Об одном классе модулей, близких к нётеровым

О. Ю. ДАШКОВА
Днепропетровский национальный университет
e-mail: odashkova@yandex.ru

УДК 512.544

Ключевые слова: секционный p-ранг, нётеров модуль, локально разрешимая группа.

Аннотация

Исследуется $\mathbf{R}G$-модуль A над коммутативным нётеровым кольцом $\mathbf{R}$. Пусть G — группа, имеющая бесконечный секционный p-ранг (или бесконечный 0-ранг), такая что $C_G(A) = 1$, $A/C_A(G)$ не является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем и для каждой собственной подгруппы H бесконечного секционного p-ранга (или бесконечного 0-ранга соответственно) фактор-модуль $A/C_A(H)$ — нётеров $\mathbf{R}$-модуль. В статье доказывается, что если G — локально разрешимая группа, то G разрешима. Получены некоторые свойства разрешимых групп этого типа.

Abstract

O. Yu. Dashkova, On one class of modules that are close to Noetherian, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 113—125.

We consider an $\mathbf{R}G$-module A over a commutative Noetherian ring $\mathbf{R}$. Let G be a group having infinite section p-rank (or infinite 0-rank) such that $C_G(A) = 1$, $A/C_A(G)$ is not a Noetherian $\mathbf{R}$-module, but the quotient $A/C_A(H)$ is a Noetherian $\mathbf{R}$-module for every proper subgroup H of infinite section p-rank (or infinite 0-rank, respectively). In this paper, it is proved that if G is a locally soluble group, then G is soluble. Some properties of soluble groups of this type are also obtained.

1. Введение

Исследование модулей над групповыми кольцами — важное направление в современной алгебре. В этом направлении получено много интересных результатов. Нётеровы модули над групповыми кольцами составляют широкий класс модулей над групповыми кольцами. Напомним, что модуль называется нётеровым, если частично упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию максимальности. Следует отметить, что многие проблемы алгебры требуют исследования модулей над групповыми кольцами, не являющихся нётеровыми, но достаточно близких к нётеровым в некотором смысле.

Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль над коммутативным нётеровым кольцом $\mathbf{R}$, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$ называется коцентрализатором

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 113—125.

подгруппы H в модуле A. В работе изучается $\mathbf{R}G$-модуль A над коммутативным нётеровым кольцом $\mathbf{R}$, где G — локально разрешимая группа, для которой $C_G(A) = 1$, $A/C_A(G)$ не является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем и для каждой собственной подгруппы H бесконечного ранга коцентрализатор подгруппы H в A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль.

Напомним, что группа G имеет конечный 0-ранг $r_0(G) = r$, если G обладает конечным субнормальным рядом, у которого в точности r бесконечных циклических факторов, а остальные факторы периодические. Хорошо известно, что 0-ранг не зависит от выбора ряда. Если G — группа конечного 0-ранга, $H \leqslant G$ и L — нормальная подгруппа группы G, то H и G/L также имеют конечный 0-ранг. Более того, $r_0(H) \leqslant r_0(G)$ и $r_0(G) = r_0(L) + r_0(G/L)$.

Пусть теперь p — простое число. Говорят, что группа G имеет конечный секционный p-ранг $r_p(G) = r$, если каждая элементарная абелева p-секция группы G конечна, имеет порядок, не превосходящий p^r, и существует элементарная абелева p-секция U/V, такая что $|U/V| = p^r$. Известно, что если G — группа конечного секционного p-ранга, $H \leqslant G$ и L — нормальная подгруппа группы G, то H и G/L также имеют конечный секционный p-ранг. Кроме того, $r_p(H) \leqslant r_p(G)$ и $r_p(G) \leqslant r_p(L) + r_p(G/L)$.

В разделе 2 приведены некоторые основные результаты о $\mathbf{R}G$-модулях рассматриваемого вида. В разделе 3 исследуется $\mathbf{R}G$-модуль A при условии, что ранг $r_p(G)$ бесконечен, $p \geqslant 0$, G — разрешимая группа, $C_G(A) = 1$, $A/C_A(G)$ не является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем и коцентрализатор подгруппы H в модуле A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль для каждой собственной подгруппы H, для которой ранг $r_p(H)$ бесконечен.

