Нижние оценки алгебраических алгоритмов для нильпотентных ассоциативных алгебр

А. В. ЛЕОНТЬЕВ
Институт программных систем
им. А. К. Айламазяна РАН
e-mail: alex@leont.botik.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, точные алгебраические алгоритмы, алгебраическая сложность, тензорный ранг, нижние оценки.

Аннотация

В работе рассматриваются точные алгебраические алгоритмы, вычисляющие произведение двух элементов в нильпотентных ассоциативных алгебрах над полями нулевой характеристики (частный случай алгоритмов для одновременного вычисления нескольких полиномов). Сложность алгебры в такой модели вычисления определяется как количество нескалярных умножений оптимального алгоритма (т. е. алгоритма, вычисляющего произведение двух элементов алгебры и имеющего минимальное число нескалярных умножений). Получены нижние оценки тензорного ранга для класса ассоциативных алгебр (в терминах размерностей некоторых фактор-алгебр), которые, в свою очередь, дают нижние оценки сложности алгебраических алгоритмов для этого класса алгебр. Также приведены примеры достижимости полученных оценок для алгебр различных размерностей.

Abstract

A. V. Leont'ev, Lower bounds for algebraic complexity of nilpotent associative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 127—136.

Exact algebraic algorithms for calculating the product of two elements of nilpotent associative algebras over fields of characteristic zero are considered (this is a particular case of simultaneous calculation of several multinomials). The complexity of an algebra in this computational model is defined as the number of nonscalar multiplications of an optimal algorithm. Lower bounds for the tensor rank of nilpotent associative algebras (in terms of dimensions of certain subalgebras) are obtained, which give lower bounds for the algebraic complexity of this class of algebras. Examples of reaching of these estimates for different dimensions of the nilpotent algebras are presented.

1. Введение

В работе изучаются нижние оценки тензорного ранга для класса ассоциативных алгебр, которые, в свою очередь, дают нижние оценки сложности алгебраических алгоритмов для этого класса алгебр. Также приведены примеры

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 127—136.

достижимости полученных оценок для алгебр различных размерностей. Сведения об алгебраической сложности и её связи с тензорным рангом (тензорный ранг не превосходит сложности) можно найти, например, в [3].

Ранее изучались нижние оценки для класса ассоциативных алгебр (см., например, обзорно-обобщающую работу [5], где рассматриваются ассоциативные алгебры с единицей). Оценки для простых алгебр Ли приведены в [1, 2, 4].

Следует отметить, что в [5] рассматривались алгебры с ненулевым радикалом (нильпотентной частью) R, которые, однако, в обязательном порядке содержали единицу алгебры $\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}}$ (т. е. рассматриваемые алгебры не являлись нильпотентными). Кроме того, нижние оценки, касающиеся радикальных элементов, получены только для достаточно узкого класса произведений: так, в [5] не оценивалась ни сложность умножения радикального элемента $\bar{\mathbf{r}}$ на (другой) радикальный элемент $\bar{\mathbf{r}}'$, ни сложность умножения радикального элемента $\bar{\mathbf{r}}$ на полупростой элемент $\bar{\mathbf{p}}$, рассматривалось только умножение элемента $\bar{\mathbf{r}}$ на единичный элемент алгебры $\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}}$ (с коэффициентом).

Фактически для элемента (вектора) $\bar{\mathbf{r}}$ из радикала R оценивалась сложность его умножения на число: не менее чем $n = \dim(R)$ (далее эта оценка добавлялась к сложности перемножения полупростых элементов между собой).

В частности, рассматривались произведения (унитарное действие единицы $\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}}$ на радикал R) вида

$$(\alpha_1\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}} + \bar{\mathbf{r}}_1)(\alpha_2\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}} + \bar{\mathbf{r}}_2) = \alpha_1\alpha_2\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}} + \alpha_1\bar{\mathbf{r}}_2 + \alpha_2\bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2$$

(здесь $\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}}$ — единица алгебры, α_1 и α_2 — элементы основного поля, $\bar{\mathbf{r}}_1$ и $\bar{\mathbf{r}}_2$ — элементы радикала R), сложность которых оценивалась как удвоенная размерность радикала R плюс единица:

$$\mathrm{rk}_{\otimes}(\alpha_1\alpha_2\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}} + \alpha_1\bar{\mathbf{r}}_2 + \alpha_2\bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2) \geqslant 1 + 2\dim(R).$$

