Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов абелевых p-групп

Е. И. БУНИНА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: HelenBunina@yandex.ru

М. А. РОЙЗНЕР
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 512.541.6+510.67

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, эквивалентность в логике второго порядка, абелевы p-группы, группы автоморфизмов.

Аннотация

Рассмотрим абелевы p-группы ($p \geqslant 3$) $A_1 = D_1 \oplus G_1$, $A_2 = D_2 \oplus G_2$, где D_1 и D_2 — делимые, а G_1 и G_2 — редуцированные подгруппы. Мы доказываем, что если группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A_1$ и $\operatorname{Aut} A_2$ элементарно эквивалентны, то группы D_1, D_2 и G_1, G_2 соответственно эквивалентны в логике второго порядка.

Abstract

E. I. Bunina, M. A. Roizner, Elementary equivalence of the automorphism groups of Abelian p-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 81—112.

We consider Abelian p-groups ($p \geqslant 3$) $A_1 = D_1 \oplus G_1$ and $A_2 = D_2 \oplus G_2$, where D_1 and D_2 are divisible and G_1 and G_2 are reduced subgroups. We prove that if the automorphism groups $\operatorname{Aut} A_1$ and $\operatorname{Aut} A_2$ are elementarily equivalent, then the groups D_1, D_2 and G_1, G_2 are equivalent, respectively, in the second-order logic.

Введение

В данной работе рассматриваются элементарные свойства (т. е. свойства, выразимые в языке первого порядка) групп автоморфизмов абелевых p-групп.

Впервые вопросы связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были рассмотрены в 1961 г. А. И. Мальцевым в [10]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ ($G = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$, $n, m \geqslant 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 81—112.

Продолжение эта теория получила в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрапроизведения и теоремы об изоморфизме [6] К. И. Бейдар и А. В. Михалёв в [13] нашли общий подход к решению проблем элементарной эквивалентности различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева для случая, когда K и L являются телами и ассоциативными кольцами.

Продолжением исследований в этой области явились работы Е. И. Буниной 1998—2001 гг. (см. [1—3]), в которых результаты А. И. Мальцева была распространены на унитарные линейные группы над телами и ассоциативными кольцами с инволюцией, а также на группы Шевалле над полями.

В 2000 г. В. Толстых в [22] рассмотрел связь свойств второго порядка тел и свойств первого порядка групп автоморфизмов бесконечномерных пространств над этими телами. В 2003 г. (см. [5]) Е. И. Буниной и А. В. Михалёвым была рассмотрена связь свойств второго порядка ассоциативных колец и свойств первого порядка категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств модулей бесконечного ранга над этими кольцами.

В [4] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв установили связь между свойствами второго порядка абелевой p-группы и свойствами первого порядка её кольца эндоморфизмов.

В этой работе мы устанавливаем связь между свойствами второго порядка абелевой p-группы и свойствами первого порядка её группы автоморфизмов, если $p > 2$.

1. Основные определения

Все необходимые сведения о языках первого и второго порядка, теории классов и множеств NBG, моделях первого и второго порядка, элементарной эквивалентности и эквивалентности в языке второго порядка можно найти в [4].

Под «группой» будет пониматься аддитивно записанная абелева (т. е. коммутативная) группа.

Группа $\langle a\rangle$ называется *циклической* группой, порождённой элементом a. Порядок группы $\langle a\rangle$ называется также *порядком* элемента a и обозначается через $\mathrm{o}(a)$. Если каждый элемент группы A имеет конечный порядок, то A называется *периодической* группой, а если все элементы группы A, кроме нуля, имеют бесконечный порядок, то A называется *группой без кручения*. *Смешанные группы* содержат как ненулевые элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка.

Примарной группой или *p-группой* называется группа, порядки элементов которой являются степенями фиксированного простого числа p.

Если $a \in A$, то наибольшее неотрицательное целое число r, для которого уравнение $p^r x = a$ имеет решение $x \in A$, назовём *p-высотой* $\mathrm{h}_p(a)$ элемента a. Если уравнение $p^r x = a$ имеет решение при любом r, то a называется элементом *бесконечной p-высоты*, $\mathrm{h}_p(a) = \infty$. Если из контекста будет ясно, о каком p

идёт речь, будем называть $\mathrm{h}_p(a)$ просто *высотой* элемента a и писать $h(a)$. Для группы A и целого числа $n > 0$ положим

$$nA = \{na \mid a \in A\}, \quad A[n] = \{a \mid a \in A,\ na = 0\}.$$

Пусть p — простое число. Корни степени p^n из единицы, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, образуют бесконечную мультипликативную группу. Мы перейдём к аддитивной записи. Получится группа, называемая *квазициклической* или *группой типа* p^∞ ($\mathbb{Z}_{p^\infty}$), которую можно определить следующим образом: она порождается элементами $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, где $pc_1 = 0,\ pc_2 = c_1, \ldots, pc_{n+1} = c_n, \ldots$. Здесь $\mathrm{o}(c_n) = p^n$ и всякий элемент из $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ кратен некоторому c_n. Очевидно, что все квазициклические группы, соответствующие одному и тому же простому числу p, изоморфны между собой.

Пусть p — простое число, а Q_p — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p. Ненулевые идеалы кольца Q_p являются главными идеалами, порождёнными числами p^k, где $k = 0, 1, \ldots$. Если рассматривать идеалы (p^k) как фундаментальную систему окрестностей нуля, то Q_p превратится в топологическое кольцо, и можно будет образовать пополнение Q_p^* кольца Q_p. Q_p^* также является кольцом, идеалы которого имеют вид (p^k), $k = 0, 1, \ldots$, причём это кольцо полно в топологии, определяемой его идеалами.

Элементы кольца Q_p^* могут быть представлены в следующем виде. Пусть $\{t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}\}$ — полная система представителей смежных классов кольца $p^k Q_p$ по идеалу $p^{k+1} Q_p$. Пусть $\pi \in Q_p^*$, и пусть $a_n \in Q_p$ — последовательность, сходящаяся к π. В силу определения последовательности Коши все её элементы (кроме конечного числа) принадлежат одному смежному классу по идеалу pQ_p, например смежному классу с представителем s_0. Почти все разности $a_n - s_0$, принадлежащие pQ_p, лежат в одном смежном классе кольца pQ_p по идеалу $p^2 Q_p$, например в смежном классе с представителем ps_1. Продолжая эти рассуждения дальше, мы получаем, что π однозначно определяет последовательность $s_0, ps_1, \ldots$. Поставив элементу π в соответствие формальный бесконечный ряд $s_0 + s_1 p + \ldots$, мы получим, что частичные суммы этого ряда $b_n = s_0 + s_1 p + \ldots + s_n p^n$ образуют в Q_p последовательность Коши, которая сходится в Q_p^* к π, так как $\pi - b_n \in p^k Q_p^*$. Из единственности пределов следует, что таким путём различным элементам из Q_p^* будут поставлены в соответствие различные ряды. Поэтому мы можем отождествить элементы π кольца Q_p^* с формальными рядами $s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + \ldots$ с коэффициентами из $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ и написать

$$\pi = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + \ldots \quad (s_n = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Получающееся так кольцо является *коммутативной областью целостности* (т. е. коммутативным кольцом без делителей нуля) и называется *кольцом целых p-адических чисел*.

Аддитивную группу кольца Q_p^* будем называть *группой p-адических чисел* и обозначать через J_p.

Предложение 1 [11]. *Периодическая группа A является прямой суммой p-групп A_p, принадлежащих различным простым числам p. Группы A_p однозначно определяются группой A.*

Подгруппы A_p называются *p-компонентами* группы A. По предложению 1 теория периодических групп в основном сводится к теории примарных групп.

Предложение 2 [11]. *Если существует проекция π группы A на её подгруппу B, то B служит для A прямым слагаемым.*

Предложение 3 [11]. *Для группы A эквивалентны следующие условия*:

1) *A — конечно порождённая группа*;
2) *A — прямая сумма конечного числа циклических групп.*

Система $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ненулевых элементов группы A называется *независимой*, если из равенства

$$n_1a_1 + \ldots + n_ka_k = 0 \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

всегда вытекает, что

$$n_1a_1 = \ldots = n_ka_k = 0.$$

Система элементов называется *зависимой*, если она не независима.

Бесконечная система $L = \{a_i\}_{i \in I}$ элементов группы A называется *независимой*, если в L всякая конечная подсистема независима. Независимая система M элементов группы A называется *максимальной*, если в A не существует независимой системы, строго содержащей M. *Рангом* $\mathrm{r}(A)$ группы A называется мощность её максимальной независимой системы, содержащей только элементы бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа.

Предложение 4. *Ранг $\mathrm{r}(A)$ группы A является инвариантом этой группы.*

Теорема 1 [12,18]. *Ограниченная группа является прямой суммой циклических групп.*

Теорема 2 [11]. *Любые два разложения группы в прямую сумму циклических групп бесконечного порядка и порядков, равных степеням простых чисел, изоморфны.*

Теорема 3 [8]. *Подгруппы прямых сумм циклических групп сами являются прямыми суммами циклических групп.*

Будем говорить, что элемент a группы A *делится* на натуральное число n ($n \mid a$), если уравнение $nx = a$ ($a \in A$) имеет решение в группе A. Группа D называется *делимой*, если $n \mid a$ для всех $a \in D$ и всех натуральных чисел n. Группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ служат примерами делимых групп.

Теорема 4. *Всякая делимая группа D является прямой суммой квазициклических групп и групп, изоморфных $\mathbb{Q}$. Мощности множеств компонент $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (для каждого p) и $\mathbb{Q}$ составляют полную и независимую систему инвариантов группы D.*

Следствие. *Всякая делимая p-группа D является прямой суммой групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Мощность множества компонент $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ является единственным инвариантом группы D.*

Теорема 5 [11]. *Для группы D эквивалентны следующие условия*:

1) *D — делимая группа*;
2) *D является прямым слагаемым всякой содержащей её группы.*

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad nG = G \cap nA.$$

Предложение 5 [20]. *Предположим, что подгруппа B группы A является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^k. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

1) *B — сервантная подгруппа группы A*;
2) *B — прямое слагаемое в A.*

Следствие. *Всякий элемент порядка p и конечной высоты можно вложить в конечное циклическое прямое слагаемое группы.*

Теорема 6 [7]. *Всякая ограниченная сервантная подгруппа выделяется прямым слагаемым.*

Следствие [15]. *p-группу B группы A можно вложить в ограниченное прямое слагаемое группы A тогда и только тогда, когда высоты отличных от нуля элементов группы B (взятые в совокупности) ограничены.*

Следствие. *Элемент a, порядок которого — степень простого числа, принадлежит конечному прямому слагаемому группы тогда и только тогда, когда подгруппа $\langle a\rangle$ не содержит отличных от нуля элементов бесконечной высоты.*

Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) подгруппа B является прямой суммой циклических p-групп и бесконечных циклических групп;
2) B есть сервантная подгруппа группы A;
3) фактор-группа A/B является p-делимой группой.

Подгруппа B обладает базисом, который называется *p-базисом* группы A.

Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы [17].

В дальнейшем нам будут интересовать p-группы и их p-базисные подгруппы. Если A — p-группа и q — простое число, отличное от p, то группа A имеет лишь одну q-базисную подгруппу, равную 0. Поэтому в случае p-групп мы будем называть p-базисные подгруппы просто *базисными*.

Теорема 7 [21]. *Подгруппа* $B = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, *где* B_n — *прямая сумма групп* $\mathbb{Z}_{p^n}$, *служит базисной подгруппой для* p*-группы* A *тогда и только тогда, когда при любом целом* $n > 0$ *подгруппа* $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ *является максимальным* p^n*-ограниченным прямым слагаемым группы* A.

Теорема 8 (Р. Бэр, Д. Л. Бойер [14]). *Предположим, что* B — *подгруппа* p*-группы* A,

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots,$$

где

$$B_n \cong \bigoplus_{\mu_n} \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Подгруппа B *является базисной подгруппой группы* A *тогда и только тогда, когда*

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus (B_n^* + p^n A),$$

где $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n^* = B_{n+1} \oplus B_{n+2} \oplus \ldots.$$

Так как подгруппа B имеет базис, а фактор-группа A/B — прямая сумма групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (т. е. A/B также имеет систему образующих, которую легко описать), то естественно объединить эти системы образующих и таким путём получить систему образующих группы A.

Запишем

$$B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle, \quad A/B = \bigoplus_{j \in J} C_j^*, \quad \text{где} \quad C_j^* = \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Если прямое слагаемое C_j^* порождается смежными классами $c_{j1}^*, \ldots, c_{jn}^*, \ldots$ по подгруппе B, для которых $pc_{j1}^* = 0$, $pc_{j,n+1}^* = c_{jn}^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то в группе A можно выбрать элементы $c_{jn} \in c_{jn}^*$ того же порядка, что и c_{jn}^*. Тогда получится следующая система соотношений:

$$pc_{j1} = 0, \quad pc_{j,n+1} = c_{jn} = b_{jn} \quad (n \geqslant 1,\ b_{jn} \in B),$$

где элемент b_{jn} должен иметь порядок не выше p^n, так как $\mathrm{o}(c_{jn}) = p^n$.

Систему элементов $\{a_i, c_{jn}\}_{i \in I,\ j \in J, n \in \omega}$ мы будем называть *квазибазисом* группы A.