Напомним, что группа G имеет конечный абелев секционный ранг, если ранг $r_p(G)$ конечен для каждого простого числа p. Группа G имеет конечный специальный ранг $r(G) = r$, если каждая конечно порождённая подгруппа группы G может быть порождена не более чем r элементами и r — наименьшее число с этим свойством. Это определение было введено А. И. Мальцевым [1].

В разделе 4 исследуется такой $\mathbf{R}G$-модуль A, что группа G локально разрешима, ранг $r_p(G)$ бесконечен, $p \geqslant 0$, $C_G(A) = 1$, $A/C_A(G)$ не является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем и коцентрализатор подгруппы H в модуле A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль для каждой собственной подгруппы H группы G, для которой ранг $r_p(H)$ бесконечен. Доказывается, что при выполнении указанных условий группа G разрешима (теорема 4.7). Этот результат обобщается на случай абелева секционного ранга и специального ранга (теоремы 4.8, 4.9).

2. Предварительные результаты

В леммах 2.1, 2.2, 2.6, 2.7, 4.2, 4.6 и теоремах 3.1—3.3, 4.7—4.9 рассматривается такой $\mathbf{R}G$-модуль A, что $C_G(A) = 1$ и $A/C_A(G)$ не является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем.

Лемма 2.1. *Пусть A — такой $\mathbf{R}G$-модуль, что ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geqslant 0$. Если коцентрализатор подгруппы M в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем для каждой собственной подгруппы M группы G, для которой ранг $r_p(M)$ бесконечен, то справедливы следующие утверждения*:

1) *если U, V — собственные подгруппы группы G и $G = \langle U, V\rangle$, то коцентрализатор хотя бы одной из подгрупп U или V — нётеров $\mathbf{R}$-модуль;*
2) *если собственная подгруппа H группы G имеет бесконечный ранг $r_p(H)$, то коцентрализатор каждой подгруппы H и коцентрализатор каждой подгруппы группы G, содержащей подгруппу H, является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем*;
3) *если K, L — собственные подгруппы группы G, содержащие подгруппу H, то $\langle K, L\rangle$ — собственная подгруппа группы G.*

Лемма 2.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geqslant 0$ и коцентрализатор подгруппы M в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем для каждой собственной подгруппы M, для которой ранг $r_p(M)$ бесконечен. Если K — собственная нормальная подгруппа группы G, для которой ранг $r_p(K)$ бесконечен, и фактор-группа G/K является конечно порождённой, то G/K — циклическая q-группа для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Предположим, что $G = \langle K, S\rangle$ для некоторого конечного множества S со следующим свойством: если T — собственное подмножество множества S, то $G \neq \langle K, T\rangle$. Пусть $S = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$. Если $n > 1$, то $\langle K, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle$ и $\langle K, x_n\rangle$ — собственные подгруппы. По лемме 2.1 получаем противоречие. Следовательно, фактор-группа G/K циклическая. Если фактор-группа G/K бесконечна или конечна при выполнении условия $|\pi(G/K)| > 1$, то G представима в виде произведения двух собственных подгрупп G_1 и G_2, для которых ранги $r_p(G_1)$ и $r_p(G_2)$ бесконечны. По лемме 2.1 снова получаем противоречие. Следовательно, фактор-группа G/K — конечная q-группа для некоторого простого числа q. Лемма доказана. □

Лемма 2.3 [3]. *Пусть G — группа, q — простое число. Предположим, что A — бесконечная нормальная элементарная абелева q-подгруппа группы G, для которой фактор-группа G/A конечна. Тогда G порождается двумя собственными подгруппами, имеющими бесконечный секционный q-ранг.*

Лемма 2.4 [3]. *Пусть G — группа, q — простое число, A — нормальная делимая абелева q-подгруппа группы G, для которой фактор-группа G/A конечна. Если A имеет бесконечный секционный q-ранг, то G порождается двумя собственными подгруппами, имеющими бесконечный секционный q-ранг.*

Мы также будем использовать следующий результат.

Лемма 2.5 [3]. *Пусть G — группа, A — нормальная подгруппа группы G, для которой G/A — бесконечная, периодическая, почти абелева фактор-группа. Если $|\pi(G/A)| > 1$, то группа G представима в виде произведения двух собственных подгрупп, содержащих A.*

Этот результат мы будем использовать при доказательстве следующей леммы.