Отметим, что данная оценка не зависит от сложности умножения в радикале R (т. е. от произведения $\bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2$) и определяется сложностью умножения вектора на число (т. е. умножениями $\alpha_1\alpha_2\bar{\mathbf{1}}_{\mathrm{a}}$, $\alpha_1\bar{\mathbf{r}}_2$ и $\alpha_2\bar{\mathbf{r}}_1$).

В настоящей работе рассматривается задача, в некотором смысле дуальная задаче, рассмотренной в [5], а именно задача оценки сложности произведения в нильпотентных алгебрах, или, говоря иначе, произведений $\bar{\mathbf{r}}_1\bar{\mathbf{r}}_2$.

В данном случае применена обычная схема для получения подобного рода оценок: синтаксическое приравнивание к нулю коэффициентов тензора умножения, решение уравнений и получение противоречия из полученного решения (в предположении, что число уравнений достаточно мало). Синтаксический выбор переменных для обнуления коэффициентов тензора по большей части сходен с выбором в [5].

Следует отметить также, что данное доказательство очень близко к доказательству, данному автором для класса нильпотентных алгебр Ли. Различие между классом ассоциативных алгебр и алгебр Ли состоит в учёте (для ассоциативного случая) некоммутативности умножения.

Автор благодарит В. Н. Латышева за полезные обсуждения и внимание к работе.

2. Обозначения

Тензорный ранг алгебры L будем обозначать через $\mathrm{rk}_{\otimes}(L)$, левый и правый аннуляторы — через $\mathrm{ANN_L}$ и $\mathrm{ANN_R}$ соответственно, пересечение левого и правого аннулятора с L^2 — через $\mathrm{Ann_L}$ и $\mathrm{Ann_R}$, основное поле (характеристики ноль) — через $\mathbb{F}$. Тензор умножения произвольной алгебры L будем записывать в виде

$$ab = \sum_{i=1}^{r} u_i(a,b) v_i(a,b) \bar{w}_i, \tag{1}$$

где r — минимальное из возможных (здесь $r = \mathrm{rk}_{\otimes}(L)$), $u_i(a,b)$, $v_i(a,b)$ — линейные функционалы на $\langle L \times L \rangle$, $\bar{w}_i \in L$.

3. Нижние оценки для нильпотентных алгебр

Рассмотрим произвольную нильпотентную ассоциативную алгебру L над полем $\mathbb{F}$ характеристики ноль.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{d}_\mathrm{l} = \dim\bigl(L^2/\mathrm{Ann_L}(L)\bigr)$. *Тогда перенумерацией слагаемых в* (1) *и, возможно, перестановкой* u_i *и* v_i *можно добиться того, что функционалы* $\{u_1, \ldots, u_{\mathbf{d}_\mathrm{l}}\}$ *будут линейно независимы на множестве* $\bigl\langle \bigl(L^2 \setminus \mathrm{Ann_L}(L)\bigr) \times 0 \bigr\rangle$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют такой элемент $0 \neq x \in L^2 \setminus \mathrm{Ann_L}(L)$ и такое натуральное p, $1 \leqslant p < \dim\bigl(L^2/\mathrm{Ann_L}(L)\bigr)$, что (после перенумерации) выполнены следующие три условия (второе и третье условия являются следствиями из первого):

1) функционалы $\{u_1, \ldots, u_p\}$ линейно независимы (это максимальная линейно независимая система функционалов) на множестве $\bigl\langle \bigl(L^2 \setminus \mathrm{Ann_L}(L)\bigr) \times 0 \bigr\rangle$;
2) для элемента x выполнены равенства

$$u_1(x,0) = \ldots = u_p(x,0) = 0, \tag{2}$$
$$u_{p+1}(x,0) = \ldots = u_r(x,0) = 0, \tag{3}$$
$$v_{p+1}(x,0) = \ldots = v_r(x,0) = 0; \tag{4}$$

3) для любого элемента $b \in L$ найдётся такой элемент $s_b \in L^2$, что выполнены равенства

$$u_i(0,b) = -u_i(s_b,0), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant p \tag{5}$$

(т. е. $u_i(s_b,b) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$).

