Об однородных расширениях конечных предикатных структур*

Е. В. ОВЧИННИКОВА
Новосибирский государственный технический университет
e-mail: eovchin@ngs.ru

УДК 510.67

Ключевые слова: частичный изоморфизм, вложение, транзитивная группа автоморфизмов.

Аннотация

Показано, что любая конечная n-элементная предикатная система, в которой любые две одноэлементные подсистемы изоморфны, вложима в конечную (2^n-1)-элементную систему, имеющую транзитивную группу автоморфизмов.

Abstract

E. V. Ovchinnikova, On homogeneous extensions of finite predicate systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 137—140.

It is shown that any finite n-element predicate system for which any two one-element subsystems are isomorphic is embeddable in a finite (2^n-1)-element system having a transitive automorphism group.

Посвящается памяти моего учителя
Юрия Евгеньевича Шишмарёва

Для алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma\rangle$ любой изоморфизм между подсистемами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ системы $\mathcal{A}$ называется *частичным изоморфизмом* системы $\mathcal{A}$.

Теорема 1 [3]. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечный неориентированный граф без петель, $p_1, \ldots, p_n$ — частичные изоморфизмы графа $\mathcal{A}$. Тогда существует конечный граф $\mathcal{B}$, расширяющий $\mathcal{A}$, и автоморфизмы графа $\mathcal{B}$, расширяющие $p_1, \ldots, p_n$.*

Б. Хервиг [2] обобщил этот результат Э. Хрушовского для произвольной конечной предикатной алгебраической системы.

В [1] показано, что любой конечный полигон над линейно упорядоченным моноидом вложим в конечный полигон, у которого любой частичный изоморфизм продолжается до автоморфизма.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а.

Систему $\mathcal{A}$ назовём n-pi-*однородной*, если в ней любой частичный изоморфизм φ, для которого $|\operatorname{dom}\varphi| = n$, продолжается до автоморфизма системы $\mathcal{A}$. Группа $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ автоморфизмов алгебраической системы $\mathcal{A}$ называется *транзитивной*, если для любых двух элементов a и b системы $\mathcal{A}$ существует автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathcal{A}$, такой что $\varphi(a) = b$. Очевидно, что транзитивность группы автоморфизмов алгебраической системы $\mathcal{A}$ эквивалентна 1-pi-однородности системы $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}_i = \langle A_i, \Sigma\rangle_{i\in I}$ — семейство систем предикатной сигнатуры Σ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$, $i, j \in I$. На множестве $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ определим систему сигнатуры Σ, полагая $P_{\mathcal{A}} = \bigcup\limits_{i\in I} P_{\mathcal{A}_i}$ для всех $P \in \Sigma$. Полученная система называется *дизъюнктным объединением* систем $\mathcal{A}_i$ и обозначается через $\bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

На носителе A системы $\bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ определим отношение эквивалентности $\sim$ по следующему правилу:

$$a \sim b \iff a, b \in A_i \text{ для некоторого } i \in I.$$

Отношение эквивалентности θ на множестве A назовём *a-эквивалентностью*, если $\theta \cap \sim\; = 0_A$. Для a-эквивалентности θ на A и индексов $i, j \in I$, $i \neq j$, положим

$$A_{ij} \rightleftharpoons \{a \in A_i \mid a\ \theta\ b \text{ для некоторого } b \in A_j\}$$

и

$$\theta_{ij} \rightleftharpoons \theta \cap (A_{ij} \times A_{ji}).$$

Заметим, что отношения θ_{ij} являются биекциями между A_{ij} и A_{ji}.

Если A_{ij} непусто, обозначим через $\mathcal{A}_{ij}$ подсистему системы $\mathcal{A}_i$ с носителем A_{ij}. a-эквивалентность θ на A назовём *a-конгруэнцией* системы $\mathcal{A}$, если θ_{ij} являются изоморфизмами между $\mathcal{A}_{ij}$ и $\mathcal{A}_{ji}$.