Лемма 2.6. *Пусть A — такой $\mathbf{R}G$-модуль, что ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geqslant 0$. Предположим, что централизатор подгруппы M в A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль для каждой собственной подгруппы M, для которой ранг $r_p(M)$ бесконечен. Если K — нормальная абелева подгруппа группы H, $H \leqslant G$, фактор-группа H/K почти абелева и ранг $r_p(H/K)$ бесконечен, то коцентрализатор подгруппы H в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем.*

Доказательство. Предположим сначала, что $p = 0$. Пусть L — нормальная подгруппа группы H, такая что фактор-группа H/L конечна и L/K абелева. Поскольку ранг $r_0(L/K)$ бесконечен, L/K содержит такую свободную абелеву подгруппу B/K, что $r_0(B/K)$ бесконечен и фактор-группа L/B периодическая. Так как H/L конечна, подгруппа B имеет только конечное множество сопряжённых подгрупп в H. Обозначим эти подгруппы через $B_1, \ldots, B_m$. Если $C = \mathrm{core}_H B$, то L/C изоморфно вкладывается в $L/B_1 \times L/B_2 \times \ldots \times L/B_m$. Отсюда следует, что фактор-группа L/C периодическая, и поэтому ранг $r_0(C/K)$ бесконечен, как и ранг $r_0(C)$. Отметим также, что фактор-группа C/K свободная абелева. Если фактор-группа H/C конечна, или $|\pi(H/C)| = 1$, то можно выбрать простое число $q \notin \pi(H/C)$. Положим $D/K = (C/K)^q$. Если фактор-группа H/C бесконечна и $|\pi(H/C)| > 1$, положим $D = C$. Таким образом, в каждом из этих случаев H/D — бесконечная периодическая фактор-группа, $|\pi(H/D)| > 1$ и ранг $r_0(D)$ бесконечен. Из лемм 2.5 и 2.1 вытекает, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем.

Предположим теперь, что $p > 0$, и пусть подгруппа L задаётся так же, как и ранее. Выберем такую свободную абелеву подгруппу B/K группы L/K, что фактор-группа L/B является периодической. Если ранг $r_0(B/K)$ бесконечен, можно провести те же рассуждения, что и в случае $p = 0$. Поэтому предположим, что ранг $r_0(B/K)$ конечен. Как и в первой части доказательства, если $C = \mathrm{core}_H B$, то фактор-группа L/C периодическая и ранг $r_p(L/C)$ бесконечен. Рассматривая фактор-группу L/C по её силовской p'-подгруппе, если это необходимо, можно считать, что L/C — p-группа. Если фактор-группа L/L^pC бесконечна, то H/L^pC удовлетворяет условиям леммы 2.3 и поэтому H представима в виде произведения двух собственных подгрупп бесконечного секционного p-ранга. Следовательно, коцентрализаторы этих подгрупп в A являются нётеровыми $\mathbf{R}$-модулями. Таким образом, и в данном случае коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Если фактор-группа L/L^pC конечна, то $L/C = E/C \times D/C$ для некоторой конечной подгруппы E/C и делимой подгруппы D/C. Так как фактор-группа H/L конечна, а фактор-группа L/C абелева, то $F/C = (E/C)^{H/C}$ также конечна. L/F — делимая абелева p-группа бесконечного секционного p-ранга. Применяя теперь лемму 2.4 к фактор-группе H/F, получаем, что H представима в виде произведения двух собственных подгрупп бесконечного секционного p-ранга. Следовательно, коцентрализаторы этих подгрупп в A являются нётеровыми $\mathbf{R}$-модулями. Таким образом, коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть A — такой $\mathbf{R}G$-модуль, что ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geqslant 0$, и пусть коцентрализатор подгруппы M в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем для каждой собственной подгруппы M, для которой ранг $r_p(M)$ бесконечен. Если H — нормальная подгруппа группы G и фактор-группа G/H почти абелева, то фактор-группа G/H изоморфна подгруппе C_{q^∞} для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Можно считать, что $G \neq H$. Если ранг $r_p(G/H)$ бесконечен, то коцентрализатор группы G в A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль по лемме 2.6. Таким образом, ранг $r_p(G/H)$ конечен, и поэтому ранг $r_p(H)$ бесконечен. Кроме того, если фактор-группа G/H конечна, справедливость доказываемой леммы следует из леммы 2.2. Поэтому предположим, что фактор-группа G/H бесконечна.