По элементу x, удовлетворяющему уравнениям (2)—(4), выберем такой элемент $b \in L$, что $xb \neq 0$. Для элемента b согласно (5) выберем $s_b \in L^2$. Имеем

$$(x + s_b)b - s_b b = xb \neq 0. \tag{6}$$

С другой стороны, для этих элементов согласно (1) имеем

$$\begin{aligned}
&(x + s_b)b - s_b b = xb = \sum_{i=1}^{r} u_i(x + s_b, b) v_i(x + s_b, b)\bar{w}_i - [s_b, b] = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r} \bigl(u_i(x,0) + u_i(s_b,b)\bigr)\bigl(v_i(x,0) + v_i(s_b,b)\bigr)\bar{w}_i - [s_b,b] = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r} \bigl(u_i(x,0)v_i(x,0) + u_i(x,0)v_i(s_b,b) + u_i(s_b,b)v_i(x,0) + u_i(s_b,b)v_i(s_b,b)\bigr)\bar{w}_i - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r} u_i(s_b,b)v_i(s_b,b)\bar{w}_i = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r} \bigl(u_i(x,0)v_i(x,0) + u_i(x,0)v_i(s_b,b) + u_i(s_b,b)v_i(x,0)\bigr)\bar{w}_i.
\end{aligned}$$

Обозначая коэффициенты

$$u_i(x,0)v_i(x,0) + u_i(x,0)v_i(s_b,b) + u_i(s_b,b)v_i(x,0)$$

при $\bar{w}_i$ через γ_i, получаем

$$[xb] = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \bar{w}_i + \sum_{i=p+1}^{r} \gamma_i \bar{w}_i.$$

Заметим, что первая (по (2), (5)) и вторая (по (3), (4)) суммы равны нулю. Следовательно, $xb = 0$, что противоречит (6). Лемма доказана. $\square$

Следствие 2. *Для нильпотентной алгебры L справедлива оценка*

$$r = \mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \dim\bigl(L^2 / \operatorname{Ann_L}(L)\bigr). \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть $\mathbf{d}_\mathrm{r} = \dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann_R}(L)\bigr)$. Перенумерацией слагаемых в (1) и, возможно, перестановкой u_i и v_i можно добиться того, что элементы $\{u_1, \ldots, u_{\mathbf{d}_\mathrm{l}+\mathbf{d}_\mathrm{r}}\}$ будут линейно независимы на множестве $\bigl\langle\bigl(L^2 \setminus \operatorname{Ann_L}(L)\bigr) \times \bigl(L^2 \setminus \operatorname{Ann_R}(L)\bigr)\bigr\rangle$.*

Доказательство. Будем считать, что выражение (1) удовлетворяет условиям леммы 1, т. е. функционалы $\{u_1, \ldots, u_{\mathbf{d}_\mathrm{l}}\}$ линейно независимы на множестве $\bigl\langle\bigl(L^2 \setminus \operatorname{Ann_L}(L)\bigr) \times 0\bigr\rangle$.

Допустим противное. Тогда существуют такое натуральное p,

$$\begin{aligned}
\dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann_L}(L)\bigr) = d_l \leqslant p < \mathbf{d}_\mathrm{l} + \mathbf{d}_\mathrm{r} = \\
= \dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann_L}(L)\bigr) + \dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann_R}(L)\bigr),
\end{aligned}$$

и такая пара

$$0 \neq \langle x, y\rangle \in \big\langle \big(L^2 \setminus \mathrm{Ann_L}(L)\big) \times \big(L^2 \setminus \mathrm{Ann_R}(L)\big)\big\rangle,$$

что (после перенумерации) выполнены следующие три условия (второе и третье условия являются следствиями из первого):

