Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой*

Е. И. БУНИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: HelenBunina@yandex.ru

УДК 512.54

Ключевые слова: группы Шевалле над кольцами, локальные кольца без 1/2, автоморфизм.

Аннотация

В данной работе мы доказываем, что каждый автоморфизм (элементарной) группы Шевалле типа A_l, D_l или E_l ранга больше двух над коммутативным локальным кольцом с необратимой двойкой стандартен, т. е. является композицией кольцевого, внутреннего, центрального и диаграммного автоморфизмов.

Abstract

E. I. Bunina, Automorphisms of Chevalley groups of types A_l, D_l, E_l over local rings without 1/2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 47—80.

In the given paper, we prove that every automorphism of a Chevalley group of type A_l, D_l, or E_l, $l \geqslant 3$, over a commutative local ring without 1/2 is standard, i.e., it is a composition of ring, inner, central, and graph automorphisms.

Введение

Пусть G_π — это схема Шевалле—Демазюра, ассоциированная с неприводимой системой корней Φ типов A_l ($l \geqslant 3$), D_l ($l \geqslant 4$), E_l ($l = 6, 7, 8$); $G_\pi(\Phi, R)$ — множество точек G_π со значениями в R; $E_\pi(\Phi, R)$ — элементарная подгруппа в $G_\pi(\Phi, R)$, где R — коммутативное кольцо с единицей. В данной работе мы описываем автоморфизмы групп $G_\pi(\Phi, R)$ и $E_\pi(\Phi, R)$ над локальными коммутативными кольцами с необратимой двойкой.

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Р. Стейнбергом [58] для конечного случая и Дж. Хамфри [49] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы А. Бореля и Дж. Титса [28], Р. Картера и Ю Чена [32], Ю Чена [33, 34, 36, 37], Э. Абе [23], А. Клячко [51].

*Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-01048.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 47—80.

В [6] было показано, что автоморфизмы присоединённых элементарных групп Шевалле с системами корней A_l, D_l, E_l, $l \geqslant 2$, над локальными кольцами с обратимой двойкой представляются в виде композиции кольцевого автоморфизма и *автоморфизма-сопряжения*, где автоморфизмом-сопряжением мы называем сопряжение элементов группы Шевалле в присоединённом представлении с помощью некоторой матрицы из нормализатора этой группы в $\mathrm{GL}(V)$. В [5] с помощью результатов работы [6] доказывалось, что любой автоморфизм произвольной (элементарной) группы Шевалле описанного типа стандартен, т. е. представляется в виде композиции кольцевого, внутреннего, центрального и диаграммного автоморфизмов. В этой же работе была получена теорема об описании нормализатора группы Шевалле в присоединённом представлении, верная в том числе для локальных колец с необратимой двойкой.

В [3, 4, 30] теми же методами было показано, что автоморфизмы групп Шевалле с системами корней F_4, G_2, B_l, $l \geqslant 2$, над локальными кольцами с обратимой двойкой (в случае системы корней G_2 ещё и с обратимой тройкой) стандартны.

В данной работе мы рассматриваем автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l, $l \geqslant 3$, над локальными кольцами с необратимой двойкой и доказываем, что каждый такой автоморфизм есть композиция кольцевого, внутреннего, центрального и диаграммного. При этом мы используем результаты работы [5]. Результаты данной работы могут помочь закрыть вопрос об автоморфизмах групп Шевалле над коммутативными кольцами без $1/2$.

Заметим, что хотя мы рассматриваем одновременно случаи систем корней A_l, D_l, E_l, случай A_l был полностью рассмотрен в [18, 52, 67], причём именно без условия обратимости двойки в кольце.

Автор выражает благодарность Н. А. Вавилову, А. А. Клячко и А. В. Михалёву за ценные советы, замечания и консультации.

1. Определения и формулировка основной теоремы

Мы фиксируем систему корней Φ, ранг которой больше единицы (подробные сведения о системах корней и их свойствах можно найти в [29, 48]). Пусть имеется полупростая комплексная алгебра Ли $\mathcal{L}$ типа Φ с картановской подалгеброй $\mathcal{H}$ (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли можно найти в [48]).

Можно выбрать базис $\{h_1, \ldots, h_l\}$ в $\mathcal{H}$ и для каждого $\alpha \in \Phi$ элементы $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$ так, что $\{h_i; x_\alpha\}$ образуют базис в $\mathcal{L}$ и для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов того же базиса.

Введём элементарные группы Шевалле (см., например, [59]).

Пусть $\mathcal{L}$ — полупростая алгебра Ли (над $\mathbb{C}$) с системой корней Φ, $\pi\colon \mathcal{L} \to \mathrm{gl}(V)$ — её конечномерное точное представление (размерности n). Если $\mathcal{H}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathcal{L}$, то функционал $\lambda \in \mathcal{H}^*$ называется *весом* данного представления, если существует ненулевой вектор $v \in V$ (который называется *весовым вектором*), такой что $\pi(h)v = \lambda(h)v$ для любых $h \in \mathcal{H}$.

В пространстве V существует такой базис из весовых векторов, что все операторы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ для $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Этот базис называется *базисом Шевалле*. Целочисленная матрица также может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть R — такое кольцо. Рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R, матрицы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ при $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $\mathrm{M}_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$\exp(tx_\alpha) = x_\alpha(t) = 1 + t\pi(x_\alpha) + \frac{1}{2}t^2\pi(x_\alpha)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}t^k\pi(x_\alpha)^k + \ldots .$$

Так как все матрицы $\pi(x_\alpha)$ нильпотентны, этот ряд конечен. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами*. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(R^n)$, порождённая всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной группой Шевалле* (обозначение $E_\pi(\Phi, R)$). Действие элементов $x_\alpha(t)$ на базисе Шевалле описано в [31, 66].

Все веса данного представления (по сложению) порождают решётку (свободную абелеву группу, в которой любой $\mathbb{Z}$-базис также является $\mathbb{C}$-базисом в $\mathcal{H}^*$), называемую *решёткой весов* Λ_π. Элементарные группы Шевалле определяются даже не представлением соответствующей алгебры Ли, а просто её *решёткой весов*. Точнее, с точностью до абстрактного изоморфизма элементарная группа Шевалле полностью определяется системой корней Φ, коммутативным кольцом R с единицей и решёткой весов Λ_π.

Среди всех решёток выделим решётку, соответствующую присоединённому представлению: она порождается всеми корнями (это *решётка корней* Λ_{ad}). Соответствующая элементарная группа Шевалле называется *присоединённой*.

Введём теперь группы Шевалле (см. [2, 31, 38, 40, 59, 64, 66], а также дальнейшие ссылки в этих работах).

Рассмотрим полупростые алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Это в точности элементарные группы Шевалле $E_\pi(\Phi, K)$ (см. [59, § 5]).

Все эти группы можно определить в группе $\mathrm{SL}_n(K)$ как множество общих нулей полиномов от матричных коэффициентов a_{ij} с целочисленными коэффициентами (например, в случае системы корней C_l и универсального представления имеем $n = 2l$ и полиномы, соответствующие условию $(a_{ij})Q(a_{ji}) - Q = 0$). Ясно, что умножение и взятие обратного элемента также описываются полиномами с целыми коэффициентами. Таким образом, эти полиномы можно рассматривать как полиномы над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть некоторая элементарная группа Шевалле E над $\mathbb{C}$ определена в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ полиномами $p_1(a_{ij}), \ldots, p_m(a_{ij})$. Для коммутативного кольца R с единицей рассмотрим группу

$$G(R) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(R) \mid \tilde{p}_1(a_{ij}) = 0, \ldots, \tilde{p}_m(a_{ij}) = 0\},$$

где $\tilde{p}_1(\ldots),\ldots,\tilde{p}_m(\ldots)$ — полиномы, имеющие те же коэффициенты, что и $p_1(\ldots),\ldots,p_m(\ldots)$, но рассматриваемые над R. Эта группа называется *группой Шевалле* $G_\pi(\Phi,R)$ типа Φ над кольцом R, и для любого алгебраически замкнутого поля K она совпадает с элементарной группой Шевалле.

Подгруппа диагональных (в стандартном базисе из весовых векторов) матриц в группе Шевалле $G_\pi(\Phi,R)$ называется *стандартным максимальным тором* группы $G_\pi(\Phi,R)$ и обозначается через $T_\pi(\Phi,R)$. Эта группа изоморфна группе $\mathrm{Hom}(\Lambda_\pi,R^*)$.

Обозначим через $h(\chi)$ элементы тора $T_\pi(\Phi,R)$, соответствующие гомоморфизму $\chi\in\mathrm{Hom}(\Lambda_\pi,R^*)$. В частности, $h_\alpha(u)=h(\chi_{\alpha,u})$ ($u\in R^*$, $\alpha\in\Phi$), где

$$\chi_{\alpha,u}\colon \lambda\mapsto u^{\langle\lambda,\alpha\rangle}\quad(\lambda\in\Lambda_\pi).$$

Заметим, что условие

$$G_\pi(\Phi,R)=E_\pi(\Phi,R)$$

не выполняется даже в случае полей, не являющихся алгебраически замкнутыми. Покажем различие между группами Шевалле и их элементарными подгруппами в случае, когда кольцо R полулокально. Тогда $G_\pi(\Phi,R)=E_\pi(\Phi,R)T_\pi(\Phi,R)$ (см. [21]), а элементы $h(\chi)$ связаны с элементарными порождающими формулой

$$h(\chi)x_\beta(\xi)h(\chi)^{-1}=x_\beta(\chi(\beta)\xi). \tag{1}$$

В случае полулокальных колец из формулы (1) видно, что

$$[G(\Phi,R),G(\Phi,R)]\subseteq E(\Phi,R).$$

Для систем корней A_l, D_l, E_l, $l\geqslant 2$, которые будут рассматриваться в этой работе, имеет место равенство

$$x_{\alpha+\beta}(t)=[x_\alpha(t),x_\beta(1)],\quad \alpha+\beta\in\Phi,$$

откуда следует, что

$$[G(\Phi,R),G(\Phi,R)]=[E(\Phi,R),E(\Phi,R)]=E(\Phi,R).$$

Определим четыре типа автоморфизмов группы Шевалле $G_\pi(\Phi,R)$, которые назовём *стандартными*.

Центральные автоморфизмы. Пусть $C_G(R)$ — центр группы $G_\pi(\Phi,R)$, $\tau\colon G_\pi(\Phi,R)\to C_G(R)$ — гомоморфизм групп. Тогда отображение $x\mapsto\tau(x)x$ из $G_\pi(\Phi,R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi,R)$. Будем обозначать его τ и называть *центральным автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi,R)$.

Кольцевые автоморфизмы. Пусть $\rho\colon R\to R$ — автоморфизм кольца R. Отображение $x\mapsto\rho(x)$ из $G_\pi(\Phi,R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi,R)$. Будем обозначать его той же буквой ρ и называть *кольцевым автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi,R)$. Заметим, что для всех $\alpha\in\Phi$ и $t\in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha\big(\rho(t)\big)$.

Внутренние автоморфизмы. Пусть S — некоторое кольцо, содержащее R, g — элемент группы $G_\pi(\Phi, S)$, нормализующий подгруппу $G_\pi(\Phi, R)$. Тогда отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$. Будем обозначать его i_g и называть *внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом* $g \in G_\pi(\Phi, S)$. Если $g \in G_\pi(\Phi, R)$, назовём i_g *строго внутренним* автоморфизмом.

Диаграммные (*графовые*) *автоморфизмы.* Пусть δ — такой автоморфизм системы корней Φ, что $\delta\Delta = \Delta$. Тогда существует единственный автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ (будем обозначать его той же буквой δ), такой что для любых $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ переходит в $x_{\delta(\alpha)}(\varepsilon(\alpha)t)$, где $\varepsilon(\alpha) = \pm 1$ для всех $\alpha \in \Phi$ и $\varepsilon(\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Аналогично мы можем определить четыре типа автоморфизмов элементарной подгруппы $E(R)$. Автоморфизм σ группы $G_\pi(\Phi, R)$ (или $E_\pi(\Phi, R)$) называется *стандартным*, если он является композицией автоморфизмов введённых четырёх типов.