Предложение 6 [16]. *Если* $\{a_i, c_{jn}\}$ — *квазибазис* p*-группы* A, *то любой элемент* $a \in A$ *можно записать в виде*

$$a = s_1 a_{i_1} + \ldots + s_m a_{i_m} + t_1 a_{j_1 n_1} + \ldots + t_r a_{j_r n_r}, \tag{1}$$

где s_i *и* t_j — *целые числа, ни одно* t_j *не делится на* p *и индексы* $i_1, \ldots, i_m$, *как и индексы* $j_1, \ldots, j_r$, *все различны. Запись (1) единственна в том смысле, что в ней однозначно определены члены* sa_i *и* tc_{jn}.

Теорема 9 (Л. Я. Куликов [9]). *Если B — базисная подгруппа редуцированной p-группы A, то*

$$|A| \leqslant |B|^{\omega}.$$

Финальным рангом базисной подгруппы B p-группы A назовём минимум кардинальных чисел $\mathrm{r}(p^n B)$. Заметим, что если ранг группы B равен μ_1, а финальный ранг B равен μ_2, то $A = A_1 \oplus A_2$, где группа A_1 ограниченная и имеет ранг μ_1, а базисная подгруппа группы A_2 имеет ранг μ_2, совпадающий с её финальным рангом.

Теперь нас будут интересовать группы автоморфизмов абелевых p-групп. Мы полагаем с этого момента $p > 2$.

Автоморфизм ε группы A называется *инволюцией*, если $\varepsilon^2 = 1$.

Следующие факты мы взяли из [11, том 2, с. 296—297].

1. Прямое разложение
$$A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k, \quad \text{где} \quad C_i \neq 0, \tag{2}$$
даёт k коммутирующих инволюций: ε_i определяется как автоморфизм группы A, для которого $\varepsilon_i|_{C_i} = -1$ и $\varepsilon_i|_{C_j} = 1$ при $i \neq j$. Будем говорить, что система $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ *принадлежит* разложению (2).
2. Для инволюции ε группы A положим
$$A_\varepsilon^+ = \{a \in A \mid \varepsilon a = a\}, \quad A_\varepsilon^- = \{a \in A \mid \varepsilon a = -a\}.$$
Тогда $A = A_\varepsilon^+ \oplus A_\varepsilon^-$. Следовательно, инволюции $\varepsilon \neq \pm 1$ дают нетривиальные прямые разложения группы A. Ассоциированные с таким разложением проекции — это отображения $\frac{1}{2}(1+\varepsilon)$ и $\frac{1}{2}(1-\varepsilon)$.
3. Две инволюции ε, ζ группы A коммутируют в том и только том случае, когда выполняется равенство
$$A = (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^+) \oplus (A_\varepsilon^+ \cap A_\zeta^-) \oplus (A_\varepsilon^- \cap A_\zeta^+) \oplus (A_\varepsilon^- \cap A_\zeta^-). \tag{3}$$
4. Коммутирующие инволюции $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ группы A единственным образом определяют такое разложение (2) группы A, что $\zeta_l|_{C_i} = \pm 1$ при всех i, l и для любых $i \neq j$ найдётся такое ζ_l, что одно из ограничений $\zeta_l|_{C_i}$ и $\zeta_i|_{C_j}$ есть $+1$, а другое -1.
5. Пусть система инволюций $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ принадлежит прямому разложению (2). *Централизатором* системы $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ назовём множество автоморфизмов
$$C\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} = \{\alpha \in \operatorname{Aut} A \mid \alpha\varepsilon_i = \varepsilon_i\alpha \text{ при } i = 1, \ldots, k\}.$$
Имеет место разложение
$$C\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} = \operatorname{Aut} C_1 \times \ldots \times \operatorname{Aut} C_k. \tag{4}$$

Теорема 10 [11, теорема 115.1]. *Центр группы автоморфизмов p-группы A состоит из умножений на p-адические единицы, если A — неограниченная группа, и из умножений на целые числа k, где $(k, p) = 1$, $1 \leqslant k < p^r$, если p^r — наименьшая верхняя грань порядков элементов из A.*

Воспользуемся дополнительными сведениями из [11, том 2, с. 310].

1. Группа A является ограниченной и p^n является наибольшим из порядков её элементов тогда и только тогда, когда $Z(\operatorname{Aut} A) \simeq \mathbb{Z}_{p^{n-1}(p-1)}$.
2. Пусть ε — инволюция группы A, $\varepsilon \neq \pm 1$. Тогда для разложения $A = A_\varepsilon^+ \oplus A_\varepsilon^-$ выяснить, имеет ли место ограниченность одного из слагаемых или обоих, можно следующим образом: если группа $Z\bigl(C(\varepsilon)\bigr)$ не содержит подгрупп, изоморфных J_p, то обе группы A_ε^+ и A_ε^- являются неограниченными, если она содержит такую подгруппу, то одна из A_ε^+ и A_ε^- является ограниченной, если же $Z\bigl(C(\varepsilon)\bigr)$ содержит прямое произведение двух таких групп, то обе группы являются ограниченными. С помощью пункта 1 легко определяется граница порядков элементов для ограниченных компонент.
3. Если $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где $A_i \neq 0$, и $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ — система инволюций, принадлежащая этому разложению, то группа $Z(C\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\})$ содержит ровно 2^k инволюций.
4. Инволюция ε называется *экстремальной*, если одна из групп A_ε^+ и A_ε^- отлична от нуля и неразложима. Эту неразложимую группу мы будем обозначать через A_ε, а вторую группу — $A_\varepsilon^\perp$. Порядком экстремальной инволюции ε мы будем называть порядок её неразложимой группы A_ε. Инволюция ε экстремальна тогда и только тогда, когда в группе $Z(C\{\varepsilon, \zeta\})$ содержится не более восьми инволюций при любом $\zeta \in C\{\varepsilon\}$.

Последнее утверждение позволяет нам записать экстремальность инволюции в виде формулы в языке первого порядка. Назовём эту формулу $\mathrm{Extreme}(\varepsilon)$.

Лемма 1. *Экстремальные инволюции ε_1 и ε_2 коммутируют в том и только том случае, когда либо они совпадают, либо $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}^\perp$ и $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon_1}^\perp$.*

Доказательство. Пусть $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}^\perp$ и $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon_1}^\perp$. Докажем, что инволюции ε_1 и ε_2 коммутируют. Согласно равенству (3) нам надо показать, что

$$A = (A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}) \oplus (A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}) \oplus (A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}^\perp) \oplus (A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}^\perp). \tag{5}$$

Это следует из условия, что $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} = 0$, $A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_2}$, $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}^\perp = A_{\varepsilon_1}$.

Пусть ε_1 и ε_2 коммутируют и не совпадают. Тогда верно равенство (5). Если $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} \neq 0$ и это пересечение выделяется прямым слагаемым, то $A_{\varepsilon_1} = A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_2}$ и $A_{\varepsilon_1}^\perp \neq A_{\varepsilon_2}^\perp$. Но тогда $(A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}^\perp) \subsetneq A_{\varepsilon_1}^\perp$, что противоречит (5). Следовательно, $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2} = 0$. Тогда ни одно из слагаемых $A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}$ и $A_{\varepsilon_1} \cap A_{\varepsilon_2}^\perp$ не может быть нулевым, что и означает, что $A_{\varepsilon_1} \subset A_{\varepsilon_2}^\perp$ и $A_{\varepsilon_2} \subset A_{\varepsilon_1}^\perp$ (из-за неразложимости A_{ε_1} и A_{ε_2}). □

По инволюции ξ мы не сможем отличить в языке первого порядка группы A_ξ^+ и A_ξ^-. Поэтому мы будем иметь дело с парами (ξ, ε), для которых выполняется $\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \xi\varepsilon = \varepsilon\xi$. Для таких пар $A_\varepsilon \subset A_\xi^+$ или $A_\varepsilon \subset A_\xi^-$. Множество A_ε и будет нам указывать на нужную из групп A_ξ^+ и A_ξ^- (обозначим её $A_{(\xi,\varepsilon)}$). Свойство быть парой мы будем обозначать формулой

$$\mathrm{Pair}(\xi, \varepsilon) := \xi^2 = 1 \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \xi\varepsilon = \varepsilon\xi.$$

Вместо $\forall\,\xi\ \forall\,\varepsilon\ \big(\mathrm{Pair}(\xi,\varepsilon)\Rightarrow(\ldots)\big)$ и $\exists\,\xi\ \exists\,\varepsilon\ \big(\mathrm{Pair}(\xi,\varepsilon)\wedge(\ldots)\big)$ мы будем писать соответственно $\forall\,(\xi,\varepsilon)$ и $\exists\,(\xi,\varepsilon)$. Выразим некоторые операции с инволюциями формулами.

Лемма 2. *Формула*

$$\varepsilon\in\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2 \rightleftharpoons \forall\,\varepsilon'\ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon')\wedge\varepsilon'\varepsilon_1=\varepsilon_1\varepsilon'\wedge\varepsilon'\varepsilon_2=\varepsilon_2\varepsilon'\wedge \\ \wedge\,\varepsilon'\neq\varepsilon_1\wedge\varepsilon'\neq\varepsilon_2\Rightarrow\varepsilon\varepsilon'=\varepsilon'\varepsilon)$$

для экстремальных ε, ε_1, ε_2, таких что $\varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon_2\varepsilon_1$, означает, что $A_\varepsilon\subset A_{\varepsilon_1}\oplus A_{\varepsilon_2}$ и $A_\varepsilon^\perp\supset A_{\varepsilon_1}^\perp\cap A_{\varepsilon_2}^\perp$.

Доказательство. Пусть $A_\varepsilon\subset A_{\varepsilon_1}\oplus A_{\varepsilon_2}$ и $A_\varepsilon^\perp\supset A_{\varepsilon_1}^\perp\cap A_{\varepsilon_2}^\perp$. Докажем для любой экстремальной инволюции ε', отличной от ε_1 и ε_2 и коммутирующей с ними, что она коммутирует и с ε. По лемме 1 $A_{\varepsilon'}\subset A_{\varepsilon_1}^\perp$, $A_{\varepsilon'}\subset A_{\varepsilon_2}^\perp$, $A_{\varepsilon_1}\subset A_{\varepsilon'}^\perp$, $A_{\varepsilon_2}\subset A_{\varepsilon'}^\perp$. Тогда $A_{\varepsilon_1}\oplus A_{\varepsilon_2}\subset A_{\varepsilon'}^\perp$ и $A_\varepsilon\subset A_{\varepsilon'}^\perp$, так как по условию $A_\varepsilon\subset A_{\varepsilon_1}\oplus A_{\varepsilon_2}$. Аналогично $A_{\varepsilon'}\subset A_{\varepsilon_1}^\perp\cap A_{\varepsilon_2}^\perp\subset A_\varepsilon^\perp$.

Пусть, наоборот, выполнена формула $\varepsilon\in\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2$. Если $A_\varepsilon\not\subset A_{\varepsilon_1}\oplus A_{\varepsilon_2}$, то мы можем выбрать $A_{\varepsilon'}\subset A_{\varepsilon_1}^\perp\cap A_{\varepsilon_2}^\perp$ и $A_{\varepsilon'}^\perp\supset A_{\varepsilon_1}\oplus A_{\varepsilon_2}$, $A_{\varepsilon'}^\perp\not\supset A_\varepsilon$, которые будут соответствовать инволюции ε', коммутирующей с ε_1 и ε_2, но не коммутирующей с ε. Если же $A_\varepsilon^\perp\not\supset A_{\varepsilon_1}^\perp\cap A_{\varepsilon_2}^\perp$, то мы можем выбрать $A_{\varepsilon'}^\perp\supset A_{\varepsilon_1}\oplus A_{\varepsilon_2}$ и $A_{\varepsilon'}\subset A_{\varepsilon_1}^\perp\cap A_{\varepsilon_2}^\perp$, $A_{\varepsilon'}\not\subset A_\varepsilon^\perp$, которые также будут соответствовать такой инволюции ε'. $\square$

Утверждения следующей леммы проверяются непосредственно.

Лемма 3.

1. *Формула*

$$\varepsilon_2\in(\xi_1,\varepsilon_1)\rightleftharpoons\forall\,\varepsilon\ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon)\wedge\varepsilon\in\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2\Rightarrow\varepsilon\xi_1=\xi_1\varepsilon)$$

для экстремальной ε_2 и пары (ξ_1,ε_1) означает, что $A_{\varepsilon_2}\subset A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$.

2. *Формула*

$$(\xi_1,\varepsilon_1)\subset(\xi_2,\varepsilon_2)\rightleftharpoons\forall\,\varepsilon\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon)\wedge\varepsilon\in(\xi_1,\varepsilon_1)\Rightarrow\varepsilon\in(\xi_2,\varepsilon_2)\big)$$

означает, что $A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}\subset A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$.

3. *Формула*

$$(\xi_1,\varepsilon_1)=(\xi_2,\varepsilon_2)\rightleftharpoons(\xi_1,\varepsilon_1)\subset(\xi_2,\varepsilon_2)\wedge(\xi_2,\varepsilon_2)\subset(\xi_1,\varepsilon_1)$$

означает, что $A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}=A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$.