1) функционалы $\{u_1, \ldots, u_p\}$ линейно независимы (это максимально линейно независимая система функционалов) на $\big\langle \big(L^2 \setminus \mathrm{Ann_L}(L)\big) \times \big(L^2 \setminus \mathrm{Ann_R}(L)\big)\big\rangle$;
2) для пары $\langle x, y\rangle$ выполнены равенства

$$u_1(x,y) = \ldots = u_p(x,y) = 0, \tag{7}$$

$$u_{p+1}(x,y) = \ldots = u_r(x,y) = 0, \tag{8}$$

$$v_{p+1}(x,y) = \ldots = v_r(x,y) = 0; \tag{9}$$

3) для любых элементов $a, b \in L$ найдутся такие элементы $s_{a,b} \in L^2$, $t_{a,b} \in L^2$, что выполнены равенства

$$u_i(a,b) = -u_i(s_{a,b}, t_{a,b}), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant p \tag{10}$$

(т. е. $u_i(a + s_{a,b}, b + t_{a,b}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$).

Замечание 4. Нетрудно убедиться, что $y \neq 0$, иначе $0 \neq x$ и уравнения (7) выполнены не будут.

Выберем пары $\langle x, y\rangle$ и $\langle a + s_{a,b}, b + t_{a,b}\rangle$, удовлетворяющие вышеприведённым трём условиям (уравнениям (7)—(10)). Тогда согласно (1) имеем

$$\begin{aligned}
z &= (x + a + s_{a,b})(y + b + t_{a,b}) - (a + s_{a,b})(b + t_{a,b}) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} u_i(x + a + s_{a,b}, y + b + t_{a,b}) v_i(x + a + s_{a,b}, y + b + t_{a,b}) \bar{w}_i - \\
&- (a + s_{a,b})(b + t_{a,b}) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \big\{ \big(u_i(a + s_{a,b}, b + t_{a,b}) + u_i(x,y)\big) \times \big(v_i(a + s_{a,b}, b + t_{a,b}) + v_i(x,y)\big) \big\} \bar{w}_i - \\
&- (a + s_{a,b})(b + t_{a,b}) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \{ u_i(x,y) v_i(a + s_{a,b}, b + t_{a,b}) + u_i(a + s_{a,b}, b + t_{a,b}) v_i(x,y) + \\
&+ u_i(x,y) v_i(x,y) \} \bar{w}_i.
\end{aligned}$$

Обозначая коэффициенты при $\bar{w}_i$ через γ_i, получаем

$$z = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \bar{w}_i + \sum_{i=p+1}^{r} \gamma_i \bar{w}_i.$$

Заметим, что первая (по (7), (10)) и вторая (по (8), (9)) суммы равны нулю. Следовательно,

$$z = (x + a + s_{a,b})\big(y + b + t(a,s)\big) - (a + s_{a,b})(b + t_{a,b}) = \\ = (a + s_{a,b})y + x(b + t_{a,b}) + (x, y) = 0.$$

Замечание 5. Нетрудно убедиться, что, в силу линейности функционалов u и v, если пара $\langle x, y\rangle$ — решение уравнений (7)—(9), то и пара $\langle \alpha x, \alpha y\rangle$ для любого $\alpha \in \mathbb{F}$ также будет решением этих уравнений. Аналогично если пара $\langle a+s_{a,b}, b+t_{a,b}\rangle$ — решение уравнений (10), то и пара $\langle \beta a+\beta s_{a,b}, \beta b+\beta t_{a,b}\rangle$ для любого $\beta \in \mathbb{F}$ также будет решением этих уравнений. Из этого следует, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполнено

$$z_{\alpha,\beta} = (\beta a + \beta s_{a,b})\alpha y + \alpha x(\beta b + \beta t_{a,b}) + \alpha x \alpha y = \\ = \alpha\beta\big((a + s_{a,b})y + x(b + t_{a,b})\big) + \alpha^2(x, y) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(a + s_{a,b})y + x(b + t_{a,b}) = 0. \tag{11}$$

Пусть m — наименьшее натуральное число, такое что либо $Ly \nsubseteq L^{m+1}$, либо $xL \nsubseteq L^{m+1}$. Без ограничения общности можно считать, что это условие выполняется для элемента y (для элемента x рассуждение симметричное), т. е. $Ly, xL \subseteq L^m$ и $Ly \nsubseteq L^{m+1}$. Тогда, полагая в равенстве (11) $b = 0$ и выбирая элемент $a \in L$ таким, чтобы $ay \notin L^{m+1}$, получаем

$$ay = -s_{a,0}y - xt_{a,0}. \tag{12}$$

Поскольку $s_{a,0}, t_{a,0} \in L^2$ и $xL, Ly \subseteq L^m$, то $s_{a,0}y, xt_{a,0} \in L^{m+1}$. Следовательно, равенство (12) не может выполняться. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Из леммы 3 получаем следствие.