Наряду со стандартными автоморфизмами мы будем использовать следующий «временный» тип автоморфизмов элементарной присоединённой группы Шевалле.

Автоморфизмы-сопряжения. Пусть V — пространство представления группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $C \in \mathrm{GL}(V)$ — матрица, оставляющая группу Шевалле на месте:

$$CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R).$$

Тогда отображение $x \mapsto CxC^{-1}$ из $E_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы Шевалле, который обозначается i_C и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы $E(R)$, *индуцированным элементом* C группы $\mathrm{GL}(V)$.

Главная наша цель — доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $G = G_\pi(\Phi, R)$ $(G = E_\pi(\Phi, R))$ — (*элементарная*) *группа Шевалле с системой корней* A_l, D_l *или* E_l, $l \geqslant 3$, R — *коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм группы* G *стандартен. Если группа Шевалле при этом присоединённая, то внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.*

Чтобы доказать данную теорему, мы докажем следующую важную техническую теорему.

Теорема 2. *Каждый автоморфизм элементарной присоединённой группы Шевалле типа* A_l, D_l *или* E_l, $l \geqslant 2$, *над локальным кольцом с необратимой двойкой является композицией кольцевого автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Чтобы применить теорему 2, мы будем использовать следующую теорему из [5].

Теорема 3. *Каждый автоморфизм-сопряжение элементарной присоединённой группы Шевалле типа* A_l, D_l *или* E_l, $l \geqslant 3$, *над локальным кольцом* *с единицей является композицией строго внутреннего автоморфизма* (*сопряжения с помощью элемента соответствующей группы Шевалле*) *и диаграммного автоморфизма.*

Три следующих раздела посвящены доказательству теоремы 2.

Пример группы Шевалле типа A_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой, для которых существуют нестандартные автоморфизмы, можно найти в [17].

2. Замена изначального автоморфизма на специальный изоморфизм

Начиная с этого раздела будем предполагать, что кольцо R — локальное кольцо с необратимой двойкой, группа Шевалле — присоединённая, система корней — одна из рассматриваемых. В этом разделе мы используем некоторые идеи из работы [16].

Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R, k — поле вычетов R/J. Тогда $E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ — наибольшая нормальная собственная подгруппа в $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ (см. [21]). Таким образом, подгруппа E_J инвариантна относительно действия автоморфизма φ. Значит, автоморфизм

$$\varphi\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\bar{\varphi}\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)/E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k).$$

Группа $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)$ является присоединённой группой Шевалле над полем, значит, автоморфизм $\bar{\varphi}$ стандартен (см. [59]), т. е. имеет вид

$$\bar{\varphi} = i_{\bar{g}}\bar{\rho}, \quad \bar{g} \in N\bigl(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)\bigr),$$

где $\bar{\rho}$ — кольцевой автоморфизм, индуцированный некоторым автоморфизмом поля k.

Ясно, что существует такая матрица $g \in \mathrm{GL}_n(R)$, что её образ при факторизации R по J совпадает с $\bar{g}$. Мы не можем быть уверены, что $g \in N\bigl(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)\bigr)$.

Рассмотрим отображение $\varphi' = i_{g^{-1}}\varphi$. Это изоморфизм группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \subset \mathrm{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$ с тем свойством, что её образ при факторизации R по J совпадает с автоморфизмом $\bar{\rho}$.

Проведённые рассуждения доказывают следующее утверждение.

Предложение 1. *Любая матрица $A \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R' в R, порождённого единицей, отображается при изоморфизме φ' в матрицу из множества*

$$A \cdot \mathrm{GL}_n(R, J) = \{B \in \mathrm{GL}_n(R) \mid A - B \in M_n(J)\}.$$

Пусть $a \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $a^3 = 1$. Тогда элемент $e = \frac{1}{3}(1 + a + a^2)$ — идемпотент в кольце $\mathrm{M}_n(R)$. Этот идемпотент e определяет разложение свободного R-модуля $V \cong R^n$:

$$V = eV \oplus (1 - e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [53]). Пусть $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1$ — разложение k-модуля (линейного пространства) $\bar{V} \cong k^n$ относительно $\bar{a}$ и $\bar{e} = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2)$.

Предложение 2. *Модули* (*подпространства*) $\bar{V}_0$, $\bar{V}_1$ *являются образами модулей* V_0, V_1 *при факторизации по* J.

Доказательство. Обозначим образы модулей V_0, V_1 при факторизации по J через $\tilde{V}_0$, $\tilde{V}_1$ соответственно. Так как

$$V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}, \quad V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\},$$

то

$$\bar{e}(\bar{x}) = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2)(\bar{x}) = \frac{1}{3}(1 + \bar{a}(\bar{x}) + \bar{a}(\bar{x})^2) = \frac{1}{3}\big(1 + \overline{a(x)} + \overline{a(x)^2}\,\big) = \overline{e(x)}.$$

Тогда $\tilde{V}_0 \subseteq \bar{V}_0$, $\tilde{V}_1 \subseteq \bar{V}_1$.

Пусть $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in V_0$, $x_1 \in V_1$. Тогда $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{e}(\bar{x}_0) + \bar{e}(\bar{x}_1) = \bar{x}_0$. Если $\bar{x} \in \tilde{V}_0$, то $\bar{x} = \bar{x}_0$. $\square$

Замечание. Теперь предположим, что $a^3 = 1$. Посмотрим, как должна быть устроена эта матрица на подмодулях V_0 и V_1.

Пусть $x \in V_1$. Тогда $x = ex = \frac{1}{3}(a^2 + a + 1)(x)$, откуда получаем, что $(a^2 + a - 2)(x) = 0$. Тем более имеем $(a - 1)(a^2 + a - 2)(x) = 0$. Кроме того, так как $a^3 = 1$, то $(a - 1)(a^2 + a + 1)(x) = 0$. Взяв разность последних двух равенств, мы получим $3(a - 1)(x) = 0$, и так как тройка обратима в кольце, то $a(x) = x$. Значит, на подмодуле V_1 отображение a тождественно.

Теперь пусть $x \in V_0$. Пусть $a(x) = \lambda x$. Тогда, очевидно, $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Так как $\lambda \neq 1$, то λ должно быть неединичным корнем из единицы третьей степени (их всего два, так как тройка обратима). Если $y = a(x) \neq \lambda x$, то векторы x и y линейно независимы, при этом $a(y) = a^2(x) = -x - a(x) = -x - y$. Таким образом, на подмодуле $\langle x, y\rangle$ матрица a действует инвариантно и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, модуль V_0 распадается прямую сумму инвариантных подмодулей размерностей один или два, при этом на одномерных подмодулях действие a на векторы x есть умножение на ξ или ξ^2 ($\xi^3 = 1$).

Понятно, что если изначальная матрица a имеет «целые» коэффициенты, то её матричные инварианты (след, определитель и т. д.) также являются целыми числами, откуда следует, что они должны быть целыми в любом базисе. Пусть одномерных подмодулей для ξ было p штук, а для ξ^2 — q штук. Пусть для определённости $p \geqslant q$. Тогда определитель на части базиса, порождённой этими одномерными подмодулями, равен ξ^{p-q}. Для того чтобы это число было целым, необходимо, чтобы $p-q$ было кратно трём. След матрицы на данной части базиса есть $-q+(p-q)\xi$, т. е. $p-q$ должно быть равно нулю в кольце R. Из того что остальные матричные инварианты также должны быть целыми числами и, кроме того, из того что все нечётные числа в кольце R обратимы, следует, что $p-q=0$. Таким образом, если матрица a имела целые коэффициенты, то в некотором базисе она будет состоять из единичного блока размерности $\dim V_1$ и из блоков размера 2×2 вида (2) суммарного размера $\dim V_0$.

Пусть теперь для матрицы a с целыми коэффициентами $b=\varphi'(a)$. Тогда $b^3=1$ и b сравнимо с a по модулю J.

Предложение 3. *Предположим, что $a,b\in E_\pi(\Phi,R)$, $a^3=b^3=1$, a — матрица с элементами из подкольца $R'\subset R$, порождённого единицей, b и a сравнимы по модулю J, $V=V_0\oplus V_1$ — разложение V относительно a, $V=V_0'\oplus V_1'$ — разложение V относительно b. Тогда $\dim V_0'=\dim V_0$, $\dim V_1'=\dim V_1$.*

Доказательство. Мы имеем R-базис модуля V $\{e_1,\dots,e_n\}$, такой что $\{e_1,\dots,e_k\}\subset V_0$, $\{e_{k+1},\dots,e_n\}\subset V_1$. Ясно, что

$$\bar a\bar e_i=\overline{ae_i}=\overline{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right)}=\sum_{j=1}^n \bar a_{ij}\bar e_j.$$

Пусть $\bar V=\bar V_0\oplus\bar V_1$, $\bar V=\bar V_0'\oplus\bar V_1'$ — разложения k-модуля (пространства) $\bar V$ относительно $\bar a$ и $\bar b$. Ясно, что $\bar V_0=\bar V_0'$, $\bar V_1=\bar V_1'$. Таким образом, по предложению 2 образы модулей V_0 и V_0', V_1 и V_1' при факторизации по J совпадают. Возьмём такие $\{f_1,\dots,f_k\}\subset V_0'$, $\{f_{k+1},\dots,f_n\}\subset V_1'$, что $\bar f_i=\bar e_i$, $i=1,\dots,n$. Так как матрица перехода от $\{e_1,\dots,e_n\}$ к $\{f_1,\dots,f_n\}$ обратима (сравнима с единичной матрицей по модулю J), то $\{f_1,\dots,f_n\}$ — это R-базис в V. Ясно, что $\{f_1,\dots,f_k\}$ — R-базис в V_0', $\{v_{k+1},\dots,v_n\}$ — R-базис в V_1'. □

Из этого предложения, замечания выше и сравнимости матриц a и b очевидно следует, что для b существует некоторый базис модуля V, в котором b имеет тот же вид, что a в изначальном базисе. Таким образом, a и b сопряжены.

3. Образы элементов $w_{\alpha_i}x_{\alpha_i}(1)$ и некоторых элементов группы Вейля

Рассмотрим некоторую фиксированную элементарную присоединённую группу Шевалле $E=E_{\mathrm{ad}}(\Phi,R)$ с системой корней A_l ($l\geqslant 3$), D_l ($l\geqslant 4$), E_6, E_7 или E_8, её присоединённое представление в группе $\mathrm{GL}_n(R)$ ($n=l+2m$, где m — число положительных корней системы Φ) с базисом из весовых векторов

$$v_1=x_{\alpha_1},\ v_{-1}=x_{-\alpha_1},\dots,\ v_n=x_{\alpha_n},\ v_{-n}=x_{-\alpha_n},\ V_1=h_1,\dots,\ V_l=h_l,$$

соответствующим базису Шевалле системы Φ. У нас также есть изоморфизм φ', описанный в разделе 2.

Для начала рассмотрим матрицу $Q_1 = w_{\alpha_1} x_{\alpha_1}(1)$ в нашем базисе. Заметим, что $Q_1^3 = E$.

На части базиса, образованной $\{v_1, v_{-1}, V_1, V_2\}$, эта матрица инвариантна и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

на части базиса, образованной всеми v_j, v_{-j}, где $\langle \alpha_1, \alpha_j \rangle = 0$, а также всеми соответствующими V_i, $i > 2$, она тождественна; на части базиса $\{v_j, v_{-j}, v_k, v_{-k}\}$, где $\langle \alpha_1, \alpha_j \rangle = -1$, $\alpha_k = \alpha_1 + \alpha_j$, она имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что данная матрица имеет только целые коэффициенты, поэтому её образ при изоморфизме сопряжён ей.

Теперь присоединим (временно и если его нет) к кольцу R такой элемент ξ, что $\xi^3 = 1$, т. е. введём такой внешний элемент и рассмотрим кольцо $\bar{R}$, порождённое кольцом R и элементом ξ. Тогда в некотором базисе матрица Q_1 имеет диагональный вид с элементами $1, \xi, \xi^2$ на диагонали. Часть базиса первого типа перейдёт в $\mathrm{diag}[\xi, \xi^2, 1, 1]$, часть базиса второго типа — в $\mathrm{diag}[1, 1]$, часть базиса третьего типа — в $\mathrm{diag}[\xi, \xi, \xi^2, \xi^2]$. Понятно, что аналогичными свойствами будут обладать и другие элементы $Q_i = w_{\alpha_i} x_{\alpha_i}(1)$.