4. *Формула*

$$(\xi_1,\varepsilon_1)\cap(\xi_2,\varepsilon_2)=(\xi_3,\varepsilon_3)\rightleftharpoons\varepsilon_3\in(\xi_1,\varepsilon_1)\wedge\varepsilon_3\in(\xi_2,\varepsilon_2)\wedge \\ \wedge\,\forall\,\varepsilon\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon)\wedge\varepsilon\in(\xi_1,\varepsilon_1)\wedge\varepsilon\in(\xi_2,\varepsilon_2)\Rightarrow\varepsilon\in(\xi_3,\varepsilon_3)\big)\wedge \\ \wedge\,\forall\,(\xi_4,\varepsilon_4)\ \Big(\varepsilon_4\in(\xi_1,\varepsilon_1)\wedge\varepsilon_4\in(\xi_2,\varepsilon_2)\wedge \\ \wedge\,\forall\,\varepsilon\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon)\wedge\varepsilon\in(\xi_1,\varepsilon_1)\wedge\varepsilon\in(\xi_2,\varepsilon_2)\Rightarrow\varepsilon\in(\xi_4,\varepsilon_4)\big)\Big)\Rightarrow \\ \Rightarrow(\xi_3,\varepsilon_3)\subset(\xi_4,\varepsilon_4)$$

означает, что $A_{(\xi_3,\varepsilon_3)}=A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}\cap A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$.

5. *Формула*

$$(\xi_1,\varepsilon_1)\oplus(\xi_2,\varepsilon_2)=(\xi_3,\varepsilon_3)\rightleftharpoons\forall\varepsilon\ \Big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\Big(\varepsilon\in(\xi_3,\varepsilon_3)\Leftrightarrow\exists\varepsilon_1'\ \exists\varepsilon_2'\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon_1')\wedge\mathrm{Extreme}(\varepsilon_2')\wedge$$
$$\wedge\,\varepsilon_1'\in(\xi_1,\varepsilon_1)\wedge\varepsilon_2'\in(\xi_2,\varepsilon_2)\wedge\varepsilon\in\varepsilon_1'\oplus\varepsilon_2')\big)\Big)\Big)\wedge$$
$$\wedge\,\forall\varepsilon\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon)\Rightarrow\varepsilon\notin(\xi_1,\varepsilon_1)\vee\varepsilon\notin(\xi_2,\varepsilon_2)\big)$$

означает, что $A_{(\xi_3,\varepsilon_3)}=A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}\oplus A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$.

6. *Формула*

$$\overline{(\xi_1,\varepsilon_1)}=(\xi_2,\varepsilon_2)\rightleftharpoons(\xi_2=\xi_1\vee\xi_2=-1\cdot\xi_1)\wedge\varepsilon_2\notin(\xi_1,\varepsilon_1)$$

означает, что $A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}\oplus A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}=A$.

2. Выделение специальных множеств (по Шелаху)

В этом разделе мы следуем статье С. Шелаха [19].

Пусть фиксирована абелева p-группа $A\cong\bigoplus\limits_{\mu}\mathbb{Z}_{p^l}$, где μ — бесконечное кардинальное число.

Будем считать, что эта абелева группа A есть прямая сумма двух подгрупп A_1 и A_2 и каждая из подгрупп имеет вид $\bigoplus\limits_{\mu}\mathbb{Z}_{p^l}$. Чтобы не путать индексы прямых слагаемых первой и второй групп, будем обозначать индексы для первой группы через α_i, а второй — через β_i.

Нас будут интересовать эндоморфизмы группы A_1, получаемые следующим образом.

Для любого $f\in\mathrm{End}(A_1)$ пусть $\mathrm{Rng}\,f$ — это образ f в A_1, $\mathrm{Cl}\,B$ (или $\langle B\rangle$) — замыкание множества $B\subset A_1$ в A_1, т. е. наименьшая подгруппа в A_1, содержащая множество B.

Как обычно, $\vec{x}$ обозначает конечную последовательность переменных $\vec{x}=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$. Линейную комбинацию $k_1x_1+\ldots+k_nx_n$, где $k_i\in\mathbb{Z}$, будем обозначать также через $\tau(x_1,\ldots,x_n)$ или $\tau(\vec{x})$. Будем называть такую линейную комбинацию *приведённой*, если все k_i отличны от нуля.

Пусть $\{a_\alpha\mid\alpha\in\mu\}$ — некоторое независимое подмножество элементов порядка p^l группы A_1. Ясно, что любая функция

$$h\colon\{a_\alpha\mid\alpha\in\mu\}\to A_1$$

имеет единственное расширение

$$\tilde{h}\in\mathrm{Hom}(\mathrm{Cl}\{a_\alpha\mid\alpha\in\mu\},A_1).$$

Пусть B — некоторое множество, h — функция из B в B. Для каждого $x\in B$ определим *глубину* элемента x ($\mathrm{Dp}(x)=\mathrm{Dp}(x,h)$) как ординальное число (или бесконечность), наименьшее из тех, что удовлетворяют следующим соотношениям:

1) $\mathrm{Dp}(x) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $x \in B$;
2) $\mathrm{Dp}(x) \geqslant \delta$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Dp}(x) \geqslant \alpha$ для каждого $\alpha \in \delta$, если δ — предельное ординальное число;
3) $\mathrm{Dp}(x) \geqslant \alpha+1$ тогда и только тогда, когда для некоторого $y \in B$ выполнено $h(y) = x$ и $\mathrm{Dp}(y) \geqslant \alpha$.

Лемма 4. *Пусть множество $\{a_\alpha \mid \alpha \in \mu\} \subset A_1$ независимо и состоит из элементов порядка p^l, а h — функция из μ в μ. Определим $\tilde{h}$ формулой*

$$\tilde{h}(k_1 a_{i_1} + \ldots + k_n a_{t_n}) = k_1 a_{h(t_1)} + \ldots + k_n a_{h(t_n)}.$$

Тогда

1) $\tilde{h} \in \mathrm{End}(\mathrm{Cl}\{a_\alpha \mid \alpha \in \mu\})$;
2) $\mathrm{Dp}(k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}, \tilde{h}) \geqslant \min\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathrm{Dp}(t_i, h)$;
3) *если в пункте 2) линейная комбинация $k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}$ приведённая и t_i различны, то имеет место равенство.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Докажем индукцией по ординальным числам α, что

$$\min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathrm{Dp}(t_i, h) \geqslant \alpha \implies \mathrm{Dp}(k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}, \tilde{h}) \geqslant \alpha.$$

Этого достаточно для доказательства второго утверждения. Для $\alpha = 0$ или предельного α утверждение очевидно. Для $\alpha = \beta + 1$ по предположению индукции и определению глубины существует такое $s_i \in I$, что $h(s_i) = t_i$ и $\mathrm{Dp}(s_i, h) \geqslant \beta$. Тогда $\min\limits_i \mathrm{Dp}(s_i, h) \geqslant \beta$, поэтому по предположению индукции

$$\mathrm{Dp}(k_1 a_{s_1} + \ldots + k_n a_{s_n}, \tilde{h}) \geqslant \beta.$$

Но

$$\tilde{h}(k_1 a_{s_1} + \ldots + k_n a_{s_n}) = k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n},$$

поэтому

$$\mathrm{Dp}(k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}, \tilde{h}) \geqslant \beta + 1 = \alpha.$$

Проверим третье утверждение. Достаточно доказать по индукции, что

$$\mathrm{Dp}(k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}, \tilde{h}) \geqslant \alpha \Rightarrow \mathrm{Dp}(t_i, h) \geqslant \alpha$$

для всех i. Для $\alpha = 0$ или для предельного α это очевидно. Для $\alpha = \beta + 1$ по определению глубины существует приведённая линейная комбинация $l_1 a_{s_1} + \ldots + l_m a_{s_m}$ с различными s_i, такая что

1) $\tilde{h}(l_1 a_{s_1} + \ldots + l_m a_{s_m}) = k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}$;
2) $\mathrm{Dp}(l_1 a_{s_1} + \ldots + l_m a_{s_m}, \tilde{h}) \geqslant \beta$.

По соотношению 2) и предположению индукции для $i = 1, \ldots, m$ выполнено $\mathrm{Dp}(s_i, h) \geqslant \beta$. По соотношению 1) и определению функции $\tilde{h}$ справедливо равенство

$$l_1 a_{h(s_1)} + \ldots + l_m a_{h(s_m)} = k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}.$$

Так как линейная комбинация $k_1 a_{t_1} + \ldots + k_n a_{t_n}$ приведённая и t_i различны, то
$$\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq \{h(s_1), \ldots, h(s_m)\}.$$
Значит, для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует такое k_i, $1 \leqslant k_i \leqslant m$, что $t_i = h(s_{k_i})$, поэтому
$$\mathrm{Dp}(t_i, h) \geqslant \mathrm{Dp}(s_{k_i}, h) + 1 \geqslant \beta + 1 = \alpha. \qquad \square$$

Нам будут требоваться для дальнейших доказательств эндоморфизмы группы A_1 именно описанного вида. Однако (в отличие от работы [4]) мы имеем дело не с кольцом эндоморфизмов, а с группой автоморфизмов группы A, поэтому нам требуется «закодировать» каждый эндоморфизм указанного вида некоторым специальным набором автоморфизмов.

Так как при работе с эндоморфизмами мы будем их только перемножать и проверять на равенство, то достаточно будет построить формулы для таких наборов, соответствующие умножению и сравнению на равенство эндоморфизмов.

Пусть пара $\hat{h} = (\xi, \varepsilon)$ отвечает за группу A_1 (т. е. $A_{(\xi,\varepsilon)} = A_1$). Мы будем «кодировать» эндоморфизм f указанного вида тройкой (f_1, f_2, f_3) (где f_1 — автоморфизм, а f_2 и f_3 — пары) следующим образом: f_2 будет отвечать за образ эндоморфизма f, f_3 — за ядро. Для каждого набора прямых слагаемых $\mathbb{Z}_{p^l} \subset A_1$, имеющих одинаковый образ при эндоморфизме f, ровно одно из них при автоморфизме f_1 будет переходить в этот образ, а остальные — в «свободные» (в которые ничего больше не переходит) слагаемые группы A_2. Прямые слагаемые $\mathbb{Z}_{p^l} \subset A_2$ при f_1 переходят в «свободные» прямые слагаемые групп A_1 и A_2 (ясно, что «свободных» прямых слагаемых хватит).

Лемма 5.

1. *Для экстремальных инволюций ε_1, ε_2 и произвольного автоморфизма f_1 формула*
$$f_1(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \rightleftharpoons \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1 = f_1 \vee \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1 = -1 \cdot f_1$$
означает, что $f_1(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2}$.
2. *Для экстремальных инволюций $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \hat{h}$ и построенной тройки (f_1, f_2, f_3), «кодирующей» эндоморфизм f, формула*
$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \rightleftharpoons \exists \varepsilon_0 \ \exists \varepsilon' \ (\varepsilon' \in \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1 \wedge \varepsilon' \in f_3 \wedge f_1(\varepsilon_0) = \varepsilon_2)$$
означает, что $f(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2}$.

Доказательство. 1. Пусть $f_1(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2}$. Возьмём $x \in A_{\varepsilon_1}$. Тогда
$$\varepsilon_1(x) = \pm x, \quad f_1 \varepsilon_1(x) = \pm f_1(x), \quad \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(x) = \varepsilon_2\bigl(\pm f_1(x)\bigr) = \pm f_1(x).$$
Теперь возьмём $x \in A_{\varepsilon_1}^{\perp}$. Аналогично
$$\varepsilon_1(x) = \mp x, \quad f_1 \varepsilon_1(x) = \mp f_1(x), \quad \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(x) = \varepsilon_2\bigl(\mp f_1(x)\bigr) = \pm f_1(x).$$

Обратно, пусть $f_1 = \varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1$ или $f_1 = -\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1$. Предположим, что $f_1(A_{\varepsilon_1}) \neq A_{\varepsilon_2}$. Тогда существует такой элемент $a \in A_{\varepsilon_1}$, что $f_1(a) \notin A_{\varepsilon_2}$. Пусть для определённости $\varepsilon_1|_{A_{\varepsilon_1}} = -1$, $\varepsilon_2|_{A_{\varepsilon_2}} = -1$ (в других случаях рассуждения аналогичны). Рассмотрим

$$\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(a) = \varepsilon_2 f_1(-a) = -\varepsilon_2 f_1(a) = \pm f_1(a).$$

Так как $f_1(a) \notin A_{\varepsilon_2}$, то такое возможно только при $f_1(a) \in A_{\varepsilon_2}^{\perp}$. В этом случае будет знак «$-$». Рассмотрим произвольный элемент $b \in A_{\varepsilon_1}^{\perp}$. Для него

$$f_1(b) = -\varepsilon_2 f_1 \varepsilon_1(b) = -\varepsilon_2 f_1(b).$$

Значит, $f_1(b) \in A_{\varepsilon_2}$, но это не может выполняться для всех $b \in A_{\varepsilon_1}^{\perp}$, так как f_1 — автоморфизм.

Утверждение 2 очевидно. $\square$

С помощью этой леммы мы можем выразить формулами умножение и сравнение на равенство троек, а также корректность тройки (т. е. что она действительно «кодирует» эндоморфизм). Утверждения следующей леммы проверяются непосредственно.

Лемма 6.