Предположим сначала, что фактор-группа G/H абелева. Тогда по утверждению 3) леммы 2.1 фактор-группа G/H не является свободной абелевой. Пусть B/H — такая свободная абелева подгруппа G/H, что фактор-группа G/B периодическая. Поскольку ранг $r_p(H)$ бесконечен, ранг $r_p(B)$ также бесконечен. Если $|\pi(G/B)| > 1$, то G можно представить в виде произведения двух собственных подгрупп G_1 и G_2, ранги $r_p(G_1)$ и $r_p(G_2)$ которых бесконечны. По утверждению 3) леммы 2.1 получаем противоречие. Таким образом, G/B — q-группа для некоторого простого числа q. Предположим, что фактор-группа B/H нетривиальна. Пусть r — простое число, отличное от q, и пусть $C/H = (B/H)^r \neq B/H$. Тогда фактор-группа G/C периодическая, и $\pi(G/C) = \{q, r\}$. Противоречие. Следовательно, G/H — периодическая q-группа. Если фактор-группа G/H делимая, то она является прямым произведением копий прюферовых q-групп, и по утверждению 3) леммы 2.1 $G/H \simeq C_{q^\infty}$. В противном случае $(G/H)/(G/H)^q$ — нетривиальная элементарная абелева q-группа, и с учётом утверждения 3) леммы 2.1 получаем $|(G/H)/(G/H)^q| = q$. Следовательно, $G/H = (E/H) \times (D/H)$, где фактор-группа D/H делимая, $|E/H| = q$. По утверждению 3) леммы 2.1 вновь получаем противоречие.

Перейдём теперь к рассмотрению общего случая. Пусть L/H — нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/H, такая что фактор-группа G/L конечна, и пусть U/H — произвольная подгруппа конечного индекса фактор-группы G/H. Если $V/H = \operatorname{core}_{G/H} U/H$, то фактор-группа G/V конечна и ранг $r_p(V)$ бесконечен. По лемме 2.2 G/V — циклическая q-группа для некоторого простого числа q, и поэтому $G' \leqslant V \leqslant U$. Таким образом, если W/H — конечный резидуал L/H, то фактор-группа G/W абелева, ранг $r_p(W)$ бесконечен. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям первой части доказательства, получаем, что фактор-группа G/W финитно аппроксимируема и поэтому конечна. Таким образом, $G = WK$ для некоторой подгруппы K, содержащей H, такой что фактор-группа K/H является конечно порождённой. Поскольку фактор-группа G/H бесконечна, из леммы 2.2 вытекает, что $G \neq K$. Отсюда с учётом утверждения 3) леммы 2.1 получаем, что $G = W$, и поэтому фактор-группа

G/H абелева. Справедливость леммы следует из первой части доказательства. Лемма доказана. □

3. Разрешимые группы

В этом разделе мы применим результаты раздела 2 к исследованию разрешимых групп.

Теорема 3.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — разрешимая группа и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geqslant 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы M, такой что ранг $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы M в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда G обладает рядом нормальных подгрупп $H \leqslant N \leqslant G$, таким что подгруппа H абелева, фактор-группа N/H нильпотентна, а фактор-группа G/N изоморфна C_{q^∞} для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Если

$$G = D_0 \geqslant D_1 \geqslant \ldots \geqslant D_{n-1} \geqslant D_n = E —$$

производный ряд группы G, то существует такое натуральное число m, что фактор-группа G/D_m конечна, а фактор-группа D_m/D_{m+1} бесконечна. Пусть $K = D_m$. По лемме 2.7 $G/K' \simeq C_{q^\infty}$ для простого числа q. Поскольку ранг $r_p(K')$ бесконечен, коцентрализатор K' в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Пусть

$$C = C_A(K').$$

Тогда A/C — нётеров $\mathbf{R}$-модуль. Поскольку

$$K' \leqslant C_G(C)$$

и коцентрализатор G в A не является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем,

$$G/C_G(C) \simeq C_{q^\infty}.$$

Так как K' — нормальная подгруппа группы G, C — $\mathbf{R}G$-подмодуль модуля A. Фактор-модуль A/C — нётеров $\mathbf{R}$-модуль. A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leqslant C_1 = C \leqslant C_2 = A,$$