Для a-конгруэнции θ на системе $\mathcal{A} = \bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ определим фактор-систему $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\theta$ по следующим правилам: $B = A/\theta$ и для любых $P^{(n)} \in \Sigma$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ имеет место $(b_1, \ldots, b_n) \in P_{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда существуют $i \in I$, $a_1, \ldots, a_n \in A_i$, такие что $(a_1, \ldots, a_n) \in P_{\mathcal{A}_i}$ и $\theta(a_k) = b_k$ для любого $k = 1, \ldots, n$. Здесь через $\theta(a)$ обозначается множество $\{x \mid a\ \theta\ x\}$.

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение. Если θ — a-конгруэнция на системе $\mathcal{A} = \bigsqcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$, то для любого $i \in I$ отображение

$$\varphi_i \colon \mathcal{A} \to \Big(\bigsqcup_{i\in I} \mathcal{A}_i\Big)/\theta,$$

действующее по правилу $\varphi_i(a) = \theta(a)$, является изоморфным вложением.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma\rangle$ — предикатная система мощности n, в которой любые две одноэлементные подсистемы изоморфны. Тогда существует система $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma\rangle$ мощности $2^n - 1$, расширяющая систему $\mathcal{A}$ и имеющая транзитивную группу автоморфизмов.*

Доказательство. Пусть множество A состоит из элементов $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Обозначим через $\mathcal{A}_k = \langle A_k, \Sigma \rangle$ изоморфные попарно непересекающиеся копии системы $\mathcal{A}$, где множества A_k равны $\{a_{k,0}, \ldots, a_{k,n-1}\}$, и через $\psi_k \colon A \to A_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 2$, отображения, действующие по правилам $\psi_k(a_i) = a_{k,i}$, $i = 0, \ldots, n-1$, и являющиеся изоморфизмами. На элементах системы $\bigsqcup\limits_{k=0}^{2^n-2} \mathcal{A}_k$ определим отношение θ по следующему правилу:

$$a_{k,i} \ \theta \ a_{l,j} \iff k + 2^i \equiv l + 2^j \pmod{2^n - 1}.$$

Например, при $n = 3$, расположив элементы системы $\bigsqcup\limits_{k=0}^{6} \mathcal{A}_k$ следующим образом:

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$		$a_{0,2}$			
	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$		$a_{1,2}$		
		$a_{2,0}$	$a_{2,1}$		$a_{2,2}$	
			$a_{3,0}$	$a_{3,1}$		$a_{3,2}$
$a_{4,2}$				$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	
	$a_{5,2}$				$a_{5,0}$	$a_{5,1}$
$a_{6,1}$		$a_{6,2}$				$a_{6,0}$

,

получаем в столбцах классы эквивалентности по конгруэнции θ.

Очевидно, что θ является отношением эквивалентности. Заметим, что если $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, то равенство

$$k + 2^i \equiv k + 2^j \pmod{2^n - 1}$$

возможно только при $i = j$. Отсюда заключаем, что θ является a-эквивалентностью.

Для любых $k, l \in \{0, \ldots, 2^n - 2\}$ существует не более одной пары $(i, j) \in \in \{0, \ldots, n-1\}^2$, для которой верно

$$k + 2^i \equiv l + 2^j \pmod{2^n - 1}.$$

Следовательно, $|A_{kl}| \leqslant 1$. По условию любые две одноэлементные подсистемы систем A_k изоморфны, поэтому θ — a-конгруэнция на системе $\mathcal{A} = \bigsqcup\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$, а отображения $\chi_k \colon \mathcal{A}_k \to \Big(\bigsqcup\limits_{k=0}^{2^n-2} \mathcal{A}_k \Big) / \theta$, действующие по правилам $\chi_k(a_{k,i}) = \theta(a_{k,i})$, являются изоморфными вложениями.