1. *Тройка* (f_1, f_2, f_3) *отвечает за некоторый эндоморфизм указанного вида тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} & f_2 \subset \hat{h} \wedge f_3 \subset \hat{h} \wedge \forall\, \varepsilon\ \Big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in f_2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \exists\, \varepsilon'\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon') \wedge \varepsilon' \in \hat{h} \wedge f_1(\varepsilon') = \varepsilon)\big) \wedge \\ & \wedge \forall\, \varepsilon\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in \hat{h} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \exists!\, \varepsilon_1\ \exists\, \varepsilon_2\ \exists\, \varepsilon_0\ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon_1) \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2) \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_0) \wedge \\ & \wedge \varepsilon_1 \varepsilon = \varepsilon \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_0 \in f_3 \wedge \varepsilon_0 \in \varepsilon \oplus \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \in \hat{h} \wedge f_1(\varepsilon_1) = \varepsilon_2))\Big). \end{aligned}$$

2. *Формула*

$$\begin{aligned} & (f_1, f_2, f_3) = (g_1, g_2, g_3) \rightleftharpoons f_2 = g_2 \wedge f_3 = g_3 \wedge \\ & \quad \wedge \forall\, \varepsilon\ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in \hat{h} \Rightarrow \\ & \quad \Rightarrow \exists\, \varepsilon_0\ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon_0) \wedge \varepsilon_0 \in f_2 \wedge f(\varepsilon) = \varepsilon_0 \wedge g(\varepsilon) = \varepsilon_0)\big) \end{aligned}$$

означает, что эндоморфизмы f и g, «кодируемые» соответственно тройками (f_1, f_2, f_3) *и* (g_1, g_2, g_3), *равны.*

3. *Формула*

$$\begin{aligned} & (f_1, f_2, f_3) \cdot (g_1, g_2, g_3) = (h_1, h_2, h_3) \rightleftharpoons \forall\, \varepsilon\ \Big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in \hat{h} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \big(\varepsilon \in h_2 \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon'\ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon') \wedge \varepsilon' \in g_2 \wedge f(\varepsilon') = \varepsilon)\big)\Big) \wedge \\ & \wedge \forall\, \varepsilon_1\ \forall\, \varepsilon_2\ \Big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon_1) \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2) \wedge \varepsilon_1 \in \hat{h} \wedge \varepsilon_2 \in h_2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \big(\varepsilon_2 = h(\varepsilon_1) \exists\, \varepsilon_3\ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon_3) \wedge \varepsilon_3 \in g_2 \wedge g(\varepsilon_1) = \varepsilon_3 \wedge f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2)\big)\Big) \wedge \end{aligned}$$

$$\wedge \forall \varepsilon \Big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \Rightarrow \big(\varepsilon \in h_3 \exists \varepsilon_1 \, \exists \varepsilon_2 \, \exists \varepsilon_3 \, (\varepsilon_1 \in \hat{h} \wedge \varepsilon_2 \in \hat{h} \wedge \varepsilon_3 \in \hat{h} \wedge$$
$$\wedge h(\varepsilon_1) = \varepsilon_3 \wedge h(\varepsilon_2) = \varepsilon_3 \wedge \varepsilon \in \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2)\big)\Big)$$

означает, что $fg = h$, где f, g и h — эндоморфизмы, «кодируемые» соответственно тройками (f_1, f_2, f_3), (g_1, g_2, g_3) и (h_1, h_2, h_3).

Обозначим множество всех таких троек через Ω. Теперь благодаря тому, что мы можем «кодировать» эндоморфизмы, из аналогичной теоремы в [4] (теорема 3.1) вытекает следующая теорема.

Теорема 11. *Существует формула $\tilde{\varphi}(\ldots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i \in \mu}$ — множество элементов из Ω. Тогда можно найти такой вектор $\bar{g}$, что формула $\tilde{\varphi}(f, \bar{g})$ истинна в Ω тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

3. Формулировка основной теоремы, разбиение на случаи

3.1. Язык второго порядка абелевой группы

Мы будем рассматривать модели второго порядка абелевых групп, т. е. будем рассматривать групповой язык второго порядка, в котором трёхместный предикатный символ будет обозначать не умножение, а сложение (т. е. мы будем писать $x_1 = x_2 + x_3$ вместо $P^3(x_1, x_2, x_3)$).

Формулы $\varphi(\ldots)$ языка $\mathcal{L}_2$ должны состоять из следующих подформул:

1) $\forall x$ $(\exists x)$;
2) $x_1 = x_2$ и $x_1 = x_2 + x_3$, где каждая из переменных x_1, x_2, x_3 либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформул $\forall x_i$ или $\exists x_i$, $i = 1, 2, 3$);
3) $\forall P(v_1, \ldots, v_n)$ $(\exists P(v_1, \ldots, v_n))$, $n > 0$;
4) $P(x_1, \ldots, x_n)$, где каждая из переменных $x_1, \ldots, x_n$, а также «предикатная» переменная $P(v_1, \ldots, v_n)$ либо являются свободными переменными формулы φ, либо определены в этой формуле с помощью подформул $\forall x_i$, $\exists x_i$, $\forall P(v_1, \ldots, v_n)$, $\exists P(v_1, \ldots, v_n)$.

Эквивалентность двух абелевых групп A_1 и A_2 в языке $\mathcal{L}_2$ мы будем обозначать $A_1 \equiv_{\mathcal{L}_2} A_2$ или $A_1 \equiv_2 A_2$.

Теорией данного языка $\mathcal{L}$ на модели $\mathcal{U}$ называется множество всех предложений языка $\mathcal{L}$, выполненных в этой модели.

3.2. Формулировка основной теоремы

Х. Лептин (см. [11]) доказал следующую теорему.

Теорема 12. *Пусть A, C — p-группы, $p \geqslant 3$. Если $\mathrm{Aut}\,A \simeq \mathrm{Aut}\,C$, то группы A и C обладают изоморфными базисными подгруппами и изоморфными делимыми частями.*

Мы хотим доказать аналогичную теорему для элементарно эквивалентных групп автоморфизмов абелевых p-групп.

Теорема 13. *Пусть A, C — p-группы, $p \geqslant 3$. Если $\mathrm{Aut}\,A \equiv \mathrm{Aut}\,C$, то группы A и C обладают эквивалентными в логике второго порядка базисными подгруппами и делимыми частями.*

Заметим, что если группа A конечна, то и группа $\mathrm{Aut}(A)$ также конечна. Так как в случае конечных моделей элементарная эквивалентность (а также эквивалентность в языке $\mathcal{L}_2$) равносильна изоморфности, то в случае когда одна из групп A_1 и A_2 конечна, основная теорема следует из теоремы Лептина. Таким образом, далее мы можем считать группы A_1 и A_2 бесконечными.

3.3. Разделение задачи на случаи

Разделим класс всех абелевых p-групп на следующие три подкласса:

1) ограниченные p-группы;
2) группы вида $D \oplus G$, где D — ненулевая делимая группа, G — ограниченная группа;
3) группы с неограниченной базисной подгруппой.

Покажем, как найти предложения, разделяющие группы из разных типов.

Если группа A ограниченная, то по теореме 10 центр её группы автоморфизмов конечен, а для любой неограниченной группы он бесконечен. Следовательно, мы можем отличить ограниченные группы от неограниченных с помощью формулы.

Следующая формула позволит нам «найти количество» различных разложений группы $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$ для экстремальных ε_1, ε_2 в прямые слагаемые.

Лемма 7. *Формула*

$$\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 = \varepsilon_1' \oplus \varepsilon_2' \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \forall \varepsilon \ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \Rightarrow (\varepsilon \in \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon \in \varepsilon_1' \oplus \varepsilon_2' \wedge \varepsilon \in \overline{\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2} \Leftrightarrow \varepsilon \in \overline{\varepsilon_1' \oplus \varepsilon_2'})\big)$$

для экстремальных ε_1, ε_2, ε_1', ε_2' означает, что $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_1'} \oplus A_{\varepsilon_2'}$ и $A_{\varepsilon_1}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2}^{\perp} = A_{\varepsilon_1'}^{\perp} \cap A_{\varepsilon_2'}^{\perp}$.

Утверждение очевидно.

Заметим, что если две пары коммутирующих экстремальных инволюций $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $(\varepsilon_1', \varepsilon_2')$, удовлетворяющие этой формуле, задают одинаковое разложение группы $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$, т. е. $A_{\varepsilon_1} = A_{\varepsilon_1'}$ и $A_{\varepsilon_2} = A_{\varepsilon_2'}$, то по лемме 1 прямые дополнения соответствующих им слагаемых также совпадают, т. е. $A_{\varepsilon_1}^{\perp} = A_{\varepsilon_1'}^{\perp}$

и $A^{\perp}_{\varepsilon_2} = A^{\perp}_{\varepsilon'_2}$, а значит, эти пары равны. Это означает, что количество различных разложений группы $A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$ равно количеству пар коммутирующих экстремальных инволюций ε'_1 и ε'_2, удовлетворяющих этой формуле.

В нашем случае группы A_{ε_1} и A_{ε_2} имеют вид $\mathbb{Z}_{p^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, или $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8.

1. *Группа* $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^m} (k \leqslant m)$ *допускает* p^{2k} *при* $k < m$ *и* $p^{2k-1} + (p^k - p^{k-1})^2$ *при* $k = m$ *различных разложений на прямые слагаемые.*
2. *Группа* $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ *допускает* p^k *различных разложений на прямые слагаемые, причём всегда одним из слагаемых будет исходное* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.
3. *Группа* $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ *допускает бесконечное число различных разложений на прямые слагаемые.*

Доказательство.

1. Пусть исходные слагаемые порождены элементами a и b соответственно: $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_{p^k}$, $\langle b \rangle = \mathbb{Z}_{p^m}$. У любого разложения можно выбрать порождающие элементы прямых слагаемых в виде $a + \alpha p^{m-k} b$ и $b + \beta a$, где $0 \leqslant \alpha, \beta < p^k$ (множитель p^{m-k} у первого порождающего нужен, чтобы его порядок был равен p^k). Слагаемые, порождённые такими элементами, не являются прямыми (т. е. имеют нетривиальное пересечение) тогда и только тогда, когда существуют такие γ и δ, $0 < \gamma < p^k$, $0 < \delta < p^m$, что

$$\begin{aligned}
&\gamma(a + \alpha p^{m-k} b) = \delta(b + \beta a) \iff \\
&\quad \iff \gamma - \delta\beta \,\vdots\, p^k,\ \delta - \gamma\alpha p^{m-k} \,\vdots\, p^m \iff \\
&\quad \iff \exists\, c \in \mathbb{Z}\ \delta = \gamma\alpha p^{m-k} + cp^m,\ \gamma - \beta(\gamma\alpha p^{m-k} + cp^m) \,\vdots\, p^k.
\end{aligned}$$

Это равносильно существованию такого γ, $0 < \gamma < p^k$, что

$$\gamma(1 - p^{m-k}\alpha\beta) \,\vdots\, p^k.$$

Последнее утверждение имеет место тогда и только тогда, когда

$$1 - p^{m-k}\alpha\beta \,\vdots\, p.$$

Если $k < m$, то это условие не выполнено никогда, а значит, α и β можно выбирать произвольным образом, т. е. всего имеется p^{2k} различных разложений. Рассмотрим случай $m = k$. Последние условие равносильно условию $\alpha\beta \equiv 1 \mod p$. Если $\alpha \,\vdots\, p$, то этому условию не удовлетворяет никакое β. Если $\alpha \not\vdots\, p$, то β, удовлетворяющих этому условию, всего p^{k-1}. Значит, различных разложений всего

$$p^{k-1}p^k + (p^k - p^{k-1})(p^k - p^{k-1}) = p^{2k-1} + (p^k - p^{k-1})^2.$$

2. Пусть исходное слагаемое $\mathbb{Z}_{p^k}$ порождено элементом a, а слагаемое $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — элементами $c_1, c_2, \ldots$. Так как в любой группе делимая часть выделяется единственным образом, то в любом разложении одним из слагаемых будет исходное $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. У второго слагаемого (порядка p^k) всегда можно выбрать образующий в виде $a + \alpha c_k$, где $0 \leqslant \alpha < p^k$. Следовательно, всего существует p^k различных разложений.

3. Пусть исходные слагаемые порождены элементами $c_1, c_2, \ldots$ и $d_1, d_2, \ldots$ соответственно. Тогда в качестве разложений можно брать такие, в которых первое слагаемое остаётся на месте, а второе порождается элементами $d_1 + \alpha c_l$, $d_2 + \alpha c_{l+1}$, $d_3 + \alpha c_{l+2}, \ldots$, где $l = 1, 2, \ldots$ и $0 < \alpha < p^l$. Ясно, что таких разложений бесконечно много. $\square$

Теперь мы можем записать формулу для пары (ξ, ε), отвечающей разложению группы A на делимую и редуцированную части.

Лемма 9. *Формула*

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon_1) \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2) \wedge \varepsilon_1 \in (\xi_D, \varepsilon_D) \wedge \varepsilon_2 \in \overline{(\xi_D, \varepsilon_D)} \wedge \\
&\quad \wedge \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \Rightarrow \forall \varepsilon_1', \varepsilon_2' \ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon_1') \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2') \wedge \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' \wedge \\
&\quad \wedge \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 = \varepsilon_1' \oplus \varepsilon_2' \Rightarrow \varepsilon_1' = \varepsilon_1 \vee \varepsilon_2' = \varepsilon_1)\big)
\end{aligned}$$

для пары (ξ_D, ε_D) означает, что $A_{(\xi_D, \varepsilon_D)}$ — делимая часть, а $A_{\overline{(\xi_D, \varepsilon_D)}}$ — редуцированная часть группы A.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 8, так как только в разложениях группы вида $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ одно из прямых слагаемых всегда совпадает с исходным. $\square$

Благодаря лемме 8 и тому, что мы можем найти разложение группы A на делимую и редуцированную части, мы теперь можем узнать, является ли редуцированная часть группы A ограниченной. Построим предложения

$$\begin{aligned}
\varphi_l := {}&\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon_1) \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2) \wedge \\
&\wedge \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 \in \overline{(\xi_D, \varepsilon_D)} \wedge \varepsilon_2 \in \overline{(\xi_D, \varepsilon_D)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \#\{(\varepsilon_1', \varepsilon_2') \mid \mathrm{Extreme}(\varepsilon_1') \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2') \wedge \\
&\wedge \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' \wedge \varepsilon_1' \oplus \varepsilon_2' = \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2\} \leqslant l),
\end{aligned}$$

где вместо $\#\{\ldots\} \leqslant l$ подставим формулу, выполняющуюся для множеств из не более чем l элементов. Предложение φ_l означает, что в редуцированной части все подгруппы вида $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$ имеют не более l разложений. Согласно лемме 8 это ограничение равносильно ограничению на порядки циклических подгрупп редуцированной части. Поэтому если хоть одно из предложений φ_l истинно, то редуцированная часть является ограниченной, иначе она неограниченная.