где C_2/C_1 — конечно порождённый $\mathbf{R}$-модуль. По [7, теорема 3.6] фактор-группа $G/C_G(C_2/C_1)$ является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой. Пусть

$$H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1).$$

Каждый элемент подгруппы H действует тривиально в каждом факторе C_{j+1}/C_j, $j = 0, 1$. Отсюда следует, что подгруппа H абелева. По теореме Ремака

$$G/H \leqslant G/C_G(C_1) \times G/C_G(C_2/C_1).$$

Тогда фактор-группа G/H является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой. Следовательно, G имеет ряд нормальных подгрупп $H \leqslant N \leqslant G$, такой что подгруппа H абелева, фактор-группа N/H нильпотентна, а фактор-группа G/N почти абелева. По лемме 2.7 G/N изоморфна C_{q^∞} для некоторого простого числа q. Теорема доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$модуль, G — разрешимая группа бесконечного абелева секционного ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного абелева секционного ранга является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда G обладает рядом нормальных подгрупп $H \leqslant N \leqslant G$, таким что подгруппа H абелева, фактор-группа N/H нильпотентна, а фактор-группа G/N изоморфна C_{q^∞} для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Поскольку группа G разрешима и имеет бесконечный абелев секционный ранг, существует такое простое число p, что ранг $r_p(G)$ бесконечен. Для этого простого числа в случае, когда H — собственная подгруппа и ранг $r_p(H)$ бесконечен, подгруппа H имеет бесконечный абелев секционный ранг. Поэтому коцентрализатор подгруппы H в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Теперь мы можем применить теорему 3.1. Теорема доказана. □

Теорема 3.3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — разрешимая группа бесконечного специального ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного специального ранга является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда G обладает рядом нормальных подгрупп $H \leqslant N \leqslant G$, таким что подгруппа H абелева, фактор-группа N/H нильпотентна, а фактор-группа G/N изоморфна C_{q^∞} для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Если G имеет бесконечный абелев секционный ранг и X — собственная подгруппа бесконечного абелева секционного ранга, то X имеет бесконечный специальный ранг. Тогда коцентрализатор подгруппы X в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Справедливость доказываемой теоремы следует из теоремы 3.2. Следовательно, можно считать, что группа G имеет бесконечный абелев секционный ранг.

Пусть U — такая нормальная подгруппа группы G, что G/U — бесконечная почти абелева фактор-группа. Предположим, что V/U — такая нормальная абелева подгруппа G/U, что фактор-группа G/V конечна. Поскольку ранг $r_0(G)$ конечен, фактор-группа V/U содержит такую конечно порождённую подгруппу B/U, что группа V/B периодическая. Если

$$C/U = (B/U)^{G/U},$$

то C/U также является конечно порождённой. Предположим, что G/U имеет бесконечный специальный ранг. Поскольку группа G имеет конечный абелев секционный ранг, отсюда следует, что p-подгруппы фактор-группы V/C черниковские для каждого простого числа p. Таким образом, множество $\pi(V/C)$ бесконечно. Если D/C — силовская $\pi(G/V)$-подгруппа V/C, то фактор-группа

V/D имеет бесконечный специальный ранг,

$$G/D = (V/D)(W/D),$$

где V/D — нормальная подгруппа G/D,

$$(V/D) \cap (W/D) = E,$$

W/D — конечная подгруппа и множество $\pi(V/D) \cap \pi(W/D)$ пусто. Тогда V/D является произведением двух G-инвариантных подгрупп бесконечного специального ранга. Следовательно, G/D является произведением двух собственных подгрупп бесконечного специального ранга. Поэтому коцентрализатор группы G в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Следовательно, специальный ранг фактор-группы G/U конечен, и поэтому U имеет бесконечный специальный ранг. Как и при доказательстве леммы 2.7, показываем, что $G/U \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Как и в теореме 3.1, G удовлетворяет требованиям теоремы. Теорема доказана. □

4. Локально разрешимые группы

В этом разделе мы покажем, что локально разрешимые группы рассматриваемого типа разрешимы.

