тензоре Киллинга—Яно // Теор. и матем. физ. — 2003. — Т. 134, № 3. — С. 382—387.
- [7] Степанов С. Е. Новый сильный лапласиан на дифференциальных формах // Мат. заметки. — 2004. — Т. 76, вып. 3. — С. 452—458.
- [8] Степанов С. Е. Теоремы исчезновения в аффинной, римановой и лоренцевой геометриях // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 1. — С. 35—84.
- [9] Степанов С. Е. О некоторых конформных и проективных скалярных инвариантах риманова многообразия // Мат. заметки. — 2006. — Т. 80, вып. 6. — С. 902—907.
- [10] Степанов С. Е., Исаев В. М. Примеры киллинговой и конформно киллинговой форм // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2001. — Вып. 32. — С. 57—72.
- [11] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — М.: ИЛ, 1957.
- [12] Benn I. M., Charlton P. P. Dirac symmetry operators from conformal Killing—Yano tensors // Classical Quantum Gravity. — 1997. — Vol. 14. — P. 1037—1042.
- [13] Branson T. Stein—Weiss operators and ellipticity // J. Funct. Anal. — 1997. — Vol. 151, no. 2. — P. 334—383.
- [14] Kashiwada T. On conformal Killing tensor // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. — 1968. — Vol. 19. — P. 67—74.
- [15] Kora M. On conformal Killing forms and the proper space of Δ for p -forms // Math. J. Okayama Univ. — 1980. — Vol. 22. — P. 195—204.
- [16] Mikeš J. On existence of nontrivial global geodesic mappings of n -dimensional compact surfaces of revolution // Proc. Conf. Differential Geometry and Its Applications, August 27 — September 2, 1989, Brno, Czechoslovakia. — Singapore: World Scientific Press, 1990. — P. 129—137.

- [17] Palais R. S. Seminar on the Atiyah—Singer index theorem. Annals of Math. Studies. No. 57. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1965.
- [18] Petersen P. Riemannian Geometry. — New York: Springer, 1997. — (Grad. Texts Math.; Vol. 171).
- [19] Stepanov S. E. On a generalization of Kashiwada theorem // Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ. Press, 1999. — P. 162—167.
- [20] Stepanov S. E. New theorem of duality and its applications // Новейшие проблемы теории поля. 1999—2000. — Казань: Изд-во КГУ, 2000. — С. 373—376.
- [21] Stepanov S. E. On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field // J. Geom. Phys. — 2000. — Vol. 33. — P. 191—209.
- [22] Stepanov S. E. On analogue of the Poincaré duality theorem for Betti Numbers // Abstracts of the Int. Conf. “Differential Equations and Topology” dedicated to the Centennial Anniversary of L. S. Pontryagin, Moscow, June 17—22, 2008. — Moscow: Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, 2008. — P. 456—457.
- [23] Tachibana Sh. On Killing tensor in a Riemannian space // Tôhoku Math. J. — 1968. — Vol. 20. — P. 257—264.
- [24] Tachibana Sh. On conformal Killing tensor in a Riemannian space // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21. — P. 56—64.