Следовательно, для любых двух групп A_1 и A_2 из разных классов существует предложение, на котором различаются группы $\mathrm{Aut}(A_1)$ и $\mathrm{Aut}(A_2)$.

Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что если группы $\mathrm{Aut}(A_1)$ и $\mathrm{Aut}(A_2)$ элементарно эквивалентны, то группы A_1 и A_2 лежат в одном классе, и если они обе лежат в первом или втором классе, то соответственно они сами или их редуктивные прямые слагаемые ограничены одним и тем же числом $n = p^k$, которое можно считать известным.

4. Ограниченные p-группы

4.1. Разделение пар инволюций

Мы рассматриваем группу $A = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i$, где $A_i \cong \bigoplus\limits_{\mu_i} \mathbb{Z}_{p^i}$, причём A ограничена числом n. Так как группа A бесконечна, то $\mu_l = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \mu_i$ бесконечно и совпадает с мощностью группы A. Для каждого i мы хотим найти формулу, которая выполняется для экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым группы A, изоморфным $\mathbb{Z}_{p^i}$, и только для них.

Рассмотрим для каждого l формулу

$$\begin{aligned}&\varphi_l(\varepsilon_1) := \mathrm{Extreme}(\varepsilon_1) \wedge \forall\, \varepsilon_2 \ (\mathrm{Extreme}(\varepsilon_2) \wedge \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \#\{(\varepsilon_1', \varepsilon_2') \mid \mathrm{Extreme}(\varepsilon_1') \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2') \wedge \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' \wedge \varepsilon_1' \oplus \varepsilon_2' = \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2\} \leqslant l).\end{aligned}$$

С помощью этих формул (и леммы 8) мы можем различать экстремальные инволюции разных порядков, за исключением одного случая. Если группа A имеет ровно одно прямое слагаемое максимального порядка и ровно одно слагаемое второго по максимальности порядка, то экстремальные инволюции, отвечающие этим двум слагаемым, мы отличить друг от друга не можем. В этом случае мы знаем порядок этих двух слагаемых. Покажем, как различить этот случай. Возьмём максимальное l, для которого формула φ_l выполнима. Эта формула должна выполняться ровно для двух независимых экстремальных инволюций, и эти инволюции должны соответствовать прямым слагаемым разных порядков. Последнее свойство выражается формулой

$$\forall\, f \ (f\varepsilon_1 f^{-1} \neq \varepsilon_2)$$

для экстремальных инволюций ε_1 и ε_2.

Обозначим через $\mathrm{ord}_i(\varepsilon)$ формулу, выполняющуюся для экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым порядка p^i, а в том случае, когда мы не можем отличить две экстремальные инволюции, соответствующие прямым слагаемым порядков p^{k_1} и p^k ($k_1 \leqslant k$), через $\mathrm{ord}_{k_1}(\varepsilon)$ обозначим формулу, выполняющуюся только для одной из них, а $\mathrm{ord}_k(\varepsilon)$ — только для другой.

Теперь рассмотрим следующую формулу:

$$\begin{aligned}\mathrm{Comp}\big((\xi_1, \varepsilon_1), \ldots, (\xi_k, \varepsilon_k)\big) := \big((\xi_1, \varepsilon_1) \oplus \ldots \oplus (\xi_k, \varepsilon_k) = (1, \varepsilon_1)\big) \wedge \\ \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{k} \forall\, \varepsilon \ \big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in (\xi_i, \varepsilon_i) \Rightarrow \mathrm{ord}_i(\varepsilon)\big)\Big).\end{aligned}$$

Эта формула означает, что $A_{(\xi_1,\varepsilon_1)} \oplus \ldots \oplus A_{(\xi_k,\varepsilon_k)} = A$ — это разложение группы A, изоморфное разложению $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i$.

Будем считать, что пары $(\xi_1,\varepsilon_1),\ldots,(\xi_k,\varepsilon_k)$ из формулы $\mathrm{Comp}(\ldots)$ фиксированы. Для того чтобы отличать их от других пар, будем обозначать их через $\widetilde{(\xi_1,\varepsilon_1)},\ldots,\widetilde{(\xi_k,\varepsilon_k)}$.

Число l из множества $\{1,\ldots,k\}$, для которого выполнено предложение

$$\mathrm{Card}_l = \exists\, a \bigwedge_{i=1,\ i\neq l}^{k} \Big(\forall\, \varepsilon_1 \in \widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)}\ \exists\, \varepsilon_2 \in \widetilde{(\xi_l,\varepsilon_l)}\\ a(\varepsilon_2) \in \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 \wedge a(\varepsilon_2) \neq \varepsilon_2 \wedge \forall\, \varepsilon \in \widetilde{(\xi_i,\varepsilon_i)}\ a(\varepsilon) = \varepsilon\Big),$$

является номером группы A_l с $|A_l| = |A| = \mu$.

Формула Card_l показывает, что можно написать формулы, определяющие для любых двух пар (ξ_1,ε_1) и (ξ_2,ε_2), выполнено ли $|A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}| < |A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}|$, $|A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}| > |A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}|$ или $|A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}| = |A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}|$. Будем обозначать эти формулы через $|(\xi_1,\varepsilon_1)| < |(\xi_2,\varepsilon_2)|$, $|(\xi_1,\varepsilon_1)| > |(\xi_2,\varepsilon_2)|$ и $|(\xi_1,\varepsilon_1)| = |(\xi_2,\varepsilon_2)|$ соответственно.

Формула

$$\mathrm{Fin}(\xi,\varepsilon) := \forall\,(\xi_1,\varepsilon_1)\ \forall\,(\xi_2,\varepsilon_2)\ \big((\xi_1,\varepsilon_1) = (\xi,\varepsilon) \oplus (\xi_2,\varepsilon_2) \Rightarrow |(\xi,\varepsilon)| < |(\xi_1,\varepsilon_1)|\big)$$

означает, что группа $A_{(\xi,\varepsilon)}$ является конечно порождённой.

Формула

$$\mathrm{Count}(\xi,\varepsilon) := \neg\mathrm{Fin}(\xi,\varepsilon) \wedge \forall\,(\xi_1,\varepsilon_1)\ (\neg\mathrm{Fin}(\xi_1,\varepsilon_1) \Rightarrow |(\xi,\varepsilon)| \leqslant |(\xi_1,\varepsilon_1)|)$$

выполняется для проекций на счётно порождённые группы и только для них.

4.2. Специальные множества

Сначала уточним, какие специальные множества мы хотим получить. Нам требуется получить три множества. Первое из них должно содержать μ_i независимых экстремальных инволюций подгруппы A_i, для каждого $i = 1,\ldots,k$, второе — $\mu = \mu_l$ независимых экстремальных инволюций подгруппы A_l (также независимых с инволюциями первого множества), а третье — μ пар инволюций, соответствующих независимым прямым слагаемым группы A_l, каждое из которых является суммой счётного числа слагаемых, соответствующих инволюциям второго множества.

По теореме 11 мы видим, что существует формула $\varphi(\bar{g};f)$, удовлетворяющая следующему условию. Если $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из Ω, то существует такой вектор $\bar{g}$, что формула $\varphi(\tilde{g};f)$ истинна в Ω тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$. Зафиксируем эту формулу φ.

Пусть мы имеем некоторое фиксированное $i \in \{1,\ldots,k\}$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_i(\bar{g}) := \forall\, f' \ \Big(\varphi(\bar{g}, f') \Rightarrow \mathrm{Extreme}(f') \wedge f' \in \widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)}\Big) \wedge \\ \wedge \forall\, (\xi', \varepsilon') \ \Big((\xi', \varepsilon') \subset \widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)} \wedge \forall\, f_1 \ \big(\varphi(\bar{g}, f_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_1 \in (\xi', \varepsilon')\big)\Big) \Rightarrow |(\xi', \varepsilon')| = \Big|\widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)}\Big| \wedge \\ \wedge \forall\, f' \ \Big(\varphi(\bar{g}, f') \Rightarrow \Big(\exists\, (\xi, \varepsilon) \ (\xi, \varepsilon) \subset \widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)} \wedge \\ \wedge \forall\, f_1 \ \big(\varphi(\bar{g}, f_1) \wedge f_1 \neq f' \Rightarrow f_1 \in (\xi, \varepsilon)\big) \wedge f' \in \overline{(\xi, \varepsilon)}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Часть

$$\forall\, f' \ \Big(\varphi(\bar{g}, f') \Rightarrow \mathrm{Extreme}(f') \wedge f' \in \widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)}\Big)$$

выполняется только для экстремальных инволюций f, соответствующих прямым слагаемым группы A_i.

Часть

$$\forall\, (\xi', \varepsilon') \ \Big((\xi', \varepsilon') \subset \widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)} \wedge \forall\, f_1 \ \big(\varphi(\bar{g}, f_1) \Rightarrow f_1 \in (\xi', \varepsilon')\big)\Big) \Rightarrow |(\xi', \varepsilon')| = \Big|\widetilde{(\xi_i, \varepsilon_i)}\Big|$$

означает, что любая подгруппа группы A_i, содержащая все такие слагаемые A_f, что $\varphi(\overline{g}, f)$, имеет ту же мощность, что и A_i, т. е. что мощность множества этих f равна μ_i.

Последняя часть формулы означает, что для любого f', для которого выполнено $\varphi(\bar{g}, f')$, группа, порождённая всеми остальными f, для которых выполнено $\varphi(\bar{g}, f)$, не пересекается с f', т. е. множество всех f, для которых $\varphi(\bar{g}, f)$, независимо. Это множество мы будем обозначать через $\mathbf{F}_i$. Оно состоит из μ_i независимых экстремальных инволюций, соответствующих прямым слагаемым группы A_i. Естественно, такое множество получается для любого вектора $\bar{g}_i$, удовлетворяющего формуле $\tilde{\varphi}_i(\bar{g}_i)$, поэтому следовало бы писать не $\mathbf{F}_i$, а $\mathbf{F}_i(\bar{g}_i)$, что мы и будем делать далее. Однако в случаях, когда параметр несуществен, мы будем его опускать.

Объединение всех $\mathbf{F}_i$ для $i = 1, \ldots, k$ мы будем обозначать через $\mathbf{F}$. Множество $\mathbf{F}$ зависит от параметра $\bar{g} = (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_k)$.

Теперь нам нужно получить множество $\mathbf{F}'$, состоящее из $\mu = \mu_l$ независимых экстремальных инволюций подгруппы A_l. Это делается совершенно аналогично предыдущему случаю, следует лишь добавить условие независимости этих инволюций и инволюций из $\mathbf{F}_l$. Обозначим соответствующую формулу через $\tilde{\varphi}'(\bar{g}_l, \bar{g}')$.

Теперь получим множество $\mathbf{F}''$, состоящее из μ пар инволюций, соответствующим независимым прямым слагаемым группы A_l. Это также можно сделать аналогично предыдущим двум случаям, но теперь вместо одного вектора $\bar{g}$ надо рассматривать два вектора $\bar{g}''$ и $\bar{g}'''$, такие что $\bar{g}''$ отвечает за обычные инволюции в парах, а $\bar{g}'''$ — за экстремальные инволюции. Инволюция ξ, такая что $\varphi(\bar{g}'', \xi)$, и экстремальная инволюция ε, такая что $\varphi(\bar{g}''', \varepsilon)$, будут соответствовать друг другу, если

$$\overline{\mathrm{Pair}}(\xi,\varepsilon) \rightleftharpoons \forall \xi' \; \exists \varepsilon' \; \Big(\varphi(\bar g'',\xi') \wedge \varphi(\bar g''',\varepsilon') \wedge \xi' \neq \xi \wedge \varepsilon' \neq \varepsilon \Rightarrow (\xi',\varepsilon') \subset \overline{(\xi,\varepsilon)}\Big)$$

(это определение однозначно).

Кроме того, нужно добавить условие

$$\forall \xi \; \forall \varepsilon \; \Big(\varphi(\bar g'',\xi) \wedge \varphi(\bar g''',\varepsilon) \wedge \overline{\mathrm{Pair}}(\xi,\varepsilon) \Rightarrow (\xi,\varepsilon) \subset \widetilde{(\xi_l,\varepsilon_l)} \wedge \mathrm{Count}(\xi,\varepsilon) \wedge$$

$$\wedge \forall \varepsilon' \; \Big(\mathrm{Extreme}(\varepsilon') \wedge \varepsilon' \in (\xi,\varepsilon) \Rightarrow \exists f \; \big(\varphi(\bar g',f) \wedge (f=\varepsilon' \vee f=-\varepsilon' \vee f\varepsilon' \neq \varepsilon' f)\big)\Big)\Big).$$

Обозначим полученную формулу через $\tilde\varphi''(\bar g',\bar g'',\bar g''')$.