Лемма 4.1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть $C = C_A(G)$. Модуль A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leqslant C_1 = C \leqslant C_2 = A,$$

где C_2/C_1 — конечно порождённый $\mathbf{R}$-модуль. По [7, теорема 3.6] фактор-группа $G/C_G(C_2/C_1)$ является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой. Пусть

$$H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1).$$

Каждый элемент подгруппы H действует тривиально в каждом факторе C_{j+1}/C_j, $j = 0, 1$. Отсюда следует, что подгруппа H абелева. По теореме Ремака

$$G/H \leqslant G/C_G(C_1) \times G/C_G(C_2/C_1).$$

Из определения следует, что фактор-группа $G/C_G(C_1)$ тождественна. Тогда фактор-группа G/H является расширением нильпотентной группы при помощи почти абелевой. Следовательно, группа G разрешима. Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, группа G локально разрешима, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geqslant 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы M, такой что ранг $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы M в A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль. Если группа G не является разрешимой, то она совершенна.*

Доказательство. Отметим, что если H — собственная подгруппа группы G конечного индекса, то ранг $r_p(H)$ бесконечен, и поэтому коцентрализатор группы G в модуле A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль. Согласно лемме 4.1 подгруппа H разрешима. По лемме 2.2 фактор-группа G/H абелева. Следовательно, группа G разрешима. Противоречие. Пусть $G \neq G'$. Тогда фактор-группа G/G' является делимой. Отсюда вытекает, что G содержит такую нормальную подгруппу H, что

$$G/H \simeq C_{q^\infty}$$

для некоторого простого числа q. Тогда ранг $r_p(H)$ бесконечен. Следовательно, коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 4.1 подгруппа H разрешима. Тогда и группа G разрешима. Противоречие. Лемма доказана. □

Обозначим теперь через $d(G)$ производную длину разрешимой группы G и через $T(G)$ максимальную нормальную подгруппу группы G.

Предложение 4.3 [3]. *Пусть p — простое число, G — разрешимая группа конечного p-ранга, причём $r_p(G) = r$. Существуют функции*

$$s_p \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f_p \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

такие что $d\big(G/T(G)\big) \leqslant s_p(r)$ и фактор-группа $G/T(G)$ имеет конечный специальный ранг, не превосходящий $f_p(r)$.

Мы будем использовать обозначения, введённые в предложении 4.3, при формулировке следующего результата.

Теорема 4.4 [3]. *Пусть p — простое число, G — локально разрешимая группа конечного p-ранга, причём $r_p(G) = r$. Тогда фактор-группа $G/T(G)$ разрешима, $d\big(G/T(G)\big) \leqslant s_p(r)$ и $G/T(G)$ имеет конечный специальный ранг, не превосходящий $f_p(r)$.*

Лемма 4.5. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, группа G локально разрешима, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого числа $p \geqslant 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы M, такой что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор M в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Если группа G не является разрешимой, H — нормальная подгруппа G и $r_p(H)$ конечен, то фактор $H/T(H)$ G-централен.*

Доказательство. Пусть $r_p(H) = r$. В случае когда $p = 0$, применим к подгруппе H лемму 2.12 из [4], а при $p > 0$ применим к этой подгруппе теорему 4.4. В обоих случаях получаем, что фактор-группа $H/T(H)$ разрешима и имеет конечный специальный ранг, являющийся функцией числа r. Положим $n = r_0\big(H/T(H)\big)$, число n зависит только от r. Подгруппа H обладает рядом G-инвариантных подгрупп

$$T(H) = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_d = H,$$

где каждый фактор абелев.

Отметим, что фактор-группа $H_1/T(H)$ является группой без кручения конечного специального ранга, не превосходящего числа n, и поэтому

$\mathrm{Aut}\big(H_1/T(H)\big)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$. Следовательно, фактор-группа $G/C_G\big(H_1/T(H)\big)$ локально разрешима и изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$. Из [7, следствие 3.8] вытекает, что фактор-группа $G/C_G\big(H_1/T(H)\big)$ разрешима, и тогда по лемме 4.2 она тривиальна. Таким образом,

$$[G,H_1]\leqslant T(H).$$

Применим метод математической индукции. Согласно индуктивному предположению

$$[G,H_{d-1}]\leqslant T(H).$$

Тогда

$$H_{d-1}/T(H)\leqslant Z\big(G/T(H)\big),$$

и поэтому фактор-группа $H/T(H)$ нильпотентна и её класс нильпотентности не превосходит 2. Пусть $K/T(H)=Z\big(H/T(H)\big)$. Как и ранее, устанавливаем, что, поскольку $K/T(H)$ и H/K — абелевы группы без кручения конечного специального ранга, не превосходящего числа n,