Для различных систем корней из рассматриваемого списка возьмём теперь следующие множества корней:

— для системы корней A_l рассмотрим множество

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_3 = e_3 - e_4, \ldots,\ \alpha_{l-1} = e_{l-1} - e_l \text{ или } \alpha_l = e_l - e_{l+1}$$

в зависимости от чётности l, т. е. просто возьмём простые корни через один;

— для системы корней D_l рассмотрим множество

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_3 = e_3 - e_4, \ldots,\ \alpha_{l-1} = e_{l-1} - e_l,\ e_1 + e_2,\ e_3 + e_4, \ldots,\ e_{l-1} + e_l;$$

— для системы E_8 (аналогично для систем E_6, E_7) рассмотрим множество

$$\begin{gathered} \alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_4 = e_3 - e_4,\ \alpha_6 = e_5 - e_6,\ \alpha_8 = e_7 - e_8, \\ \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8), \\ \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8), \end{gathered}$$

$$\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6-e_7-e_8),$$
$$\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7+e_8).$$

Обозначим полученное множество (последовательность) корней через $\gamma_1,\dots,\gamma_k$.

Заметим, что все корни $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ попарно ортогональны. Это означает, что все матрицы $Q_{\gamma_1},\dots,Q_{\gamma_k}$ попарно коммутируют и, конечно же, коммутируют их образы $P_{\gamma_i}=\varphi'(Q_{\gamma_i})$. Значит, их можно в одном базисе записать в диагональном виде с теми же (и тем же количеством и расположением) 1, ξ, ξ^2 на диагонали. Временно перейдём к этому базису.

Опишем матрицу перехода к рассматриваемому базису.

На части базиса $\{\gamma_i,-\gamma_i,h_{\gamma_i},h_\alpha\}$, где $\langle\alpha,\gamma_i\rangle=-1$, матрица перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -\xi & -2\xi^2 & -\xi\\ -\xi & 1 & 2\xi^2 & \xi\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Если взять такой корень α, что $\langle\alpha,\gamma_i\rangle=\langle\alpha,\gamma_j\rangle=-1$, то на части базиса, образованной корнями

$$\{\alpha,-\alpha,\alpha+\gamma_i,-\alpha-\gamma_i,\alpha+\gamma_j,-\alpha-\gamma_j,\alpha+\gamma_i+\gamma_j,-\alpha-\gamma_i-\gamma_j\},$$

матрица перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 & \xi & 0 & -\xi & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & -\xi & 0 & -\xi\\ \xi & 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & \xi & 0\\ 0 & -\xi & 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & -\xi\\ \xi & 0 & -\xi & 0 & 1 & 0 & \xi & 0\\ 0 & -\xi & 0 & -\xi & 0 & 1 & 0 & -\xi\\ -\xi & 0 & \xi & 0 & \xi & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\xi & 0 & -\xi & 0 & -\xi & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Заметим при этом, что для любой пары корней γ_i, γ_j, $1\leqslant i,j\leqslant k$, существует такой корень $\gamma_{i,j}$, что $\langle\gamma_i,\gamma_{i,j}\rangle=\langle\gamma_j,\gamma_{i,j}\rangle=-1$ (для пары корней e_p-e_{p+1} и $e_q\pm e_{q+1}$ это корень $e_{p+1}-e_q$; для пары корней e_p+e_{p+1} и $e_q\pm e_{q+1}$ это корень $-e_{p+1}-e_q$; для пары корней e_p-e_{p+1} и e_p+e_{p+1} это корень $-e_p+e_q$, $q\neq p,p+1$; для пары корней e_p-e_{p+1} и $\frac12(e_1+e_2\pm\ldots\pm(e_p+e_{e_{p+1}})\pm\ldots)$ это корень $e_1\mp e_p$ или $e_1\mp e_{p+1}$; наконец, для пары $\frac12(e_1+e_2-e_3-e_4-e_5-e_6-e_7-e_8)$ и $\frac12(e_1+e_2+e_3+e_4-e_5-e_6-e_7-e_8)$ это e_1-e_5).

Рассмотрим элемент группы Вейля $w_{i,j}=w_{\gamma_{i,j}}(1)w_{\gamma_i}(1)w_{\gamma_j}(1)w_{\gamma_{i,j}}(1)$. Легко показать, что $w_{i,j}^2=E$ и $w_{i,j}Q_{\gamma_i}w_{i,j}=Q_{\gamma_j}$. Рассмотренная замена базиса не меняет элементы $w_{i,j}$.

Посмотрим на $W_{i,j}=\varphi_1(w_{i,j})$. Понятно, что это тоже элемент порядка два, переводящий P_{γ_i} в P_{γ_j} сопряжением (сейчас мы находимся в базисе, в котором все P_q диагональны и совпадают с диагональным видом Q_q). При этом $W_{i,j}$ коммутирует со всеми P_{γ_k}, $k \neq i, j$.

Рассмотрим некоторые корни α, β и место (α, β) в матрице $W_{i,j}$.

Пусть корни α и β ортогональны γ_i и γ_j. Тогда они обязательно не ортогональны каким-то γ_k, $k \neq i, j$. Ясно, что чтобы на месте (α, β) стоял не ноль, нужно, чтобы для всякого γ_k, $k \neq i, j$, выполнялось $\langle \alpha, \gamma_k \rangle = \langle \beta, \gamma_k \rangle$.

Для системы корней A_l можно для удобства считать, что $\gamma_i = \alpha_1$, $\gamma_j = \alpha_3$, $\alpha = e_p - e_q$, $\beta = e_t - e_s$. Сразу получаем, что $p, q, t, s > 4$. Пусть $p \neq t$, $q \neq s$. Рассмотрим $\gamma_k = e_p - e_{p+1}$ или $e_{p-1} - e_p$. Понятно, что по предположению в первом случае $s = p + 1$, во втором $s = p - 1$. Аналогично $t = q + 1$ или $q - 1$. Ясно, что не может быть ситуации, когда $p \neq t$, $q = s$, или $p = t$, $q \neq s$. Таким образом, чтобы на месте (α, β) в рассматриваемом случае стоял не ноль, нужно, чтобы $\alpha = \beta$ или $\alpha = -\beta \pm \gamma_l \pm \gamma_k$ (для каждого α существует не более одного такого β).

Для систем корней D_l, E_l ситуация ещё лучше, так как в последовательности $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ есть дополнительные корни, чтобы различить α и β. Поэтому в этом случае обязательно $\alpha = \beta$.

Теперь пусть корень α ортогонален γ_i и γ_j, а корень β нет (и пусть он не ортогонален по крайней мере γ_j). Мы знаем, что выполняется соотношение $P_{\gamma_i} W_{i,j} = W_{i,j} P_{\gamma_j}$. Пусть на месте (α, β) в матрице $W_{i,j}$ стоит a, тогда в соотношении в левой матрице на этом место будет стоять по-прежнему a, а в правой — $a\xi$ или $a\xi^2$. Отсюда следует, что $a = 0$.

Остаётся рассмотреть случаи, когда оба корня α, β не ортогональны каким-то из корней γ_i, γ_j. Из тех же рассуждений, что и в предыдущем абзаце, следует, что если и α и β ортогональны одному из γ_i, γ_j и не ортогональны второму, то на месте (α, β) стоит ноль.

Теперь пусть для определённости $\alpha \perp \gamma_j$, $\beta \perp \gamma_i$. В этом случае снова возможны два варианта: либо $\alpha = \pm\gamma_i$, либо существуют ещё какие-то γ_t, $t \neq i, j$, которым α не ортогонален. В первом случае понятно, что коэффициент будет ненулевым, только если $\beta = \pm\gamma_j$ (с тем же знаком). Во втором случае снова рассмотрим систему корней A_l. Для удобства предположим, что $\gamma_i = \alpha_1$, $\gamma_j = \alpha_3$. Тогда $\alpha = \pm e_1 \pm e_p$ или $\alpha = \pm e_2 \pm e_p$, $p > 4$, и сразу видно, что для β есть две возможности: либо это корень $w_{i,j}(\alpha) = \pm e_3 \pm e_p$ или $w_{i,j}(\alpha) = \pm e_4 \pm e_p$, либо это корень $-w_{i,j}(\alpha) \pm \gamma_j \pm \gamma_t$, $\gamma_t = e_p - e_{p+1}$ или $\gamma_t = e_{p-1} - e_p$. Для других систем корней снова ситуация может быть только ещё однозначнее.

В последнем из случаев α и β не ортогональны ни γ_i, ни γ_j. Рассмотрим снова системы корней по отдельности.

Для системы корней A_l в предположении, что $\gamma_i = \alpha_1$, $\gamma_j = \alpha_3$, должно выполняться $\alpha = \pm e_p \pm e_q$, где $p = 1, 2$, $q = 3, 4$. Без ограничения общности можем считать, что $\alpha = e_1 - e_3$, тогда $\beta = e_3 - e_1$ или $\beta = e_2 - e_4$. Для каждого из возможных корней α есть две возможности корня β.

Для системы корней D_l если $\gamma_i = e_1 - e_2$, $\gamma_j = e_3 - e_4$, $\alpha = e_1 - e_3$, $\beta = e_3 - e_1$, то $\langle \alpha, e_1 + e_2 \rangle \neq \langle \beta, e_1 + e_2 \rangle$, откуда снова получим, что на месте (α, β) стоит ноль. Значит, остаётся только возможность $\beta = e_2 - e_4$. Аналогично получаем единственную возможность $\beta = w_{i,j}(\alpha)$ при другом выборе α. Если $\gamma_i = e_1 - e_2$, $\gamma_j = e_1 + e_2$, то α обязательно должно быть или $\pm e_1 \pm e_p$, или $\pm e_2 \pm e_p$, $p > 2$. Пусть, например, $\alpha = e_1 - e_3$. Тогда сразу видно, что $\beta = e_1 - e_3$, всего одна возможность.

Случай системы корней E_l совершенно аналогичен случаю D_l.

На части базиса, образованной векторами $h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_l}$, пока матрица $W_{i,j}$ может быть произвольной.

Заметим, что для систем корней D_l, E_l элементы $W_{i,j}$ сразу же (просто после рассмотрения соотношений) близки к их прообразам $w_{i,j}$, поэтому мы рассмотрим замены базиса для систем корней A_l как для случая, где $W_{i,j}$ наиболее далеки от $w_{i,j}$. Для удобства рассмотрим систему корней A_5. Понятно, что для всех остальных систем корней замены будут производиться аналогично.

В системе корней A_5 упорядочим корни следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\pm(e_1 - e_2),\ \pm(e_2 - e_3),\ \pm(e_3 - e_4),\ \pm(e_4 - e_5),\ \pm(e_5 - e_6),\\
\pm(e_1 - e_3),\ \pm(e_2 - e_4),\ \pm(e_3 - e_5),\ \pm(e_4 - e_6),\ \pm(e_1 - e_4),\\
\pm(e_2 - e_5),\ \pm(e_2 - e_6),\ \pm(e_1 - e_5),\ \pm(e_2 - e_6),\ \pm(e_1 - e_6).
\end{gathered}
$$

Нас будут интересовать $W_{1,3}$ и $W_{3,5}$ (так как $W_{1,5}$ ими порождается). Рассмотрим по отдельности части базиса, инвариантные одновременно относительно $W_{1,3}$ и $W_{3,5}$.