4.3. Интерпретация группы A для каждого элемента $\mathbf{F}''$

Под интерпретацией группы A для каждого элемента из $\mathbf{F}''$ мы будем понимать следующее. Мы имеем μ независимых прямых слагаемых F_i ($i \in \mu$), каждое из которых есть прямая сумма счётного числа циклических групп порядка p^l. Если мы сможем каждому элементу группы A поставить в соответствие автоморфизм, тождественный на прямом дополнении к F_i, то мы научимся каждому множеству элементов группы A мощности μ ставить в соответствие некоторый автоморфизм, что нам и будет далее требоваться для получения теории второго порядка группы A. По этой причине в этом пункте мы сосредоточимся на биективном соответствии между некоторыми автоморфизмами, тождественными на дополнении к F_i, и элементами группы A, причём введём на множестве таких автоморфизмов операцию $\oplus$, которая при этой биекции будет соответствовать сложению на группе A.

Фиксируем некоторую пару $(\xi,\varepsilon) \in \mathbf{F}''$. Рассмотрим множество $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ всех автоморфизмов $h \in \mathrm{Aut}\, A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\forall f' \in \mathbf{F}' \; \Big(f' \in (\xi,\varepsilon) \Rightarrow \big(h(f') = f' \vee \exists f \in \mathbf{F} \; (f' \neq h(f') \in f \oplus f')\big)\Big)$, что означает, что для любой экстремальной инволюции f' из нашего специального множества $\mathbf{F}'$, такой что $A_{f'} \subset A_{(\xi,\varepsilon)}$, либо $h(A_{f'}) = A_{f'}$, либо $h(A_{f'}) \subset A_f \oplus A_{f'}$ (причём $h(A_{f'}) \neq A_{f'}$) для некоторой экстремальной инволюции $f \in \mathbf{F}$;
2) $\exists (\xi',\varepsilon') \; \Big(\mathrm{Fin}(\xi',\varepsilon') \wedge \forall f' \in \mathbf{F}' \; \Big(f' \in (\xi,\varepsilon) \Rightarrow \big(h(f') \neq f' \Leftrightarrow f' \in (\xi',\varepsilon')\big)\Big)\Big)$, что означает, что лишь для конечного числа инволюций $f' \in F'$ выполнено $h(A_{f'}) \neq A_{f'}$ (т. е. $h(A_{f'}) \subset A_f \oplus A_{f'}$ для некоторой $f \in \mathbf{F}$);
3) $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} \forall f \in \mathbf{F}_i \; \neg\Big(\exists f_1 \ldots \exists f_{p^i} \Big(\bigwedge\limits_{q \neq s} f_q \neq f_s \wedge f_1,\ldots,f_{p^i} \in F' \wedge f_1,\ldots,f_{p^i} \in$ $\in (\xi,\varepsilon) \wedge h(f_1) \in f \oplus f_1 \wedge \ldots \wedge h(f_{p^i}) \in f \oplus f_{p^i}\Big)\Big)$, что означает, что для каждого $i = 1,\ldots,k$ и $f \in \mathbf{F}_i$ число таких $f' \in \mathbf{F}'$ ($f' \in (\xi,\varepsilon)$), что $h(A_{f'}) \subset A_f \oplus A_{f'}$, не превышает $p^i - 1$.

Два элемента h_1 и h_2 множества $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ будем считать эквивалентными ($h_1 \sim_{(\xi,\varepsilon)} h_2$), если выполняется формула

$$\exists\, h\ \Big(h^{-1}h_1h \in \mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)} \wedge \forall\, f'\ \forall\, f\ (f' \in \mathbf{F}' \wedge f' \in (\xi,\varepsilon) \wedge f \in \mathbf{F} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f' \neq h_2(f') \in f \oplus f' \Leftrightarrow f' \neq h^{-1}h_1h(f') \in f \oplus f')\Big).$$

Эта формула означает, что существует автоморфизм h, переводящий h_1 в автоморфизм $h^{-1}h_1h \in \mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$, действующий так же, как и h_2 (т. е. образ любого слагаемого $A_{f'}$ ($f' \in \mathbf{F}'$, $f' \in (\xi,\varepsilon)$) при действии обоих этих автоморфизмов либо совпадает с этим слагаемым, либо лежит внутри $A_f \oplus A_{f'}$ для одного и того же $f \in \mathbf{F}$). Получившееся таким образом множество $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)} \,/ \sim_{(\xi,\varepsilon)}$ обозначим через $\widetilde{\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}}$. Элементы этого множества можно интерпретировать как множество, состоящее из конечных наборов экстремальных инволюций множества $\mathbf{F}$ с условием, что каждая инволюция из $\mathbf{F}_i$ может входить в такой набор не более p^i-1 раз. Соответственно, каждый элемент множества $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ можно интерпретировать как множество пар, где первый элемент — это инволюция f из $\mathbf{F}$, а второй элемент — это целое число от 0 до p^i-1, где i таково, что $f \in \mathbf{F}_i$, причём почти все (все, кроме конечного числа) вторые компоненты пар равны 0. Теперь можно построить биективное отображение между множеством $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ и группой A, положив образом описанного выше множества $\{\langle f_j, l_j\rangle \mid j \in J\}$ элемент $\sum\limits_{j\in J} l_jb_j = a \in A$, где b_j — это некоторый заранее фиксированный образующий циклической группы A_{f_j}.

Осталось ввести на множестве $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ сложение так, чтобы полученное нами биективное отображение стало изоморфизмом абелевых групп.

Зададим сложение следующей формулой ($h_1, h_2, h_3 \in \widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$):

$$(h_3 = h_1 \oplus h_2) := \bigwedge_{i=1}^{k} \forall\, f \in \mathbf{F}_i$$
$$\Bigg(\bigwedge_{j=0}^{p^i-1} \exists\, g_1 \ldots \exists\, g_j \in \mathbf{F}'\ \bigwedge_{q\neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge g_q \neq h_3(g_q) \in g_q \oplus f) \wedge$$
$$\wedge \neg\bigg(\exists\, g_1 \ldots \exists\, g_{j+1} \in \mathbf{F}'\ \bigwedge_{q\neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge g_q \neq h_3(g_q) \in g_q \oplus f\bigg)\Bigg) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Bigg(\bigvee_{m=0}^{j} \exists\, g_1 \ldots \exists\, g_m \in \mathbf{F}'\ \bigwedge_{q\neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge g_q \neq h_1(g_q) \in g_q \oplus f) \wedge$$
$$\wedge \neg\bigg(\exists\, g_1 \ldots \exists\, g_{m+1} \in \mathbf{F}'\ \bigwedge_{q\neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi,\varepsilon) \wedge g_q \neq h_1(g_q) \in g_q \oplus f)\bigg) \wedge$$

$$\wedge \exists g_1 \dots \exists g_{\gamma(j,m)} \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi, \varepsilon) \wedge g_q \neq h_2(g_q) \in g_q \oplus f) \wedge$$

$$\wedge \neg \Bigl(\exists g_1 \dots \exists g_{\gamma(j,m)+1} \in \mathbf{F}' \bigwedge_{q \neq s} (g_q \neq g_s \wedge g_q \in (\xi, \varepsilon) \wedge g_q \neq h_2(g_q) \in g_q \oplus f) \Bigr) \Bigr),$$

где $\gamma(j, m) = j - m$ при $j \geqslant m$ и $\gamma(j, m) = p^i + j - m$ при $j < m$.

Теперь мы видим, что для каждой пары $(\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}''$ имеется формульное множество $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ с операцией сложения $\oplus$, изоморфное группе A.

4.4. Доказательство первого случая в теореме

Предложение 7. *Для двух бесконечных абелевых p-групп A_1 и A_2, ограниченных числом p^k, из элементарной эквивалентности групп $\mathrm{Aut}(A_1)$ и $\mathrm{Aut}(A_2)$ следует эквивалентность групп A_1 и A_2 в языке $\mathcal{L}_2$.*

Доказательство. Для $(\xi_1, \varepsilon_1), (\xi_2, \varepsilon_2) \in \mathbf{F}''$ введём формулу

$$\mathrm{Resp}_{(\xi_1,\varepsilon_1),(\xi_2,\varepsilon_2)}(h) := \forall g \in \mathbf{F}' \Bigl(\bigl(g \in \overline{(\xi_1, \varepsilon_1)} \cap \overline{(\xi_2, \varepsilon_2)} \Rightarrow h(g) = g \bigr) \wedge$$
$$\wedge \bigl(g \in (\xi_1, \varepsilon_1) \Rightarrow h(g) \in (\xi_2, \varepsilon_2) \bigr) \wedge \bigl(g \in (\xi_2, \varepsilon_2) \Rightarrow h(g) \in (\xi_1, \varepsilon_1) \bigr) \Bigr).$$

Эта формула означает, что автоморфизм h изоморфно отображает друг в друга слагаемые $A_{(\xi_1,\varepsilon_1)}$ и $A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$.

Как и раньше, рассмотрим произвольное предложение ψ в логике второго порядка теории групп и укажем алгоритм, переводящий это предложение ψ в такое предложение $\tilde{\psi}$ первого порядка языка теории колец, что $\tilde{\psi}$ выполняется в $\mathrm{Aut}(A)$ тогда и только тогда, когда φ выполняется в A.

Переведём предложение ψ в предложение

$$\exists \bar{g}_1 \dots \exists \bar{g}_k \, \exists \bar{g}' \, \exists \bar{g}'' \, \exists \bar{g}''' \Bigl(\tilde{\varphi}_1(\bar{g}_1) \wedge \dots \tilde{\varphi}_k(\bar{g}_k) \wedge \tilde{\varphi}'(\bar{g}_l, \bar{g}') \wedge \tilde{\varphi}''(\bar{g}', \bar{g}'' \bar{g}''') \wedge$$
$$\wedge \exists \widetilde{(\xi, \varepsilon)} \in \mathbf{F}''(\bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''') \psi' \Bigl(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k, \bar{g}', \bar{g}'', \bar{g}''', \widetilde{(\xi, \varepsilon)} \Bigr) \Bigr),$$

где формула $\psi'(\dots)$ получается из предложения ψ с помощью следующих замен подформул, входящих в ψ:

1) подформула $\forall x$ заменяется на подформулу $\forall x \in \widetilde{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$;
2) подформула $\exists x$ заменяется на подформулу $\exists x \in \widetilde{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$;
3) подформула $\forall P_m(v_1, \dots, v_m)(\dots)$ заменяется на подформулу

$$\forall f_1^P \dots \forall f_m^P \left(\forall (\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}'' \left(\bigwedge_{i=1}^{m} (f_i^P \in \mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}) \right) \Rightarrow \dots \right);$$

4) подформула $\exists P_m(v_1, \dots, v_m)(\dots)$ заменяется на подформулу

$$\exists f_1^P \dots \exists f_m^P \left(\forall (\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}'' \left(\bigwedge_{i=1}^{m} (f_i^P \in \widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}) \right) \wedge \dots \right);$$

5) подформула $x_1 = x_2$ заменяется на подформулу $x_1 \sim_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}} x_2$;

6) подформула $x_1 = x_2 + x_3$ заменяется на подформулу $x_1 \sim_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}} x_2 \oplus x_3$;

7) подформула $P_m(x_1, \dots, x_m)$ заменяется на подформулу

$$\exists (\xi, \varepsilon) \in \mathbf{F}'' \, \exists h \left(\mathrm{Resp}_{(\xi,\varepsilon),\widetilde{(\xi,\varepsilon)}} \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} h^{-1} f_i^P h \sim_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}} x_i \right).$$

Объясним, что означают переводы. Благодаря наличию множества $\mathbf{F}''$ мы имеем μ групп $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ для $(\xi,\varepsilon) \in \mathbf{F}''$, каждая из которых изоморфна группе A. Мы фиксируем один заранее выбранный элемент $\widetilde{(\xi,\varepsilon)} \in \mathbf{F}''$ и таким образом фиксируем одну группу $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$, изоморфную A. Естественно, все подформулы $\forall x$, $\exists x$, $x_1 = x_2$, $x_1 = x_2 + x_3$ (относящиеся к логике первого порядка) мы будем переводить в соответствующие подформулы для группы $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$. Теперь нам нужно каким-то образом интерпретировать в кольце $\mathrm{Aut}(A)$ произвольное отношение $P_m(v_1, \dots, v_m)$ на множестве A. Такое отношение есть некоторое подмножество в A^m, т. е. набор упорядоченных m-ок элементов из A. Всего таких m-ок не может больше μ, поэтому множество $P_m(v_1, \dots, v_m)$ можно считать множеством из μ m-ок элементов из A (некоторые из них могут совпадать). Мы рассматриваем m автоморфизмов $f_1^P, \dots, f_m^P \in \mathrm{Aut}(A)$, каждый из которых является элементом $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ для любого $(\xi,\varepsilon) \in \mathbf{F}''$. Таким образом, для каждого $(\xi,\varepsilon) \in \mathbf{F}''$ ограничение автоморфизмов $f_1^P, \dots, f_m^P$ на $A_{(\xi,\varepsilon)}$ является m-кой элементов группы $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$ ($\cong A$), где изоморфизм между $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{\widetilde{(\xi,\varepsilon)}}$ и $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ осуществляется с помощью некоторого изоморфизма h.

Отсюда видно, что предложение ψ выполняется в группе A тогда и только тогда, когда предложение $\tilde{\psi}$ выполняется в кольце $\mathrm{Aut}(A)$. Окончание доказательства такое же, как в предыдущем разделе. □

5. Прямые суммы делимых и ограниченных p-групп

Любая конечная конечно порождённая абелева p-группа A имеет вид $D \oplus G$, где D — делимая конечно порождённая группа, G — конечная группа. Не нуждается в доказательстве следующее предложение.