Следствие 6. *Для нильпотентной ассоциативной алгебры L справедлива оценка*

$$r = \mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \dim\big(L^2/\operatorname{Ann_L}(L)\big) + \dim\big(L^2/\operatorname{Ann_R}(L)\big). \qquad \square$$

Лемма 7. *Пусть I_{R} — прообраз в L аннулятора $\operatorname{Ann_R}(L/L^3)$ алгебры L/L^3, $M_{\mathrm{R}} = \big(L^2 \setminus \operatorname{Ann_R}(L)\big) \cup (L \setminus I_{\mathrm{R}})$, $\mathbf{e}_{\mathrm{r}} = \dim(L/I_{\mathrm{R}})$. Перенумерацией слагаемых в* (1) *и, возможно, перестановкой u_i и v_i можно добиться того, что элементы $\{u_1, \ldots, u_{\mathbf{d}_{\mathrm{l}}+\mathbf{d}_{\mathrm{r}}+\mathbf{e}_{\mathrm{r}}}\}$ будут линейно независимы на множестве $\big\langle\big(L^2 \setminus \operatorname{Ann_L}(L)\big) \times M_{\mathrm{R}}\big\rangle$.*

Доказательство. Будем считать, что выражение (1) удовлетворяет условиям леммы 3, т. е. функционалы $\{u_1, \ldots, u_{\mathbf{d}_{\mathrm{l}}+\mathbf{d}_{\mathrm{r}}}\}$ линейно независимы на множестве $\big\langle\big(L^2 \setminus \operatorname{Ann_L}(L)\big) \times \big(L^2 \setminus \operatorname{Ann_R}(L)\big)\big\rangle$.

Допустим противное. Тогда существуют такое p, что $\mathbf{d}_{\mathrm{l}}+\mathbf{d}_{\mathrm{r}} \leqslant p < \mathbf{d}_{\mathrm{l}}+\mathbf{d}_{\mathrm{r}}+\mathbf{e}_{\mathrm{r}}$, и такая пара $0 \neq \langle x, y\rangle \in \big\langle\big(L^2 \setminus \operatorname{Ann_L}(L)\big) \times M_{\mathrm{R}}\big\rangle$, где $y \notin I_{\mathrm{R}}$, что (после перенумерации) выполнены три условия, аналогичные трём условиям леммы 3 (и, следовательно, уравнения (7)—(10) с той лишь разницей, что $y, t_{a,b} \in L$ и $y \notin I_{\mathrm{R}}$).

Далее, пусть пара $\langle x, y\rangle$ удовлетворяет этим условиям. Тогда для элемента z имеем

$$z = (x + a + s_{a,b})(y + b + t_{a,b}) - (a + s_{a,b})(b + t_{a,b}) = 0$$

и с учётом замечания 5 заключаем, что

$$(a + s_{a,b})y + x(b + t_{a,b}) = 0. \tag{13}$$

Положим $b = 0$ и выберем такой элемент a, что $ay \notin L^3$. Для элементов a и 0 выберем элементы $s_{a,0} \in L^2$ и $t_{a,0} \in M_{\mathrm{R}}$, удовлетворяющие уравнениям (10).

Так как $s_{a,0}y, xt_{a,0} \in L^3$, заключаем, что равенство (13) выполняться не может. Лемма доказана. □

Аналогично предыдущей лемме доказывается следующая (симметричная) лемма.