Инвариантна относительно обеих матриц часть базиса

$$\{\pm(e_1 - e_2),\ \pm(e_3 - e_4),\ \pm(e_5 - e_6)\},$$

на которой

$$
W_{1,3} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & a_{1,5} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_{2,6} & 0 & 0\\
a_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,9} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,10}
\end{pmatrix},
$$

$$
W_{3,5} = \begin{pmatrix}
b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & b_{5,9} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{6,10}\\
0 & 0 & b_{9,5} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & b_{10,6} & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Произведём замену базиса (коммутирующую со всеми $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_3}, P_{\alpha_5}$) следующим образом:

$$v_1' = v_1,\quad v_2' = v_2,\quad v_5' = a_{1,5}v_5,\quad v_6' = a_{2,6}v_6,\quad v_9' = b_{5,9}a_{1,5}v_9,\quad v_{10}' = b_{6,10}a_{1,6}v_{10}.$$

Тогда матрицы $W_{1,3}$, $W_{3,5}$ на этих частях базиса примут вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a'_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b'_{9,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b'_{10,6} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а так как $W_{1,3}^2 = W_{3,5}^2 = E$, то $a'_{5,1} = a'_{6,2} = b'_{9,5} = b'_{10,6} = 1$. Кроме того,

$$W_{1,3}W_{3,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{9,9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{10,10} & 0 & 0 \end{pmatrix} —$$

это элемент порядка 3, поэтому $b_{1,1} = a_{9,9}$, $b_{2,2} = a_{10,10}$, все эти элементы имеют порядок 2.

Следующая часть базиса —

$$\pm(e_2 - e_3),\ \pm(e_4 - e_5),\ \pm(e_1 - e_4),\ \pm(e_2 - e_5),\ \pm(e_3 - e_6),\ \pm(e_1 - e_6).$$

На ней матрица $W_{1,3}$ равна

$$\begin{pmatrix}
a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{4,4} & 0 & 0 & a_{4,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,30} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,22} & 0 & 0 & a_{8,29} & 0 \\
0 & a_{19,4} & 0 & 0 & a_{19,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{20,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{20,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{21,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21,24} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{22,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22,23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23,22} & 0 & 0 & a_{23,29} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{24,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{24,30} \\
0 & 0 & 0 & a_{29,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{29,23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{30,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{30,24} & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

а матрица $W_{3,5}$ равна

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3,30} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{4,22} & 0 & 0 & b_{4,29} & 0 \\
0 & 0 & b_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{7,24} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_{8,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{8,23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{19,22} & 0 & 0 & b_{19,29} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{20,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{20,30} \\
b_{21,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_{22,4} & 0 & 0 & b_{22,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_{23,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{23,23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_{24,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{24,24} & 0 & 0 \\
0 & b_{29,4} & 0 & 0 & b_{29,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{30,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{30,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Опишем на этой части нужную нам замену базиса (естественно, коммутирующую со всеми P_{α_1}, P_{α_3}, P_{α_5}). Замену базиса будем производить постепенно, по шагам.

1. Все векторы базиса остаются неизменными, кроме векторов v_{19} и v_{20}. Положим

$$v_{19}' = a_{4,4}v_4 + a_{19,4}v_{19}, \quad v_{20}' = a_{3,3}v_3 + a_{20,3}v_{20}.$$

После таких преобразований в матрице $W_{3,5}$ структура не изменится (только поменяются ненулевые элементы $b_{i,j}$, но мы для простоты не будем писать штрихи), а матрица $W_{1,3}$ (в том числе благодаря тому, что она имеет порядок 2) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,30}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,22} & 0 & 0 & a_{8,29} & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_{21,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21,24} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_{22,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22,23} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23,22} & 0 & 0 & a_{23,29} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{24,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{24,30}\\
0 & 0 & 0 & a_{29,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{29,23} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_{30,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{30,24} & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Далее применим следующую замену.

2. Все векторы базиса остаются неизменными, кроме векторов v_{21} и v_{22}. Положим

$$v_{21}' = b_{21,3}v_{21} + b_{30,3}v_{30}, \quad v_{22}' = b_{22,4}v_{22} + b_{29,4}v_{29}.$$

После таких преобразований в матрице $W_{1,3}$ структура не изменится, а матрица $W_{3,5}$ примет вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{7,24} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & b_{8,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{8,23} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{19,22} & 0 & 0 & b_{19,29} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{20,21} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{20,30}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & b_{23,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{23,23} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_{24,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{24,24} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & b_{29,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{30,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

3. Все векторы базиса остаются неизменными, кроме векторов v_7 и v_8. Положим

$$v_7' = a_{7,21}v_7 + a_{24,21}v_{24}, \quad v_8' = a_{8,22}v_8 + a_{23,22}v_{23}.$$

После таких преобразований в матрице $W_{3,5}$ структура не изменится, а матрица $W_{1,3}$ примет вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,30}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{8,29} & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21,24} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22,23} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23,29} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{24,30}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{29,23} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{30,24} & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Мы знаем, что $W_{3,5}^2 = E$. В матрице $W_{3,5}^2$ на месте $(5,2)$ стоит $b_{19,22}$, а на месте $(6,1)$ — $b_{20,21}$. Значит, $b_{19,22} = b_{20,21} = 0$.

Произведём дальнейшие замены.

4. Все векторы базиса остаются неизменными, кроме векторов v_{23} и v_{24}. Положим

$$v_{23}' = b_{7,7}v_7 + b_{24,7}v_{24}, \quad v_{24}' = b_{8,8}v_8 + b_{23,8}v_{24}.$$

После таких преобразований в матрице $W_{1,3}$ структура не изменится, а матрица $W_{3,5}$ примет вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{19,29} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{20,30}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & b_{29,19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{30,20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Из того что матрица $W_{1,3}W_{3,5}$ имеет порядок 3, сразу получаем $a_{22,23} = a_{21,24} = 0$. Из того что $W_{1,3}$ имеет порядок 2, следует, что $a_{7,30} = a_{8,29} = 0$.

5. Теперь рассмотрим последнюю замену базиса, где

$$v_{29}' = b_{29,19}v_{29}, \quad v_{30}' = b_{30,20}v_{30}, \quad v_{23}' = a_{23,29}v_{23}, \quad v_{24}' = a_{24,30}v_{30}.$$

После этой замены мы будем иметь $W_{1,3}=w_{1,3}$, $W_{3,5}=w_{3,5}$ на рассматриваемой части базиса.

Для части базиса

$$\pm(e_1-e_3),\ \pm(e_2-e_4),\ \pm(e_3-e_5),\ \pm(e_4-e_6),\ \pm(e_1-e_5),\ \pm(e_2-e_6)$$

все рассуждения аналогичны предыдущей части.

Осталось рассмотреть часть базиса

$$h_{\alpha_1},\ h_{\alpha_2},\ h_{\alpha_3},\ h_{\alpha_4},\ h_{\alpha_5}.$$

На ней можно производить любую замену базиса, так как P_{α_1}, P_{α_3}, P_{α_5} на этой части базиса единичны.

Пусть на этой части

$$W_{1,3}=\begin{pmatrix} a_{31,31} & a_{31,32} & a_{31,33} & a_{31,34} & a_{31,35}\\ a_{32,31} & a_{32,32} & a_{32,33} & a_{32,34} & a_{32,35}\\ a_{33,31} & a_{33,32} & a_{33,33} & a_{33,34} & a_{33,35}\\ a_{34,31} & a_{34,32} & a_{34,33} & a_{34,34} & a_{34,35}\\ a_{35,31} & a_{35,32} & a_{35,33} & a_{35,34} & a_{35,35}\end{pmatrix},$$

$$W_{3,5}=\begin{pmatrix} b_{31,31} & b_{31,32} & b_{31,33} & b_{31,34} & b_{31,35}\\ b_{32,31} & b_{32,32} & b_{32,33} & b_{32,34} & b_{32,35}\\ b_{33,31} & b_{33,32} & b_{33,33} & b_{33,34} & b_{33,35}\\ b_{34,31} & b_{34,32} & b_{34,33} & b_{34,34} & b_{34,35}\\ b_{35,31} & b_{35,32} & b_{35,33} & b_{35,34} & b_{35,35}\end{pmatrix}.$$

Произведём сначала следующую замену базиса. Все элементы базиса остаются неизменными, только

$$v'_{33}=a_{31,33}v_{31}+a_{32,33}v_{32}+a_{33,33}v_{33}+a_{34,33}v_{34}+a_{35,33}v_{35}.$$

После такой замены матрица $W_{1,3}$ примет вид

$$W_{1,3}=\begin{pmatrix} 0 & a_{31,32} & 1 & a_{31,34} & a_{31,35}\\ 0 & a_{32,32} & 0 & a_{32,34} & a_{32,35}\\ 1 & a_{33,32} & 0 & a_{33,34} & a_{33,35}\\ 0 & a_{34,32} & 0 & a_{34,34} & a_{34,35}\\ 0 & a_{35,32} & 0 & a_{35,34} & a_{35,35}\end{pmatrix}.$$

Следующей заменой базиса будем менять только v_{32}. Положим

$$v'_{32}=(a_{31,34}v_{31}+a_{32,34}v_{32}+a_{33,34}v_{33}+a_{34,34}v_{34}+a_{35,34}v_{35})-v_{34}-v_{33}.$$

Тогда матрица $W_{1,3}$ будет иметь вид (воспользуемся также тем, что $W_{1,3}^2=E$)

$$W_{1,3}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & a_{31,35}\\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_{32,35}\\ 1 & -1 & 0 & 1 & a_{33,35}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{34,35}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35,35}\end{pmatrix}.$$

Аналогичными заменами для матрицы $W_{3,5}$ (менять нужно элементы базиса v_{34} и v_{35}) мы можем добиться того, что

$$W_{3,5} = \begin{pmatrix} b_{31,31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{32,31} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{33,31} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ b_{34,31} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ b_{35,31} & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее мы имеем неизвестные

$$a_{31,35},\ a_{32,35},\ a_{33,35},\ a_{34,35},\ a_{35,35},\ b_{31,31},\ b_{32,31},\ b_{33,31},\ b_{34,31},\ b_{35,31},$$

из которых $a_{35,35}$ и $b_{31,31}$ сравнимы с единицей по модулю радикала, остальные переменные лежат в радикале.

Кроме того, у нас есть три матричных соотношения:

1) $W_{1,3}^2 = E$;
2) $W_{3,5}^2 = E$;
3) $(W_{1,3}W_{3,5})^3 = E$.

Из них мы получаем некоторое количество полиномиальных соотношений на переменные.

Будем постепенно избавляться от переменных, считая их коэффициенты по модулю радикала. Если в конце мы придём к тому, что последняя переменная равна нулю, то и все переменные равны тому, с чем они сравнимы по модулю радикала.

Из соотношения 1) для позиции $(1,5)$ в 1) получаем, что $a_{32,35} = a_{33,35} + a_{31,35}$; для позиции $(3,5)$ — что $a_{34,35} = 0$. Аналогично, из соотношения 2) для позиции $(5,1)$ получаем, что $b_{34,31} = b_{35,31} + b_{33,31}$; для позиции $(33,31)$ — что $b_{32,31} = 0$. Из соотношения 3) для позиции $(2,2)$ получаем, что $b_{35,31} = -b_{33,31}$; для позиции $(1,3)$ — что $a_{31,35} = 0$; для позиции $(1,4)$ — что $b_{33,31} = 0$; для позиции $(1,2)$ — что $a_{35,35} = 1$; для позиции $(1,1)$ — что $b_{31,31} = 1$; наконец, для позиции $(2,3)$ — что $a_{33,35} = 0$. Таким образом, на этой части базиса также $W_{1,3}$ и $W_{3,5}$ совпали с $w_{1,3}$ и $w_{3,5}$ соответственно.

В совокупности мы получили, что $W_{1,3}$ отличается от $w_{1,3}$ только в позициях $(9,9)$ и $(10,10)$ (матрица диагональна, но на диагонали имеет не единицы, а некоторые элементы порядка два, сравнимые с единицей). Из того что $W_{1,3}$ имеет единичный определитель (так как является произведением коммутаторов), следует, что эти элементы на диагонали равны. Аналогичны равны друг другу (и множителям для $W_{1,3}$) элементы на позициях $(1,1)$ и $(2,2)$ в матрице $W_{3,5}$. Обозначим их через μ. Понятно, как диагональной заменой базиса во всех рассмотренных его частях добиться того, чтобы $W_{1,3} = \mu w_{1,3}$, $W_{3,5} = \mu w_{3,5}$.

Теперь заменой базиса, обратной к исходной, вернём Q_{γ_i} из диагонального вида в нормальный, в котором в матрице уже не встречаются элементы ξ и ξ^2. Как мы знаем, $W_{i,j}$ при этом не поменяются.

Таким образом, мы теперь можем считать, что нам дан изоморфизм φ_2 со всеми свойствами изоморфизма φ_1 и ещё такой, что $\varphi_2(Q_{\gamma_i}) = Q_{\gamma_i}$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $\varphi_2(w_{i,j}) = \mu w_{i,j}$ для всех $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, $\mu^2 = 1$.