Предложение 8. *Если абелевы p-группы A_1 и A_2 являются конечно порождёнными, то из элементарной эквивалентности их групп автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(A_1)$ *и* $\mathrm{Aut}(A_2)$ *следует, что группы A_1 и A_2 изоморфны.*

Теперь мы будем иметь дело с бесконечно порождёнными группами. Нам потребуется сравнивать мощности некоторых конечных множеств экстремальных инволюций.

5.1. Сравнение мощностей множеств экстремальных инволюций

В этом разделе мы будем считать, что у нас есть множества G_1, G_2, G_3, G_0, F' экстремальных инволюций одного порядка (т. е. соответствующих квазициклическим прямым слагаемым или циклическим слагаемым одного порядка) и множество F'' пар инволюций, соответствующих счётно порождённым прямым слагаемым того же порядка, причём множества G_1, G_2, G_3, G_0 конечны, а $|F'| = |F''| = \mu$. Внутри каждого из множеств G_1, G_2, G_3, G_0, F' экстремальные инволюции независимы, однако разные множества могут содержать зависимые или даже совпадающие инволюции. Кроме того, каждое счётно порождённое прямое слагаемое из F'' разбивается на неразложимые прямые слагаемые, соответствующие экстремальным инволюциям из F'.

Справедливы следующие утверждения.

1. $|G_1| \leqslant |G_2| \Leftrightarrow \exists\, f\ \big(f^2 = 1 \wedge \forall\, g \in G_1\ (f(g) \in G_2)\big)$.
2. $|G_1| = |G_2| \Leftrightarrow |G_1| \leqslant |G_2| \wedge |G_2| \leqslant |G_1|$.
3. $|G_1| + |G_2| = |G_3| \Leftrightarrow \exists\, f_1\ \exists\, f_2\ \big(f_1^2 = f_2^2 = 1 \wedge \forall\, g\ \in G_1\ f_1(g) \in G_3 \wedge \wedge \forall\, g \in G_2\ f_2(g) \in G_3 \wedge \forall\, g \in G_3\ (f_1(g) \in G_1 \wedge f_2(g) \notin G_2 \vee f_1(g) \notin G_1 \wedge \wedge f_2(g) \in G_2)\big)$.
4. При условии $|G_1| < |G_0|$, $|G_2| < |G_0|$, $|G_3| < |G_0|$
$$|G_1| + |G_2| \equiv |G_3| \bmod |G_0| \Leftrightarrow |G_1| + |G_2| = |G_3| \vee |G_1| + |G_2| = |G_3| + |G_0|,$$
где свойство $|G_1| + |G_2| = |G_3| + |G_0|$ выражается аналогично предыдущему пункту.
5.
$$\begin{aligned} |G_1| = p|G_2| \Leftrightarrow \exists\, f_1, \ldots, f_p\ \bigg(& f_1^2 = \ldots = f_p^2 = 1 \wedge \\ & \wedge \forall\, g \in G_1\ \Big((f_1(g) \in G_2 \vee \ldots \vee f_p(g) \in G_2) \wedge \\ & \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg (f_i(g) \in G_2 \wedge f_j(g) \in G_2)\Big) \wedge \\ & \wedge \forall\, g \in g_2\ (f_1(g) \in G_1 \wedge \ldots \wedge f_p(g) \in G_1)\bigg). \end{aligned}$$
6.
$$\begin{aligned} &|G_1| = p^{|G_0|}|G_2| \Leftrightarrow \exists\, (\xi_0, \varepsilon_0)\bigg(\mathrm{Fin}(\xi_0, \varepsilon_0) \wedge \\ &\quad \wedge |\{\varepsilon \in F' \mid \exists\, \xi\ (\xi, \varepsilon) \in F'' \wedge (\xi, \varepsilon) \cap (\xi_0, \varepsilon_0) \neq \varnothing\}| = |G_0| + 1 \wedge \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\wedge \forall (\xi,\varepsilon) \in F'' \Bigg((\xi,\varepsilon) \cap (\xi_0,\varepsilon_0) \neq \varnothing \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bigg(\big(\exists!\, (\xi',\varepsilon') \in F''\ \big((\xi',\varepsilon') \cap (\xi_0,\varepsilon_0) \neq \varnothing \wedge \\
&\wedge |\{f \in F' \mid f \in (\xi',\varepsilon') \cap (\xi_0,\varepsilon_0)\}| = p|\{f \in F' \mid f \in (\xi,\varepsilon) \cap (\xi_0,\varepsilon_0)\}|\big) \vee \\
&\vee |\{f \in F' \mid f \in (\xi,\varepsilon) \cap (\xi_0,\varepsilon_0)\}| = |G_1|\big) \wedge \\
&\wedge (\exists!\, (\xi',\varepsilon') \in F''\ \big((\xi',\varepsilon') \cap (\xi_0,\varepsilon_0) \neq \varnothing \wedge \\
&\wedge p|\{f \in F' \mid f \in (\xi',\varepsilon') \cap (\xi_0,\varepsilon_0)\}| = |\{f \in F' \mid f \in (\xi,\varepsilon) \cap (\xi_0,\varepsilon_0)\}|\big) \vee \\
&\vee |\{f \in F' \mid f \in (\xi,\varepsilon) \cap (\xi_0,\varepsilon_0)\}| = |G_2|\big)\bigg)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Последняя формула означает, что существует набор из $|G_0|+1$ пар инволюций, в котором есть одна пара инволюций, у которой соответствующее прямое слагаемое имеет $|G_1|$ образующих, одна пара, у которой соответствующее прямое слагаемое имеет $|G_2|$ образующих, а остальные пары выстроены в ряд, где соответствующее прямое слагаемое у каждой следующей пары имеет в p раз больше образующих, чем у предыдущей.

5.2. Доказательство второго случая в теореме

Мы рассматриваем группу

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \oplus A_\infty,$$

где

$$A_i \cong \bigoplus_{\mu_i} \mathbb{Z}_{p^i}, \quad A_\infty \cong \bigoplus_{\mu_\infty} \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

С помощью формулы Card_l из пункта 4.1 найдём такое l, что $|A_l| = |A| = \mu$, $l \in \{1,\dots,k,\infty\}$. Аналогично пункту 4.2 выделим следующие специальные множества:

1) множества $\mathbf{F}_i$ ($i \in \{1,\dots,k,\infty\}$) из μ_i независимых экстремальных инволюций порядка p^i;
2) множества $\mathbf{F}'_i$ ($i \in \{1,\dots,k,\infty\}$) из μ_i независимых экстремальных инволюций порядка p^l, соответствующих экстремальным инволюциям из $\mathbf{F}_i$;
3) множества $\mathbf{F}''_i$ ($i \in \{1,\dots,k,\infty\}$) из μ_i пар инволюций, каждая из которых содержит экстремальную инволюцию из $\mathbf{F}_i$ и соответствующую экстремальную инволюцию из $\mathbf{F}'_i$;
4) множества $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}'_c$, $\mathbf{F}'_d$ из μ независимых экстремальных инволюций порядка p^l;
5) множества $\mathbf{F}''$, $\mathbf{F}''_0$ из μ_i независимых пар инволюций, соответствующим независимым прямым слагаемым группы A_l, каждое из которых является суммой счётного числа слагаемых, соответствующих инволюциям $\mathbf{F}'$,

$\mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d$ соответственно (в каждой паре инволюций из $\mathbf{F}''_0$ содержится счётное число инволюций и из $\mathbf{F}'_c$, и из $\mathbf{F}'_d$).

Для инволюции $f' \in \mathbf{F}'_i$ через $\mathrm{Cor}(f')$ мы будем обозначать соответствующую инволюцию из $\mathbf{F}_i$, т. е. такую инволюцию $f \in \mathbf{F}_i$, что

$$\exists\,(\xi,\varepsilon) \in \mathbf{F}''_i\ \big(f \in (\xi,\varepsilon) \wedge f' \in (\xi,\varepsilon)\big).$$

Интерпретация элемента из ограниченной части группы A полностью аналогична пункту 4.3, следует лишь в определениях $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$, $\sim_{(\xi,\varepsilon)}$ и $\oplus$ заменить $h(f) \in f \oplus f'$ на $h(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')$.

Теперь нам надо проинтерпретировать элемент из делимой части группы A. Для этого, как и в пункте 4.3, зафиксируем пару (ξ,ε) и определим множество $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$, предикат эквивалентности $\sim_{(\xi,\varepsilon)}$ и операцию $\oplus$. Итак, рассмотрим множество $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ автоморфизмов $h \in \mathrm{Aut}\,A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\forall\, f \in \mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d$
$$\Big(f \in (\xi,\varepsilon) \Rightarrow \Big(h(f) = f \vee \exists\, f' \in \mathbf{F}_\infty\ \big(f \neq h(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')\big)\Big)\Big),$$

что означает, что для любой экстремальной инволюции f из $\mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d$, такой что $A_f \subset A_{(\xi,\varepsilon)}$, либо $h(A_f) = A_f$, либо $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{\mathrm{Cor}(f')}$ (причём $h(A_f) \neq A_f$) для некоторой экстремальной инволюции $f' \in \mathbf{F}_\infty$;

2) $\exists\,(\xi',\varepsilon')$
$$\Big(\mathrm{Fin}(\xi',\varepsilon') \wedge \forall\, f \in \mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d\ \Big(f \in (\xi,\varepsilon) \Rightarrow \big(h(f) \neq f \Leftrightarrow f \in (\xi',\varepsilon')\big)\Big)\Big),$$

что означает, что лишь для конечного числа инволюций $f \in \mathbf{F}'_c \cup \mathbf{F}'_d$ выполнено $h(A_f) \neq A_f$ (т. е. $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{\mathrm{Cor}(f')}$ для некоторой инволюции $f' \in \mathbf{F}_\infty$);

3) $\forall\, f' \in \mathbf{F}_\infty\ |\{f \in F'_c \mid f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')\}| <$
$$< p^{|\{f \in F'_d \mid f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')\}|},$$

что означает, что для каждого $f' \in \mathbf{F}_\infty$ число таких $f \in \mathbf{F}'_c$ ($f \in (\xi,\varepsilon)$), что $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{\mathrm{Cor}(f')}$, меньше p^m, где m — число таких $f \in \mathbf{F}'_d$ ($f \in (\xi,\varepsilon)$), что $h(A_f) \subset A_f \oplus A_{\mathrm{Cor}(f')}$.

Два элемента h_1 и h_2 множества $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ будем считать эквивалентными ($h_1 \sim_{(\xi,\varepsilon)} h_2$), если выполняется следующая формула:

$$\begin{aligned}
&\forall\, f' \in \mathbf{F}_\infty\ \Big(\big(|\{f \in \mathbf{F}'_d \mid f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_1(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')\}| \leqslant \\
&\quad \leqslant |\{f \in \mathbf{F}'_d \mid f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_2(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')\}| \wedge \\
&\quad \wedge |\{f \in \mathbf{F}'_c \mid f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_2(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')\}| = \\
&\quad = |\{f \in \mathbf{F}'_c \mid f \in (\xi,\varepsilon) \wedge h_1(f) \in f \oplus \mathrm{Cor}(f')\}| \times
\end{aligned}$$

$$\times\, p^{|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_2(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|-|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_1(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|}\big)\ \vee$$
$$\vee\,\big(|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_2(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|\leqslant$$
$$\leqslant|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_1(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|\,\wedge$$
$$\wedge\,|\{f\in\mathbf{F}'_c \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_1(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|=$$
$$=|\{f\in\mathbf{F}'_c \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_2(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|\,\times$$
$$\times\, p^{|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_1(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|-|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h_2(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|}\big)\Big).$$

Так же, как и в пункте 4.3, получившееся множество $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}/\!\sim_{(\xi,\varepsilon)}$ обозначим через $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$. В отличие от пункта 4.3, каждый элемент этого множества можно интерпретировать как множество троек (а не пар), где первый элемент — это инволюция f из $\mathbf{F}_\infty$ (напомним, что инволюция f отвечает квазициклическому слагаемому, которое порождается элементами $c_1,\dots,c_n,\dots$, где $pc_1=0$, $pc_2=c_1,\dots,pc_{n+1}=c_n,\dots$, и каждый элемент в котором может быть представлен в виде λc_n, где $0\leqslant\lambda<p^n$), второй элемент $(|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h(f)\in f\oplus\mathrm{Cor}(f')\}|)$ — это натуральное число, обозначающее номер порождающего элемента, а третий элемент $(|\{f\in\mathbf{F}'_c \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h(f)\in f\oplus\mathrm{Cor}(f')\}|)$ — коэффициент перед этим порождающим. Теперь можно построить биективное отображение между множеством $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$ и группой A, положив образом описанного выше множества $\{\langle f_j,n_j,l_j\rangle \mid j\in J\}$ элемент $\sum\limits_{j\in J} l_j c_{j\ n_j}=a\in A$, где $c_{j\ n_j}$ — заранее фиксированный образующий с номером n_j квазициклической группы A_{f_j}.