$$[G,K]\leqslant T(H),\quad [G,H]\leqslant K.$$

По лемме о трёх подгруппах и лемме 4.2 получаем, что

$$[G,H]=[G,G,H]\leqslant T(H),$$

и результат нашей леммы получается индукцией по числу d. Лемма доказана. □

Лемма 4.6. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — неразрешимая локально разрешимая группа, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого числа $p\geqslant 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы M, такой что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор M в модуле A — нётеров $\mathbf{R}$-модуль. Тогда группа G содержит собственную нормальную подгруппу V, такую что если U — нормальная подгруппа группы G и*

$$V\leqslant U\leqslant G,\quad U\neq G,$$

то U разрешима и её коцентрализатор в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем.

Доказательство. Пусть $T=T(G)$. Предположим, что $T\neq G$ и ранг $r_p(T)$ конечен (если $p=0$, это условие автоматически выполняется). По лемме 4.2 фактор-группа G/T неразрешима, и согласно [6, следствие 1 теоремы 5.27] она не является простой. Следовательно, группа G содержит собственную нормальную подгруппу $L\geqslant T$, $L\neq T$. Если ранг $r_p(L)$ конечен, то по лемме 4.5 фактор-группа L/T G-центральна, и поэтому G/T содержит нетривиальную максимальную нормальную абелеву подгруппу V/T. Из выбора подгруппы V вытекает, что $V\neq G$. Если U — нормальная подгруппа группы G и

$$V\leqslant U\leqslant G,\quad V\neq U,\quad U\neq G,$$

то по лемме 4.5 ранг $r_p(U)$ бесконечен, следовательно, коцентрализатор подгруппы U в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 4.1 подгруппа U разрешима. Если подгруппы L с заданными свойствами не существует, полагаем $V = T$, и, как и ранее, подгруппа V обладает указанными свойствами.

Теперь предположим, что $p > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда ранг $r_p(T)$ бесконечен. Если $T \neq G$, то коцентрализатор подгруппы T в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем, и тогда по лемме 4.1 подгруппа T разрешима. Следовательно, фактор-группа G/T неразрешима, и согласно [6, следствие 1 теоремы 5.27] она не является простой. Если U — нормальная подгруппа группы G и

$$T \leqslant U \leqslant G, \quad U \neq G,$$

то ранг $r_p(U)$ бесконечен, и поэтому U имеет конечную центральную размерность. Лемма 4.1 влечёт разрешимость подгруппы U. Таким образом, и в этом случае мы можем положить $T = V$.

Рассмотрим теперь случай, когда $T = G$. Предположим сначала, что все силовские p-подгруппы группы G имеют конечный p-ранг. Тогда по [5, лемма 3.1] группа G удовлетворяет условию минимальности для p-подгрупп. Получаем противоречие, поскольку в этом случае p-подгруппы являются черниковскими и, следовательно, имеют конечные специальные ранги, ограниченные некоторой величиной. Таким образом, группа G содержит некоторую p-подгруппу P бесконечного специального ранга. Тогда по [6, следствие 2 теоремы 6.36] группа G содержит также бесконечную элементарную абелеву p-подгруппу A. Поскольку A — собственная подгруппа группы G, для любой собственной нормальной подгруппы U группы G получаем, что $UA \neq G$. В противном случае фактор-группа G/U абелева, что противоречит лемме 4.2. Таким образом, UA является собственной подгруппой группы G, причём p-ранг этой подгруппы бесконечен. Следовательно, коцентрализатор подгруппы UA в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем, и поэтому коцентрализатор подгруппы U в модуле A также является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. По лемме 4.1 подгруппа U разрешима. Лемма доказана. □

Теорема 4.7. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geqslant 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы M, такой что ранг $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы M в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим противное: пусть группа G не является разрешимой. По лемме 4.6 группа G содержит нормальную подгруппу V со свойством, что если U — нормальная подгруппа группы G, для которой

$$V \leqslant U \leqslant G, \quad U \neq G,$$

то подгруппа U разрешима и коцентрализатор подгруппы U в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Положим $V = U_0$ и $d(U_0) = d_0$. Предположим, что мы построили такие нормальные разрешимые подгруппы

$$U_0 \leqslant U_1 \leqslant \ldots \leqslant U_n,$$

что $d(U_i) = d_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$ и $d_i < d_{i+1}$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Поскольку группа G не является разрешимой, существует нормальная подгруппа U_{n+1}, включающая в себя U_n, такая что

$$d(U_{n+1}) = d_{n+1} > d(U_n),$$

и поэтому мы получаем возрастающий ряд разрешимых нормальных подгрупп, ступени разрешимости которых возрастают. Положим

$$W = \bigcup_{n \geqslant 1} U_n.$$

По построению подгруппа W не является разрешимой и $V \leqslant W$. Отсюда вытекает, что $W = G$.