Будем далее предполагать, что мы рассматриваем изоморфизм φ_2 с этими свойствами.

4. Ограничение рассмотрения образов элементов $x_\alpha(1)$ и $w_\alpha(1)$ на различные части базиса

Предположим теперь, что $\varphi_2\bigl(x_{\alpha_i}(1)\bigr) = x_i$, $\varphi_2\bigl(w_{\alpha_i}(1)\bigr) = W_i$.

Для начала рассмотрим x_1 (мы сейчас считаем, что корни в любом случае пронумерованы так, что $\gamma_1 = \alpha_1$). Мы знаем, что x_1 коммутирует со всеми Q_{γ_i}, $i > 1$. Понятно, что благодаря этому x_1 распадается на некоторые блоки. Посмотрим, на какие именно.

Для начала предположим, что мы имеем дело с системой корней A_l, где l нечётно. Рассмотрим корень $\alpha = e_i - e_j$, $i < j$. Если $\alpha = \alpha_1 = e_1 - e_2$, то α ортогонален всем γ_j, $j > 1$. Понятно, что если взять другой произвольный корень β, не коллинеарный корню α, то будет существовать какой-то γ_j, не ортогональный β. Значит, на месте (α, β) в матрице x_1 должен стоять ноль. Получается, что корни $\pm\alpha_1$ вместе с базисными элементами $h_1, \dots, h_l$ дают отдельную инвариантную часть базиса. Пусть теперь $\alpha = e_1 - e_i$, $i > 2$ (аналогично можно будет рассмотреть корни вида $e_2 - e_i$, $i > 2$). Такой корень не ортогонален ровно одному корню из последовательности $\gamma_2, \dots, \gamma_k$, например γ_j (это либо $e_i - e_{i+1}$, либо $e_{i-1} - e_i$). Тем же свойством будут обладать корни $\pm(e_1 - e_i)$, $\pm(e_2 - e_i)$ и либо $\pm(e_1 - e_{i-1})$, $\pm(e_2 - e_{i-1})$, $\pm(e_{i-1} - e_i)$, либо $\pm(e_1 - e_{i+1})$, $\pm(e_2 - e_{i+1})$, $\pm(e_i - e_{i+1})$. Именно такое множество корней образует часть базиса, инвариантную относительно матрицы x_1. Осталось рассмотреть корень $e_i - e_j$, не ортогональный сразу двум корням γ_p, γ_q. Без ограничения общности предположим, что i, j нечётны. Тогда инвариантна часть базиса $\pm(e_i - e_j)$, $\pm(e_i - e_{j+1})$, $\pm(e_{i+1} - e_j)$, $\pm(e_{i+1} - e_{j+1})$.

Теперь предположим, что система корней снова A_l, но l чётно. Аналогичными рассуждениями убедимся, что части базиса, на которые будет распадаться матрица x_1, будут иметь один из следующих видов:

1) $\pm(e_1 - e_2)$, $\pm(e_1 - e_{l+1})$, $\pm(e_2 - e_{l+1})$, $h_1, \dots$;
2) $\pm(e_1 - e_{2i-1})$, $\pm(e_1 - e_{2i})$, $\pm(e_2 - e_{2i-1})$, $\pm(e_2 - e_{2i})$, $\pm(e_{2i-1} - e_{2i})$, $\pm(e_{2i-1} - e_{l+1})$, $\pm(e_{2i} - e_{l+1})$, $i > 1$;
3) $\pm(e_{2i-1} - e_{2j-1})$, $\pm(e_{2i-1} - e_{2j})$, $\pm(e_{2i} - e_{2j-1})$, $\pm(e_{2i} - e_{2j})$, $i \neq j$, $i, j > 1$.

Пусть мы имеем дело с системой корней D_l. Части базиса, на которые будет распадаться матрица x_1, будут иметь один из следующих видов:

1) $\pm(e_1 - e_2)$, $h_1, \dots$;
2) $\pm(e_1 + e_2)$;

3) $\pm(e_1 - e_i)$, $\pm(e_2 - e_i)$, $i > 2$;
4) $\pm(e_1 + e_i)$, $\pm(e_2 + e_i)$, $i > 2$;
5) $\pm(e_i - e_j)$, $i, j > 2$;
6) $\pm(e_i + e_j)$, $i, j > 2$.

Видно, что они будут заведомо мельче, чем части базиса для систем корней A_l.

Теперь пусть рассматривается система E_8. В этом случае получатся следующие части базиса:

1) $\pm(e_1 - e_2)$, $h_1, \dots$;
2) $\pm(e_1 + e_2)$;
3) $\pm(e_1 - e_i)$, $\pm(e_2 - e_i)$, $i > 2$;
4) $\pm(e_1 + e_i)$, $\pm(e_2 + e_i)$, $i > 2$;
5) $\pm(e_i - e_j)$, $i, j > 2$;
6) $\pm(e_i + e_j)$, $i, j > 2$;
7) $\pm\frac{1}{2}(-e_1+e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6\pm e_7\pm e_8)$, $\pm\frac{1}{2}(e_1-e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6\pm e_7\pm e_8)$;
8) $\pm\frac{1}{2}(e_1 + e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$.

Для таких систем корней тоже части базиса строго являются разбиениями частей базиса для системы корней A_l. Благодаря этому мы можем ограничиться рассмотрением системы A_l, $l \geqslant 3$.

Теперь посмотрим на элемент x_2. Он коммутирует с элементами Q_i нашей последовательности, только начиная с третьего её члена, поэтому части базиса будут более крупными.

Как мы уже видели, можно не рассматривать системы корней D_l, E_l, а рассмотреть только систему корней A_l, $l \geqslant 3$. Для этой системы если l нечётно, то матрица x_2 разбивается на следующие части:

1) $\pm(e_1-e_2)$, $\pm(e_1-e_3)$, $\pm(e_1-e_4)$, $\pm(e_2-e_3)$, $\pm(e_2-e_4)$, $\pm(e_3-e_4)$, $h_1, \dots$;
2) $\pm(e_1 - e_i)$, $\pm(e_2 - e_i)$, $\pm(e_3 - e_i)$, $\pm(e_4 - e_i)$, $\pm(e_1 - e_{i+1})$, $\pm(e_2 - e_{i+1})$, $\pm(e_3 - e_{i+1})$, $\pm(e_4 - e_{i+1})$, $i > 4$, i нечётно;
3) $\pm(e_i - e_j)$, $\pm(e_i - e_{j+1})$, $\pm(e_{i+1} - e_j)$, $\pm(e_{i+1} - e_{j+1})$, $i, j > 4$, i, j нечётны;
4) $\pm(e_i - e_{i+1})$, $i > 4$, i нечётно.

Если l чётно, то части будут иметь следующий вид:

1) $\pm(e_1 - e_2)$, $\pm(e_1 - e_3)$, $\pm(e_1 - e_4)$, $\pm(e_2 - e_3)$, $\pm(e_2 - e_4)$, $\pm(e_3 - e_4)$, $\pm(e_1 - e_{l+1})$, $\pm(e_2 - e_{l+1})$, $\pm(e_3 - e_{l+1})$, $\pm(e_4 - e_{l+1})$, $h_1, \dots$;
2) $\pm(e_1 - e_i)$, $\pm(e_2 - e_i)$, $\pm(e_3 - e_i)$, $\pm(e_4 - e_i)$, $\pm(e_1 - e_{i+1})$, $\pm(e_2 - e_{i+1})$, $\pm(e_3 - e_{i+1})$, $\pm(e_4 - e_{i+1})$, $\pm(e_i - e_{l+1})$, $\pm(e_{i+1} - e_{l+1})$, $i > 4$, i нечётно;
3) $\pm(e_i - e_j)$, $\pm(e_i - e_{j+1})$, $\pm(e_{i+1} - e_j)$, $\pm(e_{i+1} - e_{j+1})$, $i, j > 4$, i, j нечётны;
4) $\pm(e_i - e_{i+1})$, $\pm(e_i - e_{l+1})$, $\pm(e_{i+1} - e_{l+1})$, $i > 4$, i нечётно.

Таким образом, в совокупности (для x_1 и x_2) наши матрицы разбиваются на те же части базиса, которые перечислены выше для матрицы x_2.

Ясно, что случаи чётного и нечётного l нужно рассматривать по отдельности, но не нужно рассматривать никакие системы корней, кроме A_l.

5. Образы элементов w_{α_i} и $x_{\alpha_i}(1)$

Заметим, что на каждой части базиса и в каждом из рассматриваемых случаев ситуация такова: имеется несколько известных матриц (например, Q_{α_1}, Q_{α_3}, $w_{1,3}$) и несколько неизвестных (например, образы матриц $w_{\alpha_1}(1)$ и $w_{\alpha_2}(1)$, которые мы обозначим через $w_{\alpha_1}(1)+W_1$ и $w_{\alpha_2}(1)+W_2$). Понятно, что матрицы W_1 и W_2 лежат в идеале $M_N(J)$. Все остальные неизвестные матрицы каким-то образом выражаются через известные и введённые неизвестные матрицы (например, $\varphi_2\bigl(x_{\alpha_1}(1)\bigr)=Q_{\alpha_1}\cdot(w_{\alpha_1}(1)+W_1)^3$). Кроме того, имеется некоторый набор соотношений (например, $(w_{\alpha_1}(1)+W_1)Q_{\alpha_3}=Q_{\alpha_3}(w_{\alpha_1}(1)+W_1)$), которым удовлетворяют неизвестные матрицы W_1 и W_2. Мы хотим показать, что можно, сделав ещё несколько замен базиса, коммутирующих с уже известными матрицами, добиться того, что всем выписанным соотношениям будут удовлетворять только нулевые матрицы W_1 и W_2. Это будет означать, что матрицы $w_{\alpha_1}(1)$ и $w_{\alpha_2}(1)$ при полученном изоморфизме переходят в себя, что нам и требуется.

Пусть элементы матриц W_1 и W_2 обозначены через $z_1,\dots,z_p$. Заметим, что каждое матричное соотношение даёт N^2 полиномиальных уравнений от переменных $z_1,\dots,z_p$ с целыми коэффициентами.

Предположим, что один из таких полиномов мы можем представить в виде

$$z_{k_0}A+z_1B_1+\ldots+z_{k_0-1}B_{k_0-1}+z_{k_0+1}B_{k_0+1}+\ldots+z_pB_p=0,$$

при этом полином A обратим по модулю радикала, B_i — какие-то полиномы (во все эти полиномы, в том числе и в A, может входить z_{k_0}). Тогда

$$z_{k_0}=-\frac{z_1B_1+\ldots+z_{k_0-1}B_{k_0-1}+z_{k_0+1}B_{k_0+1}+\ldots+z_pB_p}{A},$$

мы можем подставить выражение для z_{k_0} во все остальные полиномиальные соотношения. Если мы сможем выбрать последовательно p таких соотношений, что в процессе процедуры такой подстановки каждый раз сможем избавляться от какой-то очередной переменной, то к последнему соотношению мы будем иметь выражение

$$z_{k_p}C=0,$$

где C — это некоторое рациональное выражение от переменных $z_1,\dots,z_p$, обратимое по модулю радикала. Тогда мы сможем сказать, что $z_{k_p}=0$, а следовательно, все остальные переменные тоже равны нулю. Существование p искомых соотношений эквивалентно существованию p таких соотношений, что квадратная матрица, составленная из коэффициентов этих соотношений по модулю радикала, имеет обратимый (т. е. нечётный) определитель.

Так как выписывать матрицу размера $p\times p$ сложно и ненаглядно, можно последовательно выписывать искомые соотношения, но для простоты писать коэффициенты A и B_i по модулю радикала (в результате эти коэффициенты будут 0 и 1).

Понятно, что такая процедура эквивалентна «линеаризации» всех соотношений относительно переменных матриц W_1 и W_2. Именно, если при раскрытии скобок в соотношении где-то стоит выражение W_iW_jA, где $i,j \in \{1,2\}$, A — любая матрица, то такое выражение мы можем считать нулевым. В результате соотношения станут линейными относительно W_1 и W_2.