Теперь зададим сложение следующей формулой ($h_1,h_2,h_3\in\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$):

$$(h_3=h_1\oplus h_2):=\forall f'\in F_\infty\ \Big(\exists h'_1\in\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}\ \exists h'_2\in\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}\ \exists h'_3\in\widetilde{\mathrm{Aut}}_{(\xi,\varepsilon)}$$
$$\big(h'_1\sim_{(\xi,\varepsilon)} h_1\wedge h'_2\sim_{(\xi,\varepsilon)} h_2\wedge h'_3\sim_{(\xi,\varepsilon)} h_3\,\wedge$$
$$\wedge\,|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h'_1(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|=$$
$$=|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h'_2(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|=$$
$$=|\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h'_3(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|\,\wedge$$
$$\wedge\,|\{f\in\mathbf{F}'_c \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h'_1(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|\,+$$
$$+\,|\{f\in\mathbf{F}'_c \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h'_2(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|\equiv$$
$$\equiv|\{f\in\mathbf{F}'_c \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h'_3(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|$$
$$\mathrm{mod}\ |\{f\in\mathbf{F}'_d \mid f\in(\xi,\varepsilon)\wedge h'_3(f)\in f\oplus \mathrm{Cor}(f')\}|\big)\Big).$$

Остаток доказательства повторяет пункт 4.4. Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Предложение 9. *Для двух бесконечно порождённых абелевых p-групп A_1 и A_2, редуцированные части которых ограничены числом p^k, из элементарной эквивалентности групп $\mathrm{Aut}(A_1)$ и $\mathrm{Aut}(A_2)$ следует эквивалентность групп A_1 и A_2 в языке $\mathcal{L}_2$.*

6. Группы с неограниченной базисной подгруппой

Всегда в этом разделе мы будем предполагать, что $A = D \oplus G$, группа D делима (может быть нулевой), группа G является редуцированной и имеет неограниченную базисную подгруппу B,

$$B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots,$$

где

$$B_n \cong \bigoplus_{\mu_n} \mathbb{Z}(p^n),$$

$\mathrm{r}(D) = \mu_D$, $|B| = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu_n = \mu_B$, $|G| = \mu_G$, $\mu = |A| = \max(\mu_D, \mu_G)$.

Мы считаем фиксированной пару инволюций (ξ_D, ε_D), отвечающую подгруппе D.

6.1. Сравнение порядков экстремальных инволюций

Мы хотим сравнить порядки двух экстремальных инволюций ε_1 и ε_2. Пусть порядок инволюции ε_0, независимой с данными инволюциями, больше их порядков. Тогда по лемме 8 $\varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1$ содержит в себе больше экстремальных инволюций, чем $\varepsilon_0 \oplus \varepsilon_2$. Это даёт нам возможность сравнивать порядки ε_1 и ε_2 формулой. Пусть у нас есть бесконечное множество $\mathbf{F}$ независимых экстремальных инволюций.

Лемма 10. *Формула*

$$\mathrm{ord}(\varepsilon_1) = \mathrm{ord}(\varepsilon_2) \rightleftharpoons \exists\, f\;\; f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$$

для экстремальных инволюций ε_1 и ε_2 из редуцированной части означает, что порядки групп A_{ε_1} и A_{ε_2} совпадают.

Доказательство. Действительно, если существует автоморфизм f, переводящий A_{ε_1} в A_{ε_2}, то порядки этих подгрупп должны совпасть.

Обратно, если порядки подгрупп A_{ε_1} и A_{ε_2} совпадают, то существует искомый автоморфизм f, например меняющий местами A_{ε_1} и A_{ε_2} и тождественный на дополнении к $A_{\varepsilon_1} + A_{\varepsilon_2}$. □

Мы также будем писать $\mathrm{ord}(\varepsilon_1) = \mathrm{ord}(\varepsilon_2)$, если обе инволюции ε_1 и ε_2 лежат в делимой части.

Обозначим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}(\varepsilon_1) \leqslant_{\varepsilon_0} \mathrm{ord}(\varepsilon_2) \rightleftharpoons \exists\, f_1, f_2\; \forall\, \varepsilon \in \mathbf{F}\\
&\quad \Big((f_1(\varepsilon) = \varepsilon \vee \exists\, \varepsilon' \in \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_1\; \mathrm{ord}(\varepsilon') = \mathrm{ord}(\varepsilon_1) \wedge f_1(\varepsilon) \in \varepsilon \oplus \varepsilon') \wedge\\
&\quad \wedge (f_2(\varepsilon) = \varepsilon \vee \exists\, \varepsilon' \in \varepsilon_0 \oplus \varepsilon_2\; \mathrm{ord}(\varepsilon') = \mathrm{ord}(\varepsilon_2) \wedge f_2(\varepsilon) \in \varepsilon \oplus \varepsilon') \wedge\\
&\quad \wedge (f_1(\varepsilon) = \varepsilon \vee f_2(\varepsilon) = \varepsilon) \Big) \wedge\\
&\quad \wedge \exists\, f \forall \varepsilon \in \mathbf{F}\; (f_1(\varepsilon) \neq \varepsilon \Rightarrow \exists\, \varepsilon' \in \mathbf{F}\; f_2(\varepsilon') \neq \varepsilon' \wedge f(\varepsilon') = \varepsilon).
\end{aligned}$$

Тогда формула

$$\mathrm{ord}(\varepsilon_1) < \mathrm{ord}(\varepsilon_2) \rightleftharpoons \exists\, \varepsilon_0\ \mathrm{ord}(\varepsilon_1) \leqslant_{\varepsilon_0} \mathrm{ord}(\varepsilon_2) \wedge \mathrm{ord}(\varepsilon_2) \not\leqslant_{\varepsilon_0} \mathrm{ord}\varepsilon_1$$

будет означать, что порядок инволюции ε_1 меньше порядка инволюции ε_2. Мы также будем писать $\mathrm{ord}(\varepsilon_1) < \mathrm{ord}(\varepsilon_2)$, если инволюция ε_1 из редуцированной части, а ε_2 — из делимой.

6.2. Выделение базисной подгруппы

Для каждой экстремальной инволюции ε рассмотрим следующие формульные множества.

1. Формула

$$\mathrm{Rest}_\varepsilon(\xi_1, \varepsilon_1) := \forall\, \varepsilon_2\ \big(\varepsilon_2 \in (\xi_1, \varepsilon_1) \Rightarrow \mathrm{ord}(\varepsilon_2) \leqslant \mathrm{ord}(\varepsilon)\big)$$

выделяет пары инволюций (ξ_1, ε_1), которым соответствуют прямые суммы циклических групп порядка, не превосходящего $\mathrm{ord}(A_\varepsilon)$.

2. Формула

$$\begin{aligned}&\mathrm{MaxRest}_\varepsilon(\xi_1, \varepsilon_1) := \\ &\quad := \mathrm{Rest}_\varepsilon(\xi_1, \varepsilon_1) \wedge \forall\, (\xi_2, \varepsilon_2)\ \big(\mathrm{Rest}_\varepsilon(xi_2, \varepsilon_2) \Rightarrow (\xi_1, \varepsilon_1) \not\subset (\xi_2, \varepsilon_2)\big)\end{aligned}$$

выделяет пары инволюций (ξ_1, ε_1), которым соответствуют максимальные прямые суммы циклических групп порядка, не превосходящего $\mathrm{ord}(A_\varepsilon)$.

3. Пусть известно, что формула $\varphi(\bar g, f)$ для некоторого вектора $\bar g$ выделяет экстремальные инволюции, соответствующие системе независимых циклических неразложимых слагаемых, порождающих некоторую базисную подгруппу в G. Напишем соответствующее условие на вектор $\bar g$:

$$\begin{aligned}\tilde\varphi(\bar g) &:= \forall\, f\ \Big(\varphi(\bar g, f) \Rightarrow \mathrm{Extreme}(f) \wedge f \in \overline{(\xi_D, \varepsilon_D)} \wedge \\ &\wedge \forall\, f'\ (\varphi(\bar g, f') \Rightarrow ff' = f'f) \wedge \forall\, (\xi, \varepsilon)\ \big(\forall\, f'\ \big(f' \in (\xi, \varepsilon) \Leftrightarrow \varphi(\bar g, f') \wedge \\ &\wedge \mathrm{ord}(f') \leqslant \mathrm{ord}(f)\big) \Rightarrow \mathrm{MaxRest}(\xi, \varepsilon)\big)\Big).\end{aligned}$$

Это условие означает, что, во-первых, все инволюции в системе экстремальны; во-вторых, все они содержатся в редуцированной части группы A; в-третьих, они независимы между собой; в-четвёртых, все экстремальные инволюции выделенной системы, соответствующие слагаемые которых имеют порядок, не превосходящий заданное число p^k, порождают максимальную p^k-ограниченную подгруппу в A. Благодаря критерию базисной подгруппы (см. теорему 7) мы получаем, что полученная система порождает базисную подгруппу. Назовём эту систему $\mathbf{F}_B$.

6.3. Несчётный случай

Теперь, когда мы выделили базисную подгруппу, мы можем поступить точно так же, как и в предыдущих двух случаях. Однако для этого нам нужно рассмотреть ещё две возможности. В первой положим, что группа A несчётна. Тогда существует «слой» A_i, $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, мощности μ. Мы можем определить этот «слой» с помощью формулы Card, подобной формуле Card_l из пункта 4.1:

$$\mathrm{Card}(\hat{\varepsilon}) := \forall \varepsilon \ |\{\varepsilon' \mid \mathrm{ord}(\varepsilon') = \mathrm{ord}(\varepsilon)\}| \leqslant |\{\varepsilon' \mid \mathrm{ord}(\varepsilon') = \mathrm{ord}(\hat{\varepsilon})\}|.$$

Интерпретация элементов из делимой части группы A полностью аналогична пункту 5.2 с тем лишь отличием, что здесь все специальные множества экстремальных инволюций должны быть подмножествами $\mathbf{F}_B$. Покажем, чем отличаются интерпретации редуцированной части.

Во-первых, у нас не будет различных $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}'_i$, $\mathbf{F}''_i$, $i \in \mathbb{N}$, а будут только их объединения $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$, $\mathbf{F}''$.

Во-вторых, в определении $\mathrm{Aut}_{(\xi,\varepsilon)}$ третий пункт заменится на

$$\forall f \in \mathbf{F}\ \exists f_0 \in \mathbf{F}\ \big(\mathrm{ord}(f_0) > \mathrm{ord}(f) \wedge |\{f' \in (\xi,\varepsilon) \mid h(f') \in f' \oplus \mathrm{Cor}(f)\}| < \\ < |\{f_1 \in f \oplus f_0 \mid f \oplus f_1 = f \oplus f_0\}|\big),$$

что означает, что для любой $f \in \mathbf{F}$ число таких $f' \in (\xi,\varepsilon)$, что $h(A_{f'}) \subset \subset A_{\mathrm{Cor}(f)} \oplus A_{f'}$, меньше числа разложений $f \oplus f_0$ вида $f \oplus f_1$, $f_1 \in f \oplus f_0$, для некоторой инволюции $f_0 \in \mathbf{F}$ большего порядка, а значит, меньше порядка f.

Наконец, сложение элементов будет задаваться формулой

$$h_3 = h_1 \oplus h_2 \rightleftharpoons \forall f \in \mathbf{F}\ \exists f_0 \in \mathbf{F}\ \big(\mathrm{ord}(f_0) > \mathrm{ord}(f) \wedge \\ \wedge |\{f' \in (\xi,\varepsilon) \mid h_3(f') \in f' \oplus \mathrm{Cor}(f)\}| \equiv \\ \equiv |\{f' \in (\xi,\varepsilon) \mid h_1(f') \in f' \oplus \mathrm{Cor}(f)\}| + \\ + |\{f' \in (\xi,\varepsilon) \mid h_2(f') \in f' \oplus \mathrm{Cor}(f)\}| \mod |\{f_1 \in f \oplus f_0 | f \oplus f_1 = f \oplus f_0\}|\big).$$

6.4. Счётный случай

Счётный случай отличается только тем, что может не существовать «слоя» A_i мощности $\mu = \omega$, который нужен для кодирования элементов. Но вместо этого мы определим специальное множество $\mathbf{F}_0$, содержащее по одной экстремальной инволюции для всех порядков, и вместо инволюций порядка p_l будем использовать инволюции из $\mathbf{F}_0$. Оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство предыдущих случаев.

Тем самым мы разобрали все случаи и доказали теорему 13.

Литература

[1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.

[2] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265—1278.

[3] Бунина Е. И. Элементарные свойства групп Шевалле // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 157—158.

[4] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 135—224.

[5] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 51—134.

[6] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[7] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. — 1941. — Т. 9. — С. 165—182.

[8] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. — 1945. — Т. 16. — С. 129—162.

[9] Куликов Л. Я. Обобщённые примарные группы. I // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 247—326; II // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 85—167.

[10] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.

[11] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974.

[12] Baer R. Der Kern, eine charakteristische Untergruppe // Compositio Math. — 1934. — Vol. 1. — P. 254—283.

[13] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 29—35.

[14] Boyer D. L. On the theory of p-basic subgroups of Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963. — P. 323—330.

[15] Erdélyi M. Direct summands of Abelian torsion groups // Acta Univ. Debrecen. — 1955. — Vol. 2. — P. 145—149.

[16] Fuchs L. On the structure of Abelian p-groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1953. — Vol. 4. — P. 267—288.

[17] Fuchs L. Notes on Abelian groups. I // Ann. Univ. Sci. Budapest. — 1959. — Vol. 2. — P. 5—23; II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1960. — Vol. 11. — P. 117—125.

[18] Prüfer H. Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen // Math. Z. — 1923. — Vol. 17. — P. 35—61.

[19] Shelah S. Interpreting set theory in the endomorphism semi-group of a free algebra or in the category // Ann. Sci. Univ. Clermont Math. — 1976. — Vol. 13. — P. 1—29.

[20] Szele T. On direct decomposition of Abelian groups // J. London Math. Soc. — 1953. — Vol. 28. — P. 247—250.

[21] Szele T. On the basic subgroups of Abelian p-groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1954. — Vol. 5. — P. 129—141.

[22] Tolstykh V. Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups // Ann. Pure Appl. Logic. — 2000. — Vol. 105. — P. 103—156.