Замечание. Для любого элемента $a_{k,i}$ множество $\theta(a_{k,i})$ n-элементно, и

$$\{j \mid a_{l,j} \in \theta(a_{k,i}) \text{ для некоторого } l\} = \{0, \ldots, n-1\}.$$

Из данного замечания следует, что система $\mathcal{B} = \Big(\bigsqcup\limits_{k=0}^{2^n-2} \mathcal{A}_k \Big) / \theta$ имеет мощность $2^n - 1$.

Для любого $m \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 2\}$ определим автоморфизм φ_m системы $\mathcal{B}$ по следующему правилу:

$$\varphi_m\big(\theta(a_{k,i})\big) = \theta(a_{m+k \,(\mathrm{mod}\ 2^n-1),0}).$$

Если $k+2^i \equiv l+2^j \pmod{2^n-1}$, то $m+k+2^i \equiv m+l+2^j \pmod{2^n-1}$; следовательно, φ_m определён корректно. Поскольку при изменении k от 0 до 2^n-2 числа $m+k \pmod{2^n-1}$ пробегают это же множество, то отображение φ_m является подстановкой на множестве B.

Пусть P — t-местный предикатный символ сигнатуры Σ и $(b_1,\ldots,b_t) \in P_{\mathcal{B}}$. Тогда по определению системы $\mathcal{B}$ как фактор-системы по a-конгруэнции существуют $k \in \{0,\ldots,2^n-2\}$ и элементы $a_{k,i_1},\ldots,a_{k,i_t} \in A_k$, для которых $(a_{k,i_1},\ldots,a_{k,i_t}) \in P_{\mathcal{A}_k}$ и $b_j = \theta(a_{k,i_j})$ при $j \in \{1,\ldots,t\}$. Отображение $\psi_k^{-1} \circ \psi_{m+k\ (\mathrm{mod}\ 2^n-1)}$ является изоморфизмом между системами $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{A}_{m+k\ (\mathrm{mod}\ 2^n-1)}$. Следовательно,

$$(a_{m+k\ (\mathrm{mod}\ 2^n-1),i_1},\ldots,a_{m+k\ (\mathrm{mod}\ 2^n-1),i_t}) \in P_{\mathcal{A}_{m+k\ (\mathrm{mod}\ 2^n-1)}},$$

и φ_m действительно является автоморфизмом системы $\mathcal{B}$.

Покажем, что для любых элементов $b,c \in B$ существует автоморфизм из $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$, переводящий b в c. Рассмотрим элементы $a_{k,0} \in b$, $a_{l,0} \in c$. Тогда

$$\varphi_{l-k\ (\mathrm{mod}\ 2^n-1)}\big(\theta(a_{k,0})\big) = \theta(a_{l,0}),$$

т. е. $\varphi_{l-k\ (\mathrm{mod}\ 2^n-1)}(b) = c$.

Для завершения доказательства заметим, что отображения $\psi_k \circ \chi_k$, $k \in \{0,1,\ldots,2^n-2\}$, являются изоморфными вложениями системы $\mathcal{A}$ в систему $\mathcal{B}$. □

Так как частными случаями предикатной системы, в которой любые две одноэлементные подсистемы изоморфны, являются графы без петель и рефлексивные графы, верно следующее утверждение.

Следствие. Пусть $\mathcal{A}$ — граф без петель или рефлексивный граф, имеющий мощность n. Тогда существует граф $\mathcal{B}$ мощности 2^n-1, расширяющий $\mathcal{A}$ и имеющий транзитивную группу автоморфизмов.

Литература

[1] Овчинникова Е. В. О расширениях частичных изоморфизмов конечных полигонов над линейно упорядоченными моноидами // Алгебра и теория моделей. Вып. 6. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. — С. 45—48.

[2] Herwig B. Extending partial automorphisms on finite structures // Combinatorica. — 1995. — Vol. 15. — P. 365—371.

[3] Hrushovski E. Extending partial isomorphisms of graphs // Combinatorica. — 1992. — Vol. 12. — P. 204—218.