Нам нужно будет показать, что после выражения одних неизвестных через другие в этих соотношениях все неизвестные оказываются нулевыми.

Сначала покажем это на простых частях базиса: на третьей и четвёртой.

5.1. Части базиса четвёртого типа

Это самая простая часть базиса, имеющая вид

$$\pm(e_i - e_{i+1}), \quad i > 4,\ i \text{ нечётно}.$$

На этой части базиса все интересующие нас матрицы ($w_{\alpha_1}(1)$, $w_{\alpha_2}(1)$, $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_2}(1)$, $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$) единичны.

Мы знаем, что элемент

$$(w_{\alpha_1}(1) + W_1)(w_{\alpha_2}(1) + W_2) = (E + W_1)(E + W_2)$$

имеет порядок три. Линеаризуя это соотношение, получаем

$$(E + W_1 + W_2)^3 = E \iff 3W_1 = -3W_2 \iff W_2 = W_1.$$

Таким образом, мы можем считать, что $W_2 = W_1$.

Теперь вспомним, что

$$\varphi\bigl(x_{\alpha_1}(1)\bigr) = x_{\alpha_1}(1) + X_1 = E + X_1 = Q_1 \cdot (w_{\alpha_1}(1) + W_1)^3 = (E + W_1)^3,$$

откуда после линеаризации получаем, что $X_1 = 3W_1 = W_1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} E + X_{1+2} = \varphi_2\bigl(x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)\bigr) = \\ = (E + W_2) \cdot (E + X_1) \cdot (E + W_2)^3 = E + X_1 + 4W_1 = E + X_1, \end{aligned}$$

т. е. $X_{1+2} = X_1$. Аналогично

$$E + X_2 = \varphi_2(x_{\alpha_2}(1) = (E + W_1) \cdot (E + X_{1+2}) \cdot (E + W_1)^3,$$

откуда получаем, что $X_2 = X_{1+2} = X_1 = W_1$.

Теперь воспользуемся соотношением

$$x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)x_{\alpha_1}(1)x_{\alpha_2}(1) = x_{\alpha_2}(1)x_{\alpha_1}(1),$$

которое для образов даст нам

$$(E + W_1)(E + W_1)(E + W_1) = (E + W_1)(E + W_1).$$

Очевидно, $W_1 = 0$, что и требовалось.

5.2. Части базиса третьего вида

Теперь рассмотрим часть базиса третьего типа, а именно

$$\pm(e_i - e_j),\ \pm(e_i - e_{j+1}),\ \pm(e_{i+1} - e_j),\ \pm(e_{i+1} - e_{j+1}),\quad i, j > 4,\ i,\ j \text{ нечётны.}$$

Заметим, что на этой части, как и на предыдущей, единичны матрицы $w_{\alpha_1}(1)$, $w_{\alpha_2}(1)$, $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_2}(1)$, $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$. Значит, рассуждения абсолютно аналогичны предыдущему пункту, так как в нём мы пользовались только видом выписанных выше матриц и двумя соотношениями, которые будут выполняться и на этой части базиса.

5.3. Части базиса второго вида

Перейдём теперь к части базиса второго вида, а именно вида

$$\begin{gathered}\pm\,(e_1 - e_i),\ \pm(e_2 - e_i),\ \pm(e_3 - e_i),\ \pm(e_4 - e_i),\ \pm(e_1 - e_{i+1}),\\ \pm\,(e_2 - e_{i+1}),\ \pm(e_3 - e_{i+1}),\ \pm(e_4 - e_{i+1}),\quad i > 4,\ i \text{ нечётно.}\end{gathered}$$

Матрица W_1 раскладывается в прямую сумму на частях базиса

$$\pm(e_1 - e_i),\ \pm(e_2 - e_i),\ \pm(e_1 - e_{i+1}),\ \pm(e_2 - e_{i+1})$$

и

$$\pm(e_3 - e_i),\ \pm(e_4 - e_i),\ \pm(e_3 - e_{i+1}),\ \pm(e_4 - e_{i+1}),$$

поэтому про половину её коэффициентов мы знаем, что они равны нулю.

Матрица для Q_{α_i} имеет вид

$$Q_i = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix};$$

матрица для Q_{α_1} имеет вид

$$Q_1 = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix};$$

матрица для $w_{1,3}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix};$$

матрица для $w_{\alpha_1}(1)$ имеет вид

$$w_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix};$$

матрица для $w_{\alpha_2}(1)$ имеет вид

$$
w_2=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}.
$$

Кроме того,

$$
x_1=x_{\alpha_1}(1)=Q_1\cdot w_1^{-1},\quad w_3=w_{\alpha_3}(1)=w_{1,3}w_1w_{1,3},\quad Q_3=Q_{\alpha_3}=w_{1,3}Q_1w_{1,3},
$$
$$
x_{1+2}=x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)=w_2x_1w_2^{-1},\quad x_2=x_{\alpha_2}(1)=w_1x_{1+2}w_1^{-1}.
$$

Пусть $W_1=(a_{i,j})$, $W_2=(b_{i,j})$. Из того что W_1 коммутирует с Q_{α_3} и с Q_{α_i}, следует, что W_1 на первой части базиса имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5-a_1 & a_2-a_6 & -a_7 & a_4-a_8\\
a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & -a_{16}\\
a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{20} & -a_{21} & a_{18}-a_{22} & a_{23}-a_{19} & a_{20}-a_{24}\\
a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{30} & a_{31} & a_{32}\\
a_1-a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_5 & a_2 & a_3-a_7 & a_4\\
-a_{13}-a_9 & -a_{14} & -a_{15}-a_{11} & a_{16} & a_9 & a_{10}-a_{14} & a_{11} & a_{12}+a_{16}\\
a_{21} & a_{22} & a_{19}-a_{23} & a_{24} & a_{17}-a_{21} & a_{18} & a_{23} & a_{20}\\
-a_{29}-a_{25} & -a_{30} & -a_{31}-a_{27} & -a_{32} & a_{25} & a_{26}-a_{30} & a_{27} & a_{28}-a_{32}
\end{pmatrix},
$$

на второй части базиса имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
-a_{33}+a_{34} & a_{35}+a_{36} & a_{33} & a_{35} & a_{37} & \begin{matrix}a_{35}+a_{36}-\\-a_{38}\end{matrix} & a_{39} & a_{35}+a_{40}-a_{38}\\
-a_{41}-a_{42} & a_{43}+a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & -a_{47}-a_{45} & a_{46}+a_{48}\\
-a_{33} & a_{36} & a_{34} & a_{35}+a_{36} & a_{39} & a_{36}-a_{40} & a_{37}+a_{39} & a_{35}+a_{36}-a_{38}\\
a_{41} & -a_{43} & -a_{41}-a_{42} & a_{44} & a_{47} & -a_{48}-a_{46} & a_{45} & a_{47}\\
-a_{37} & a_{38} & a_{33}-a_{39} & a_{48} & \begin{matrix}a_{34}+a_{37}-\\-a_{33}\end{matrix} & a_{35}+a_{36} & a_{39} & a_{35}\\
\begin{matrix}a_{41}+a_{42}-\\-a_{45}\end{matrix} & -a_{46} & a_{47}+a_{45}-a_{42} & -a_{48}-a_{46} & -a_{41}-a_{42} & a_{44}-a_{46} & a_{42} & a_{43}-a_{46}-a_{48}\\
a_{39}-a_{33} & a_{40} & a_{33}-a_{37}-a_{39} & a_{38} & -a_{39} & a_{36} & \begin{matrix}a_{34}+a_{37}+\\+a_{39}-a_{33}\end{matrix} & a_{35}+a_{36}\\
-a_{41}-a_{47} & a_{46}+a_{48} & a_{41}+a_{42}-a_{45} & a_{48} & a_{41} & \begin{matrix}a_{46}+a_{48}-\\-a_{43}\end{matrix} & -a_{41}-a_{42} & a_{44}+a_{48}
\end{pmatrix}.
$$

Пусть $W_2=(b_{i,j})$, $1\leqslant i,j\leqslant 16$. Рассмотрим замену базиса с помощью матрицы C, которая на первой части базиса имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & a_{1,3} & -a_{5,8} & 0 & a_{1,10} & a_{1,11} & b_{1,12}\\
a_{1,2} & 1 & a_{6,7} & 0 & a_{2,9} & 0 & a_{6,15} & a_{2,12}\\
-a_{1,3} & a_{5,8} & 1+a_{1,3} & 0 & -a_{1,11} & a_{1,10}-b_{1,12} & a_{1,11} & a_{1,10}\\
a_{6,7}-a_{1,2} & 0 & a_{1,2} & 1 & a_{2,9}+a_{6,15} & a_{2,12} & a_{2,9} & a_{2,12}\\
0 & a_{1,10} & a_{1,11} & a_{5,8}+b_{1,12} & 1 & -a_{1,3}-a_{1,11} & a_{5,8} & 0\\
a_{1,2}+a_{2,9} & 0 & -a_{6,7}+a_{6,15} & a_{2,12} & -a_{1,2} & 1 & a_{6,7} & a_{2,12}\\
-a_{1,11} & 0 & a_{1,11} & a_{1,10} & a_{1,3}+a_{1,11} & 0 & 1 & 0\\
0 & -a_{2,12} & a_{1,2}+a_{2,9} & -a_{2,12} & 0 & -a_{2,12} & -a_{1,2} & 1
\end{pmatrix},
$$

а на второй части имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_{1,3} & a_{5,8} & 0 & -a_{1,10} & -a_{1,11} & -b_{1,12} \\ -a_{1,2} & 1 & a_{6,7} & 0 & -a_{2,9} & 0 & -a_{6,15} & -a_{2,12} \\ a_{1,3} & -a_{5,8} & 1-a_{1,3} & 0 & a_{1,11} & -a_{1,10}+b_{1,12} & -a_{1,11} & 0 \\ a_{1,2}-a_{6,7} & 0 & a_{1,2} & 1 & a_{2,9}+a_{6,15} & a_{2,12} & -a_{2,9} & a_{2,12} \\ 0 & a_{1,12} & 0 & a_{5,8}+b_{1,12} & 1 & 0 & -a_{1,3}-a_{1,11} & a_{5,8} \\ 0 & a_{1,2}+a_{2,9} & 0 & -a_{6,7}+a_{6,15} & -a_{1,2} & 1 & a_{6,7} & a_{2,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица коммутирует с Q_1, Q_3, Q_i и со всеми остальными полученными матрицами, поэтому замена базиса с её помощью не изменит уже зафиксированных нами матриц. С другой стороны, в линеаризованном виде в матрицах W_1 и W_2 обнулятся следующие элементы: $a_{1,3}$, $a_{1,10}$, $a_{1,11}$, $a_{2,12}$, $b_{1,12}$, $a_{1,2}$, $a_{6,7}$, $a_{2,9}$, $a_{6,15}$, $a_{5,8}$.

Введём выражения неизвестных матриц X_1, X_{1+2}, X_2 через W_1, W_2:

$$\begin{aligned} &X_1 = Q_1W_1w_1^2 + Q_1w_1W_1w_1 + Q_1w_1^2W_1, \\ &X_{1+2} = W_2x_1w_2^3 + w_2X_1w_2^3 + w_2x_1W_2w_2^2 + w_2x_1w_2W_2w_2 + w_2x_1w_2^2W_2, \\ &X_2 = W_1x_{1+2}w_1^3 + w_1X_{1+2}w_1^3 + w_1x_{1+2}W_1w_1^2 + \\ &\quad + w_1x_{1+2}w_1W_1w_1 + w_1x_{1+2}w_1^2W_1. \end{aligned}$$

Теперь выпишем список соотношений после линеаризации:

$$\begin{cases} W_2Q_i - Q_iW_2 = 0, \\ W_1w_2(w_1w_2)^2 + w_1W_2(w_1w_2)^2 + w_1w_2W_1w_2w_1w_2 + w_1w_2w_1W_2w_1w_2 + \\ \quad + (w_1w_2)^2W_1w_2 + (w_1w_2)^2w_1W_2 = 0, \\ w_{1,3}W_1w_{1,3}w_1 + w_3W_1 - w_1w_{1,3}W_1w_{1,3} - W_1w_3 = 0, \\ w_2w_1w_3W_2 + w_2w_1w_{1,3}W_1w_{1,3}w_2 + w_2W_1w_3w_2 + W_2w_1w_3w_2 = 0, \\ x_1X_{1+2} + X_1x_{1+2} - X_{1+2}x_1 - x_{1+2}X_1 = 0, \\ X_1x_2x_{1+2} + x_1X_2x_{1+2} + x_1x_2X_{1+2} - X_2x_1 - x_2X_1 = 0. \end{cases}$$

После этого прямым подсчётом получаем, что матрицы W_1 и W_2 нулевые. Таким образом, $\varphi_2\big(w_{\alpha_1}(1)\big) = w_{\alpha_1}(1)$ и $\varphi_2\big(w_{\alpha_2}(1)\big) = w_{\alpha_2}(1)$, что и требуется.

5.4. Части базиса первого вида

Заметим, что часть базиса первого типа для системы корней A_l с нечётным l — это просто базис системы корней типа A_3. Поэтому рассмотрим данную систему с условием, что матрицы Q_1, Q_3, $w_{1,3}$ переходят в себя. Соответственно, мы можем считать, что нам даны три простых корня α_1, α_2, α_3, порождающие систему корней A_3, базис из весовых векторов пронумерован следующим образом:

$$\begin{gathered} v_1 = v_{\alpha_1},\ v_2 = v_{-\alpha_1},\ v_3 = v_{\alpha_2},\ v_4 = v_{-\alpha_2},\ v_5 = v_{\alpha_3},\ v_6 = v_{-\alpha_3}, \\ v_7 = v_{\alpha_1+\alpha_2},\ v_8 = v_{-\alpha_1-\alpha_2},\ v_9 = v_{\alpha_2+\alpha_3},\ v_{10} = v_{-\alpha_2-\alpha_3}, \\ v_{11} = v_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3},\ v_{12} = v_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\ v_{13} = h_{\alpha_1},\ v_{14} = h_{\alpha_2},\ v_{15} = h_{\alpha_3}. \end{gathered}$$

В этом базисе матрицы, представляющие элементы $w_{\alpha_1}(1)$ и $w_{\alpha_2}(1)$, имеют соответственно вид

$$
w_1 = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

и

$$
w_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Кроме того, $x_{\alpha_1}(1)$ имеет вид

$$
x_1 = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix};
$$

матрица $w_{1,3}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0
\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь общий вид матрицы с коэффициентами из радикала, коммутирующей с матрицами Q_1, Q_3 и $w_{1,3}$. Прямым подсчётом получим, что такая матрица C разбивается на два диагональных блока относительно частей базиса

$$\{v_{\pm 1}, v_{\pm 3}, V_1, V_2, V_3\}, \quad \{v_{\pm 2}, v_{\pm 4}, v_{\pm 5}, v_{\pm 6}\};$$

на первой части базиса она имеет вид (мы не выписываем удвоенные коэффициенты, потому что они исчезают в линеаризованной форме)

$$\begin{pmatrix}
c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,5} & -c_{1,5} & -c_{1,5} & c_{1,14} & c_{1,5}\\
c_{1,2} & c_{1,1}-c_{1,2}+c_{1,5} & -c_{1,5} & c_{1,5} & -c_{1,5} & -c_{1,2}+c_{1,5}-c_{1,14} & -c_{1,5}\\
c_{1,5} & -c_{1,5} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,5} & -c_{1,14} & -c_{1,5}\\
-c_{1,5} & c_{1,5} & c_{1,2} & c_{1,1}-c_{1,2}+c_{1,5} & -c_{1,5} & c_{1,5}-c_{1,2}+c_{1,14} & -c_{1,5}\\
c_{13,1} & -c_{1,2}+c_{13,1}+c_{1,5} & c_{13,5} & -c_{13,5} & c_{1,1}+c_{1,2}+c_{13,1} & c_{13,14} & c_{13,5}\\
-c_{1,5} & c_{1,5} & c_{1,5} & -c1_5 & -c_{1,5} & c_{1,1}+c_{1,2}+c_{1,14} & c_{1,5}\\
-c_{1,5}-c_{13,5} & c_{13,5}+c_{1,5} & c_{1,5}+c_{13,1} & -c_{1,2}+c_{13,1} & -c_{1,5}-c_{13,5} & c_{15,14} & c_{15,15}
\end{pmatrix};$$

на второй —

$$\begin{pmatrix}
c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,7} & c_{3,8} & c_{3,9} & c_{3,10} & c_{3,11} & c_{3,12}\\
c_{3,4} & c_{3,9}+c_{3,11}+c_{3,3}+c_{3,7} & c_{3,10}-c_{3,4} & c_{3,9}+c_{3,11} & c_{3,8}-c_{3,4} & c_{3,11}+c_{3,7} & c_{4,10} & c_{3,11}\\
-c_{3,7} & c_{3,4}-c_{3,8} & c_{3,3}+c_{3,7} & c_{3,4} & -c_{3,11} & c_{3,10}-c_{3,12} & c_{3,9}+c_{3,11} & c_{3,10}\\
-c_{3,10} & -c_{3,9}-c_{3,11} & c_{3,4} & c_{3,3}+c_{3,7} & c_{3,10}-c_{3,12} & -c_{3,11} & c_{3,8}-c_{3,4} & c_{3,7}\\
-c_{3,9} & c_{3,4}-c_{3,10} & -c_{3,11} & c_{3,8}-c_{3,12} & c_{3,3}+c_{3,9} & c_{3,4} & c_{3,7}+c_{3,11} & c_{3,8}\\
-c_{3,8} & -c_{3,7}-c_{3,11} & c_{3,8}-c_{3,12} & -c_{3,11} & c_{3,4} & c_{3,3}+c_{3,9} & c_{3,10}-c_{3,4} & c_{3,9}\\
c_{3,11} & c_{3,4}-c_{3,8}+c_{3,12}-c_{3,10} & -c_{3,9}-c_{3,11} & c_{3,4}-c_{3,10} & -c_{3,7}-c_{3,11} & c_{3,4}-c_{3,8} & c_{11,11} & c_{3,4}\\
c_{3,12} & c_{3,11} & -c_{3,8} & -c_{3,7} & -c_{3,10} & -c_{3,9} & c_{3,4} & c_{3,3}
\end{pmatrix}.$$

Пусть $W_1 = \varphi_2\big(w_{\alpha_1}(1)\big) - w_{\alpha_1}(1) = (x_{i,j})$ и $W_2 = \varphi_2\big(w_{\alpha_2}(1)\big) - w_{\alpha_2}(1) = (y_{i,j})$. Выражение других неизвестных через W_1 и W_2 такое же, как в предыдущем пункте. Соотношения после линеаризации имеют следующий вид:

$$\begin{cases} W_1Q_3 - Q_3W_1 = 0, \\ W_1 w_{\alpha_2}(1)\big(w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)\big)^2 + w_{\alpha_1}(1)W_2\big(w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)\big)^2 + \\ \quad + w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)W_1w_{\alpha_2}(1)w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1) + \\ \quad + w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)w_{\alpha_1}(1)W_2w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1) + \\ \quad + \big(w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)\big)^2 W_1 w_{\alpha_2}(1) + \big(w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)\big)^2 w_{\alpha_1}(1)W_2 = 0, \\ w_{1,3}W_1w_{1,3}w_{\alpha_1}(1) + w_{\alpha_3}(1)W_1 - w_{\alpha_1}(1)w_{1,3}W_1w_{1,3} - W_1w_3 = 0, \\ w_2w_1w_3W_2 + w_2w_1w_{1,3}W_1w_{1,3}w_2 + w_2W_1w_3w_2 + W_2w_1w_3w_2 = 0, \\ x_1X_{1+2} + X_1x_{1+2} - X_{1+2}x_1 - x_{1+2}X_1 = 0, \\ X_1x_2x_{1+2} + x_1X_2x_{1+2} + x_1x_2X_{1+2} - X_2x_1 - x_2X_1 = 0. \end{cases}$$

Выберем в матрице C следующие элементы:

$$c_{3,3} = -y_{1,7}, \quad c_{1,1} = 0, \quad c_{13,14} = y_{13,13}, \quad c_{3,12} = y_{1,10},$$
$$c_{13,1} = x_{13,14}, \quad c_{13,5} = -x_{15,14}, \quad c_{1,5} = -x_{13,5}, \quad c_{3,11} = -x_{5,5},$$
$$c_{3,9} = x_{4,8}, \quad c_{3,7} = -x_{3,7}, \quad c_{1,2} = -x_{1,14}, \quad c_{3,10} = -x_{3,10}, \quad c_{3,4} = -x_{3,4},$$

после этого сопряжём наши матрицы $w_1 + W_1$ и $w_2 + W_2$ рассматриваемой матрицей $E + C$. В линеаризованном виде получим

$$(E + C)(w_i + W_i)(E - C) \sim w_i + W_i + Cw_i - w_iC.$$

Таким образом, у матриц W_1 и W_2 (в линеаризованном смысле) стали равны нулю следующие элементы: $y_{5,9}$, $y_{1,7}$, $y_{13,13}$, $y_{1,10}$, $x_{13,14}$, $x_{15,14}$, $x_{13,5}$, $x_{5,5}$, $x_{4,8}$, $x_{3,7}$, $x_{1,14}$, $x_{3,10}$, $x_{3,4}$. Теперь применим напрямую все выписанные соотношения и получим, что матрицы W_1 и W_2 полностью равны нулю. Таким образом, $\varphi_2\big(w_{\alpha_1}(1)\big) = w_{\alpha_1}(1)$ и $\varphi_2\big(w_{\alpha_2}(1)\big) = w_{\alpha_2}(1)$, что и требуется.

6. Образы элементов $x_{\alpha_i}(t)$

Теперь нас будут интересовать образы матриц $x_{\alpha_i}(t)$. Так как все части базиса рассматриваются похожим образом, посмотрим только на часть базиса второго типа.

Так как все элементы группы Вейля переходят в себя под действием φ, то достаточно проследить за образами элементов $x_{\alpha_1}(t)$. Фиксируем произвольный элемент $t \in R$ и рассмотрим образ $\varphi\big(x_{\alpha_1}(t)\big) = X_t$. Так как матрица X_t коммутирует с матрицами w_{α_3}, $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_3}(1)$, $x_{\alpha_i}(1)$, Q_i, Q_3, $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$ и $x_{-\alpha_2}(1)$, сразу получаем, что матрица X_t имеет вид

$$\begin{pmatrix}
x_{1,1} & 0 & x_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & x_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x_{4,2} & 0 & x_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{4,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -x_{1,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & 0 & x_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -x_{4,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{4,2} & 0 & x_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1,1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{2,2}
\end{pmatrix}.$$

Теперь введём

$$X_t^{1+2} = \varphi_2\bigl(x_{\alpha_1+\alpha_2}(t)\bigr) = w_2 X_t w_2^{-1}$$

и рассмотрим соотношение $X_t^{1+2} x_{\alpha_2}(1) X_t = X_t x_{\alpha_2}(1)$. Из соотношений для позиций $(1,1)$ и $(2,2)$ следует, что $x_{1,1}(x_{1,1}-1)=0$ и $x_{2,2}(x_{2,2}-1)=0$, поэтому $x_{1,1}=x_{2,2}=1$. Из соотношений для позиции $(1,10)$ следует, что $x_{1,10}=0$, из из соотношений для позиции $(4,13)$ — что $x_{4,11}=0$. Кроме того, коммутирование с другими элементами группы Вейля даёт $x_{4_2}=-x_{1,3}$, поэтому $X_t = x_{\alpha_1}(s)$ для некоторого $s \in R^*$.

Если ввести образ элемента $h_{\alpha_1}(t)$, то из аналогичных соотношений получим, что это есть $h_{\alpha_1}(s)$.

Рассмотрением остальных типов частей базиса можно легко убедиться, что для каждого элемента $t \in R^*$ соответствующий $s \in R^*$ един для всего базиса.

7. Доказательство основной теоремы

Ясно, что $\varphi_2\bigl(h_{\alpha_k}(t)\bigr) = h_{\alpha_k}(s)$, $k=1,\dots,n$. Обозначим отображение $t \mapsto s$ через $\rho\colon R^* \to R^*$. Заметим, что для $t \in R^*$ справедливо

$$\varphi_2\bigl(x_1(t)\bigr) = \varphi_2\bigl(h_{\alpha_2}(t^{-1})x_1(1)h_{\alpha_2}(t)\bigr) = h_{\alpha_2}(s^{-1})x_1(1)h_{\alpha_2}(s) = x_1(s).$$

Если $t \notin R^*$, то $t \in J$, т. е. $t = 1 + t_1$, где $t_1 \in R^*$. Тогда

$$\varphi_2\bigl(x_1(t)\bigr) = \varphi_2\bigl(x_1(1)x_1(t_1)\bigr) = x_1(1)x_1\bigl(\rho(t_1)\bigr) = x_1\bigl(1+\rho(t_1)\bigr).$$

Таким образом, если мы продолжим отображение ρ на всё кольцо R (по формуле $\rho(t) := 1 + \rho(t-1)$, $t \in R$), то получим, что $\varphi_2\bigl(x_1(t)\bigr) = x_1\bigl(\rho(t)\bigr)$ для всех $t \in R$. Ясно, что ρ инъективно, аддитивно, а также мультипликативно на всех обратимых элементах. Так как каждый элемент кольца R есть сумма двух обратимых, то получаем, что ρ — это изоморфизм из кольца R на некоторое его подкольцо R'. Заметим, что в данной ситуации $CE(\Phi,R)C^{-1} = E(\Phi,R')$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}(V)$. Покажем, что $R' = R$.

Обозначим матричные единицы через E_{ij}.

Лемма 1. *Если для некоторой матрицы* $C \in \mathrm{GL}(V)$ *справедливо равенство* $CE(\Phi, R)C^{-1} = E(\Phi, R')$, *где* R' — *подкольцо в* R, *то* $R' = R$.

Доказательство. Покажем, что с помощью группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ в нашем случае сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу $aE_{1,1}$, $a \in R$.

Матрица $\big((x_{\alpha_1}(1) - 1)(x_{\alpha_2} - 1)\big)^2$ имеет единственный ненулевой элемент $E_{7,8}$. Аналогично $E_{8,7} = \big((x_{-\alpha_1} - 1)(x_{-\alpha_2} - 1)\big)^2$. Таким образом, сразу получаем матричные единицы $E_{7,7}$, $E_{7,8}$, $E_{8,7}$, $E_{8,8}$. Благодаря транзитивности действия группы Вейля на корнях, сопрягая данные матричные единицы с помощью различных элементов группы Вейля, получаем $E_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{9, 10\}$, $\{11, 12\}$. Значит, имеем $E_{1,1}$. Далее с помощью элемента $E_{1,1}h_{\alpha_2}(t)E_{1,1}$ получаем $tE_{1,1}$ для всех обратимых $t \in R$. Так как любой элемент кольца R представляется как сумма двух обратимых, получаем искомые $aE_{1,1}$, $a \in R$.

Предположим теперь, что R' — это собственное подкольцо в R.

Так как $CE(\Phi, R)C^{-1} = E(\Phi, R')$, то подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$, порождённое всеми элементами группы $E(\Phi, R)$, должно переходить в подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R')$, порождённое всеми элементами группы $E(\Phi, R')$. Значит, все коэффициенты матриц $G_a = C(aE_{1,1})C^{-1}$ должны лежать в подкольце R'.

Пусть $C = (c_{k,l})$, $C^{-1} = (c'_{k,l})$. Заметим, что (i, j)-й коэффициент матрицы G_a равен $ac_{i,1}c_{1,j}$. У любой обратимой матрицы над локальным кольцом в каждом столбце и в каждой строке есть обратимый элемент, поэтому существуют такие i_0 и j_0, для которых элемент $c_{i_0,1}c_{1,j_0}$ обратим. На соответствующем месте в матрице G_a тогда будет стоять любой наперёд заданный элемент кольца R.

Полученное противоречие показывает, что $R' = R$. $\square$

Таким образом, мы доказали, что ρ — это автоморфизм кольца R. Следовательно, композиция изначального автоморфизма φ и некоторой замены базиса с помощью матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ (переводящей $E(\Phi, R)$ в себя) — это кольцевой автоморфизм ρ. Это доказывает теорему 2. $\square$

Основная теорема (теорема 1) теперь очевидным образом следует из только что доказанной теоремы 2, а также теорем 1 и 3, доказанных в [5]. Так как в [5] при доказательстве теорем 1 и 3 нигде не используется обратимость двойки в кольце, а требуется только, чтобы была верна теорема, аналогичная теореме 2 данной работы, то доказательство теперь автоматически распространяется на случай колец с необратимой двойкой.

Литература

[1] Блошицын В. Я. Автоморфизмы общей линейной группы над коммутативным кольцом, не порождаемым делителями нуля // Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 6. — С. 639—642.

[2] Борель А. Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам. — М., 1973. — С. 9—59.

[3] Бунина Е. И. Автоморфизмы присоединённых групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3—27.

[4] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа B_l над локальными кольцами с $1/2$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 3—46; arXiv:0911.4243.

[5] Бунина Е. И. Автоморфизмы и нормализаторы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с $1/2$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35—59; arXiv:0907.5595.

[6] Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 1. — С. 443—470; arXiv:math/0702046.

[7] Вавилов Н. А. Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1982. — Т. 116. — С. 20—43.

[8] Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р. A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7 // Алгебра и анализ. — 2004. — Т. 116, № 4. — С. 54—87.

[9] Вавилов Н. А, Гаврилович М. Р., Николенко С. И. Строение групп Шевалле: доказательство из книги // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 2006. — Т. 330. — С. 36—76.

[10] Вавилов Н. А., Петров В. А. О надгруппах $\mathrm{Ep}(2l, R)$ // Алгебра и анализ. — 2003. — Т. 15, вып. 3. — С. 72—114.

[11] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.

[12] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[13] Дьедонне Ж. Геометрия классических групп. — М.: Мир, 1974.

[14] Залесский А. Е. Линейные группы // Итоги науки и техн. Сер. Фундаментальные направления. Т. 37. Алгебра 4. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 114—228.

[15] Зельманов Е. И. Изоморфизмы полных линейных групп над ассоциативными кольцами // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.

[16] Петечук В. М. Автоморфизмы групп SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами // Мат. заметки. — 1980. — Т. 28, № 2. — С. 187—206.

[17] Петечук В. М. Автоморфизмы групп $\mathrm{SL}_3(K)$, $\mathrm{GL}_3(K)$ // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 657—668. $\mathrm{GL}_3(K)$.

[18] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. сб. — 1983. — Т. 45. — С. 527—542.

[19] Суслин А. А. Об одной теореме Кона // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 64. — С. 127—130.

[20] Шевалле К. О некоторых простых группах // Математика. — 1958. — Т. 2, № 1. — С. 3—58.

[21] Abe E. Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474—494.

[22] Abe E. Chevalley groups over commutative rings // Proc. Conf. Radical Theory. — Sendai, 1988. — P. 1—23.

[23] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Alg. Anal. — 1993. — Vol. 5, no. 2. — P. 74—90.

[24] Abe E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Contemp. Math. — 1989. — Vol. 83. — P. 1—17.

[25] Abe E., Hurley J. Centers of Chevalley groups over commutative rings // Commun. Algebra. — 1988. — Vol. 16, no. 1. — P. 57—74.

[26] Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability // K-Theory. — 1991. — Vol. 4. — P. 363—397.

[27] Bak A. Vavilov normality of the elementary subgroup functors // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1995. — Vol. 118, no. 1. — P. 35—47.

[28] Borel A., Tits J. Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples // Ann. Math. — 1973. — Vol. 73. — P. 499—571.

[29] Bourbaki N. Groupes et algébres de Lie. — Hermann, 1968.

[30] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with 1/2 // J. Algebra. — To appear; `arXiv:0907.5592`.

[31] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. — London: Wiley, 1989.

[32] Carter R. W., Chen Y. Automorphisms of affine Kac—Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. — 1993. — Vol. 155. — P. 44—94.

[33] Chen Y. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 92. — P. 231—237.

[34] Chen Y. Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras // Tôhoku Math. J. — 1995. — Vol. 348. — P. 81—97.

[35] Chen Y. On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123, no. 8. — P. 2357—2361.

[36] Chen Y. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 1—19.

[37] Chen Y. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 226. — P. 719—741.

[38] Chevalley C. Certains schémas de groupes semi-simples // Sem. Bourbaki. — 1960—1961. — Vol. 219. — P. 1—16.

[39] Cohn P. On the structure of the GL_2 of a ring // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1966. — Vol. 30. — P. 365—413.

[40] Demazure M., Gabriel P. Groupes algébriques. I. — Amsterdam: North-Holland, 1970.

[41] Demazure M., Grothendieck A. Schémas en groupes. I, II, III. — Berlin: Springer, 1971. — (Lect. Notes Math.; Vols. 151, 152, 153).

[42] Dieudonné J. On the Automorphisms of Classical Groups. — Amer. Math. Soc., 1951. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 2).

[43] Golubchik I. Z. Isomorphisms of the linear general group $\mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 4$, over an associative ring // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131, no. 1. — P. 123—136.

[44] Grothendieck A. Éléments de géoméntrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné). IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1967. — Vol. 32. — P. 5—361.

[45] Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. — Berlin: Springer, 1989.

[46] Hazrat R., Vavilov N. A. K_1 of Chevalley groups are nilpotent // J. Pure Appl. Algebra. — 2003. — Vol. 179. — P. 99—116.

[47] Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 71. — P. 331—348.

[48] Humphreys J. E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. — New York: Springer, 1978.

[49] Humphreys J. F. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 908—911.

[50] Jantzen J. C. Representations of Algebraic Groups. — New York: Academic Press, 1987.

[51] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras. — 2007. — arXiv:0708.2256v3.

[52] Li F., Li Z. Contemp. Math. — 1984. — Vol. 82. — P. 47—52. The isomorphisms of GL_3 over commutative rings // Classical Groups and Related Topics. Proc. Conf., Beijing/China 1987. — Amer. Math. Soc., 1989. — (Contemp. Math.; Vol. 82). — P. 47—52.

[53] McDonald B. R. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 215. — P. 145—159.

[54] O'Meara O. T. The automorphisms of linear groups over any integral domain // J. Reine Angew. Math. — 1966. — Vol. 223. — P. 56—100.

[55] Stein M. R. Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings // Amer. J. Math. — 1971. — Vol. 93, no. 4. — P. 965—1004.

[56] Stein M. R. Surjective stability in dimension 0 for K_2 and related functors // Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 178, no. 1. — P. 165—191.

[57] Stein M. R. Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups // Japan J. Math. — 1978. — Vol. 4, no. 1. — P. 77—108.

[58] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 121. — P. 606—615.

[59] Steinberg R. Lectures on Chevalley Groups. — Yale University, 1967.

[60] Suzuki K. On the automorphisms of Chevalley groups over p-adic integer rings // Kumamoto J. Sci. (Math.). — 1984. — Vol. 16, no. 1. — P. 39—47.

[61] Swan R. Generators and relations for certain special linear groups // Adv. Math. — 1971. — Vol. 6. — P. 1—77.

[62] Taddei G. Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Contemp. Math. — 1986. — Vol. 55. — P. 693—710.

[63] Vaserstein L. N. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. — 1986. — Vol. 36, no. 5. — P. 219—230.

[64] Vavilov N. A. Structure of Chevalley groups over commutative rings // Proc. Conf. Non-Associative Algebras and Related Topics (Hiroshima—1990). — London: World Scientific, 1991. — P. 219—335.

[65] Vavilov N. A. An A_3-proof of structure theorems for Chevalley groups of types E_6 and E_7 // Int. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 5-6. — P. 1283—1298.

[66] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // Acta Appl. Math. — 1996. — Vol. 45. — P. 73—113.

[67] Waterhouse W. C. Introduction to Affine Group Schemes. — Berlin: Springer, 1979.

[68] Waterhouse W. C. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 79. — P. 347—351.

[69] Waterhouse W. C. Automorphisms of quotients of $\prod \mathrm{GL}(n_i)$ // Pacific J. Math. — 1982. — Vol. 79. — P. 221—233.

[70] Waterhouse W. C. Automorphisms of $\det(X_{ij})$: the group scheme approach // Adv. Math. — 1987. — Vol. 65, no. 2. — P. 171—203.