Лемма 8. *Пусть I_{L} — прообраз в L аннулятора $\mathrm{Ann}_{\mathrm{L}}(L/L^3)$ алгебры L/L^3, $M_{\mathrm{L}} = \big(L^2 \setminus \mathrm{Ann}_{\mathrm{L}}(L)\big) \cup (L \setminus I_{\mathrm{L}})$, $\mathbf{e}_{\mathrm{l}} = \dim(L/I_{\mathrm{L}})$. Перенумерацией слагаемых в* (1) *и, возможно, перестановкой u_i и v_i можно добиться того, что элементы $\{u_1, \ldots, u_{\mathbf{d}_{\mathrm{l}}+\mathbf{d}_{\mathrm{r}}+\mathbf{e}_{\mathrm{l}}}\}$ будут линейно независимы на множестве $\big\langle M_{\mathrm{L}} \times \big(L^2 \setminus \mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(L)\big)\big\rangle$.*

Из лемм 7 и 8 выводится следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть I_{L} и I_{R} — прообразы в нильпотентной алгебре L левого $\mathrm{Ann}_{\mathrm{L}}(L/L^3)$ и правого $\mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(L/L^3)$ аннуляторов алгебры L/L^3. Тогда для алгебры L справедливы следующие оценки*:

$$\mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \dim\big(L^2/\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{L}}(L)\big) + \dim\big(L^2/\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(L)\big) + \dim(L/I_{\mathrm{L}}), \tag{14}$$

$$\mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \dim\big(L^2/\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{L}}(L)\big) + \dim\big(L^2/\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(L)\big) + \dim(L/I_{\mathrm{R}}), \tag{15}$$

или, иначе говоря,

$$\mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \dim\big(L^2/\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{L}}(L)\big) + \dim\big(L^2/\,\mathrm{Ann}_{\mathrm{R}}(L)\big) + \max\big(\dim(L/I_{\mathrm{L}}), \dim(L/I_{\mathrm{R}})\big).$$

□

Сделаем несколько замечаний о коэффициентах при слагаемых в полученных нижних оценках.

Замечание 10. Для трёхмерной нильпотентной верхнетреугольной (с нулями под и на главной диагонали) ассоциативной матричной алгебры L порядка 3×3 оценки (14) и (15) точны. Действительно, $\mathrm{rk}_{\otimes} L = 1$. Согласно данным оценкам $\mathrm{rk}_{\otimes} L \geqslant 1$.

Нетрудно заметить также, что для любого натурального n существует алгебра L^*, у которой тензорный ранг равен n и для которой данные оценки точны — достаточно в качестве L^* взять прямое произведение алгебры L n раз.

Замечая, что $\dim(L^*/I) = n$, заключаем, что константы (коэффициенты) при слагаемых $\dim(L/I_{\mathrm{L}})$ и $\dim(L/I_{\mathrm{R}})$ (т. е. единицы) в данных оценках повышены быть не могут.

Замечание 11. Для шестимерной нильпотентной верхнетреугольной (с нулями под и на главной диагонали) ассоциативной подалгебры L матричной алгебры порядка 4×4 оценки (14) и (15) точны. Действительно, согласно классическому алгоритму $\mathrm{rk}_\otimes L \leqslant 4$. Согласно данным оценкам $\mathrm{rk}_\otimes L \geqslant 4$ ($\dim(L^2) = 3$, $\dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{L}(L)\bigr) = 1$, $\dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{R}(L)\bigr) = 1$, $\dim(L/I_\mathrm{L}) = 2$, $\dim(L/I_\mathrm{L}) = 2$).

Нетрудно заметить также, что для любого натурального n существует алгебра L^*, у которой тензорный ранг равен $4n$ и для которой данные оценки точны — достаточно в качестве L^* взять прямое произведение алгебры L n раз.

Замечая, что $\dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{L}(L)\bigr) = \dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{R}(L)\bigr) = 1 \neq 0$ и $\dim(L/I_\mathrm{L}) = \dim(L/I_\mathrm{L}) = 2 \neq 0$, заключаем, что константы (коэффициенты) при слагаемых $\dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{L}(L)\bigr)$, $\dim\bigl(L^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{R}(L)\bigr)$, $\dim(L/I_\mathrm{L})$ и $\dim(L/I_\mathrm{R})$ (т. е. единицы) в данных оценках повышены быть не могут.

Замечание 12. Отметим, что оценки (14) и (15) не «эквивалентны» в том смысле, что для одной и той же алгебры они могут давать разные величины (т. е. размерности L/I_L и L/I_R могут быть различны).

Рассмотрим, например, шестимерную нильпотентную верхнетреугольную алгебру L из предыдущего замечания. Определим в ней подалгебру K условием, что $x_{3,4} = 0$ для матриц $X \in K$.

Очевидно, $\mathrm{rk}_\otimes K \leqslant 2$. Далее, ($\dim(K^2) = 2$, $\dim\bigl(K^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{L}(K)\bigr) = 0$, $\dim\bigl(K^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{R}(K)\bigr) = 0$, $\dim(K/I_\mathrm{L}) = 1$, $\dim(K/I_\mathrm{L}) = 2$). Согласно оценке (14) получаем, что $\mathrm{rk}_\otimes K \geqslant 1$. Согласно оценке (15), которая, очевидно, точна, имеем $\mathrm{rk}_\otimes K \geqslant 2$.

Рассматривая в L подалгебру K^*, определённую условием (для матриц $X \in K^*$) $x_{1,2} = 0$, получаем из (14) оценку $\mathrm{rk}_\otimes K \geqslant 2$, а из (15) — оценку $\mathrm{rk}_\otimes K \geqslant 1$.

Теорема 13. *Пусть L — ассоциативная алгебра верхнетреугольных нильпотентных матриц порядка $n \times n$ с нулями на главной диагонали. Тогда*

$$r = \mathrm{rk}_\otimes(L) \geqslant (n-2)^2.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что

1) левый аннулятор ANN_L состоит из матриц, все элементы которых, за исключением разве что $n-1$ верхних элементов последнего столбца, необходимо равны нулю. Размерность ANN_L равна $n-1$,
2) L^2 порождается матричными единицами $\mathbf{e}_{i,j}$, где $1 \leqslant i \leqslant n-2$, $i+2 \leqslant j \leqslant n$. Размерность L^2 равна $(n-1)(n-2)/2$; $\dim(\operatorname{Ann}_\mathrm{L}) = n-2$,
3) размерность фактор-алгебры L^2 по $\dim(\operatorname{Ann}_\mathrm{L})$ равна $(n-2)(n-3)/2$,
4) аналогично для правого аннулятора $\dim(L^2/\operatorname{Ann}_\mathrm{R}) = (n-2)(n-3)/2$,
5) $I_\mathrm{L} = L^2 \cup \{\mathbf{e}_{n-1,n}\}$, $\dim(L/I_\mathrm{L}) = n-2$,

и применить теорему 9:

$$\mathrm{rk}_\otimes(L) \geqslant \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2 = (n-2)^2. \qquad \square$$

Замечание 14. Число умножений $C_N(n)$ в (классическом) алгоритме перемножения верхнетреугольных нильпотентных матриц порядка $n \times n$ равно $n(n-1)(n-2)/6$.

Действительно,

$$C_N(n) = \sum_{i=1}^{n-2} i(n-1-i) = (n-1)\sum_{i=1}^{n-2} i - \sum_{i=1}^{n-2} i^2 =$$
$$= \frac{(n-1)^2(n-2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)(2(n-2)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Таким образом, классический алгоритм перемножения верхнетреугольных нильпотентных матриц для $n = 2, 3, 4$ оптимален (для мультипликативной сложности), а нижняя оценка (14) точна.

Заметим также, что отношение между сложностью классического алгоритма и нижней оценкой равно $n(n-1)/6(n-2)$, что асимптотически равно $n/6$. Нижняя оценка (асимптотически) в два раза превосходит размерность алгебры верхнетреугольных нильпотентных матриц.

С другой стороны, нижние оценки можно строить индуктивно (по степени нильпотентности) следующим образом. Пусть алгебра L нильпотентна индекса n ($L^n = 0$, $L^{n-1} \neq 0$). Определим множества

$$J^i_{\mathrm{L}} = \{x \in L^i \mid xL \subseteqq L^{2i}\}, \quad J^i_{\mathrm{R}} = \{x \in L^i \mid Lx \subseteqq L^{2i}\}.$$

Положим

$$M_i = \langle (L^i \setminus J^i_{\mathrm{L}}) \times (L^i \setminus J^i_{\mathrm{R}}) \rangle, \quad I_j = \bigcup_{i=n-1}^{j} M_i.$$

Теорема 15. *Пусть L — ассоциативная нильпотентная алгебра индекса нильпотентности n ($L^n = 0$, $L^{n-1} \neq 0$). Тогда справедливы оценки*

$$\mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \sum_{i=n-1}^{2} \big(\dim(L^i/J^i_{\mathrm{L}}) + \dim(L^i/J^i_{\mathrm{R}})\big) + \max\big(\dim(L/I_{\mathrm{L}}), \dim(L/I_{\mathrm{R}})\big),$$

где J^i_{L} и J^i_{R} определены выше.

Лемма 16. *Для алгебры L справедлива оценка*

$$\mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \big(\dim(L^{n-1}/J^{n-1}_{\mathrm{L}}) + \dim(L^{n-1}/J^{n-1}_{\mathrm{R}})\big).$$

Доказательство. Допустим противное. Обозначим $\mathbf{d}_{\mathrm{l}} = \dim(L^{n-1}/J^{n-1}_{\mathrm{L}})$, $\mathbf{d}_{\mathrm{r}} = \dim(L^{n-1}/J^{n-1}_{\mathrm{R}})$. Тогда (после перенумерации функционалов) существуют такое натуральное p ($p \leqslant \mathbf{d}_{\mathrm{l}} + \mathbf{d}_{\mathrm{r}}$) и такая пара

$$0 \neq \langle x, y \rangle \in \langle (L^{n-1} \setminus J^{n-1}_{\mathrm{L}}) \times (L^{n-1} \setminus J^{n-1}_{\mathrm{R}}) \rangle,$$

что (после перенумерации) выполнены следующие три условия, аналогичные трём условиям леммы 3 (и, следовательно, уравнения (7)—(10), с той лишь разницей, что $a, b \in L$ и $s_{a,b}, t_{a,b} \in L^{n-1}$).

Аналогично для элемента z имеем

$$z = (x+a+s_{a,b}, y+b+t_{a,b}) - (a+s_{a,b}, b+t_{a,b}) = (a+s_{a,b}, y) + (x, b+t_{a,b}) + (x, y) = 0,$$

и

$$(a + s_{a,b}, y) + (x, b + t_{a,b}) = 0. \tag{16}$$

По условию либо $x \neq 0$, либо $y \neq 0$. Пусть, например, $x \neq 0$ (для $y \neq 0$ доказательство симметрично). Выберем такой элемент b, что $0 \neq (x, b) \notin L^{2(n-1)}$, и положим $a = 0$. Из (16) получаем

$$L^{2(n-1)} \not\ni (xb) = -(s_{0,b}, y) - (x, t_{0,b}) \in L^{2(n-1)}. \tag{17}$$

Полученное противоречие (17) и доказывает лемму. □

Доказательство теоремы 15. Проводя последовательно для множеств $I_{n-1}, \ldots, I_2$ рассуждения, аналогичные рассуждениям леммы 3, получаем оценку

$$\mathrm{rk}_{\otimes}(L) \geqslant \sum_{i=n-1}^{2} \bigl(\dim(L^i/J^i_{\mathrm{L}}) + \dim(L^i/J^i_{\mathrm{R}})\bigr).$$

Проводя для множеств $L \setminus I_{\mathrm{L}}$, $L \setminus I_{\mathrm{R}}$ рассуждения, аналогичные рассуждениям лемм 7 и 8, получаем доказательство теоремы 15. □

Литература

[1] Жошина С. А. О мультипликативной сложности алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 4. — С. 75—77.

[2] Жошина С. А. О мультипликативной сложности простых алгебр Ли G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 и полупростых алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1993. — № 4. — С. 35—37.

[3] Латышев В. Н. Комбинаторная теория колец. Сложность алгебраических алгоритмов // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

[4] Леонтьев А. В. Нижние оценки алгебраической сложности для классических простых алгебр Ли // Мат. сб. — 2008. — Т. 199, № 5. — С. 27—34.

[5] Alder A., Strassen V. On the algorithmic complexity of the associative algebras // Theor. Comput. Sci. — 1981. — Vol. 15. — P. 201—211.