Положим теперь $C_n = C_A(U_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как U_n — нормальная подгруппа группы G, C_n является FG-подмодулем для каждого n, и так как коцентрализатор подгруппы U_n в A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем, то фактор-модуль A/C_n является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Следовательно, фактор-группа $G/C_G(A/C_n)$ разрешима по лемме 4.1. Из леммы 4.2 вытекает, что $G = C_G(A/C_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$G = \bigcup_{n \geqslant 1} U_n,$$

отсюда следует, что

$$C_A(G) = \bigcap_{n \geqslant 1} C_A(U_n) = \bigcap_{n \geqslant 1} C_n,$$

и тогда G тривиально действует в каждом факторе ряда $0 \leqslant C_A(G) \leqslant A$. Следовательно, группа G абелева. Противоречие. Теорема доказана. □

Применяя метод доказательства, аналогичный доказательству теоремы 3.2, и используя теорему 4.7, получаем следующий результат.

Теорема 4.8. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа бесконечного абелева секционного ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного абелева секционного ранга является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда группа G разрешима.*

Приведём схему доказательства следующей теоремы.

Теорема 4.9. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — локально разрешимая группа бесконечного специального ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного специального ранга является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть G — контрпример для нашей теоремы. Если N — собственная нормальная подгруппа бесконечного специального ранга, то коцентрализатор подгруппы N в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Согласно лемме 4.1 подгруппа N разрешима. Если N имеет конечный специальный ранг, то по [6, лемма 10.39] подгруппа N гиперабелева. Обозначим через $\{N_\alpha\}$ семейство всех собственных нормальных подгрупп группы G. Тогда подгруппа

$$J = \prod N_\alpha$$

также гиперабелева. Поскольку простая локально разрешимая группа циклическая, то группа G также гиперабелева. Согласно [2, теорема 7.1] G содержит подгруппу K, которая либо является элементарной абелевой q-группой для некоторого простого числа q, либо абелевой группой без кручения бесконечного специального ранга. Пусть N — собственная нормальная подгруппа группы G, имеющая конечный специальный ранг. Согласно [6, лемма 10.39] существует натуральное число d, такое что подгруппа $N^{(d)}$ является прямым произведением черниковских p-групп для различных простых p. Если $N^{(d)}K \neq G$, отсюда вытекает, что подгруппа N разрешима. Пусть $N^{(d)}K = G$, r — некоторое простое число, отличное от q, X — силовская $\{q, r\}'$-подгруппа $N^{(d)}$. Поскольку $XK \neq G$, то, проводя аналогичные рассуждения, получаем, что подгруппа X, а следовательно и N, разрешима. Таким образом, каждая собственная нормальная подгруппа группы G разрешима и её коцентрализатор в модуле A является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, применённым при доказательстве теоремы 4.7, убеждаемся в справедливости нашей теоремы. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Мальцев А. И. О группах конечного ранга // Мат. сб. — 1948. — Т. 22. — С. 351—352.

[2] Baer R., Heineken H. Radical groups of finite Abelian subgroup rank // Illinois J. Math. — 1972. — Vol. 16. — P. 533—580.

[3] Dashkova O. Yu., Dixon M. R., Kurdachenko L. A. Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension // J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — Vol. 208. — P. 785—795.

[4] Franciosi S., De Giovanni F., Kurdachenko L. A. The Schur property and groups with uniform conjugacy classes // J. Algebra. — 1995. — Vol. 174. — P. 823—847.

[5] Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F. Locally Finite Groups. — Amsterdam: North-Holland, 1973. — (Math. Library).

[6] Robinson D. J. R. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups. — Berlin: Springer, 1972. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete).

[7] Wehrfritz B. A. F. Infinite Linear Groups. — Berlin: Springer, 1973. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete).