О половинных раскрасках гиперграфов*

А. П. РОЗОВСКАЯ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: anarozovski@gmail.com

М. В. ТИТОВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: 57mashka@mail.ru

Д. А. ШАБАНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: gold-amber@yandex.ru

УДК 519.179.1+519.157

Ключевые слова: гиперграф, свойство B, половинные раскраски.

Аннотация

Рассматривается экстремальная задача о раскрасках гиперграфов. Пусть k — натуральное число. Требуется найти величину $m_k(n)$, равную минимальному количеству рёбер n-равномерного гиперграфа, не допускающего таких двухцветных раскрасок множества вершин, что в каждом ребре гиперграфа содержится по k вершин каждого цвета. В работе получены точные значения величин $m_2(5)$ и $m_2(4)$, а также верхние оценки для $m_3(7)$ и $m_4(9)$.

Abstract

A. P. Rozovskaya, M. V. Titova, D. A. Shabanov, On balanced colorings of hypergraphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 141—163.

The paper deals with an extremal problem concerning hypergraph colorings. Let k be an integer. The problem is to find the value $m_k(n)$ equal to the minimum number of edges in an n-uniform hypergraph not admitting two-colorings of the vertex set such that every edge of the hypergraph contains k vertices of each color. In this paper, we obtain the exact values of $m_2(5)$ and $m_2(4)$, and the upper bounds for $m_3(7)$ and $m_4(9)$.

1. Введение и история задачи

В настоящей работе рассматривается известная экстремальная задача о раскрасках равномерных гиперграфов. *Гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где V — некоторое конечное множество, называемое *множеством*

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 09-01-00294 Российского фонда фундаментальных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 141—163.

вершин гиперграфа, а E — совокупность подмножеств множества V, которые называются *рёбрами* гиперграфа. Гиперграф называется *n-равномерным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Одной из классических экстремальных задач теории гиперграфов является задача о свойстве B гиперграфов. Напомним, что гиперграф обладает *свойством* B, если существует двухцветная раскраска множества его вершин, в которой все рёбра гиперграфа являются неодноцветными. Задача состоит в отыскании величины $m(n)$, равной минимальному числу рёбер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не обладающих свойством B. Впервые данная проблема была сформулирована в [10]. Сам Эрдёш (см. [8, 9]) с помощью простых вероятностных рассуждений получил следующие асимптотические оценки для $m(n)$:

$$2^{n-1} \leqslant m(n) \leqslant \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n.$$

Нижняя оценка была сначала улучшена Й. Беком (см. [7]), а затем Дж. Радхакришнаном и А. Сринивазаном (см. [14]), которые показали, что

$$m(n) = \Omega\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^n\right).$$

На сегодняшний день известны только два точных значения. Легко убедиться, что $m(2) = 3$. Также несложно показать, что $m(3) = 7$. Значения $m(n)$ начиная с $n = 4$ неизвестны. Наилучшая верхняя оценка для $m(4)$ была независимо получена Б. Тофтом (см. [16]) и П. Сеймуром (см. [15]): $m(4) \leqslant 23$. В [5, 6, 11—13] изучались нижние оценки числа рёбер 4-равномерных гиперграфов, не обладающих свойством B, с заданным количеством вершин. Из суммы этих результатов следует, что $m(4) \geqslant 20$.

В работе получен ряд результатов для задачи, являющейся обобщением классической проблемы Эрдёша. Речь идёт о свойстве B_k гиперграфов, которое было впервые определено в [2]. Гиперграф обладает *свойством* B_k, если существует двухцветная раскраска множества его вершин, в которой любое ребро гиперграфа содержит не менее k вершин каждого цвета. Требуется найти величину $m_k(n)$, равную минимальному числу рёбер гиперграфа в классе n-равномерных гиперграфов, не обладающих свойством B_k. В [1—4] были найдены следующие асимптотические оценки данной величины при различных условиях на параметр k. Если $k = o(\frac{n}{\ln n})$, то

$$m_k(n) \leqslant \big(1 + o(1)\big) \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\binom{n}{k-1}}.$$

При $k = O(\ln n)$ выполняется соотношение

$$m_k(n) = \Omega\biggl(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} \frac{e^{-k/2}}{\sqrt{2k-1}} \frac{2^{n-k}}{\binom{n}{k-1}}\biggr).$$

Если k и n удовлетворяют неравенству $k^2(n-k) < (n-2k)^2$, то

$$m_k(n) \geqslant 0{,}19\, n^{1/4} \frac{2^n}{\binom{n}{k-1}}.$$

Однако данные результаты не дают хороших оценок при малых значениях параметров. В работе получены точные значения для $m_2(4)$ и $m_2(5)$, а также оценки $m_3(7)$ и $m_4(9)$.

Далее мы будем работать с 5-равномерными гиперграфами. Введём ещё несколько дополнительных определений.

Назовём ребро e 5-равномерного гиперграфа $H = (V, E)$ *хорошим* в двухцветной раскраске Ω, если в этой раскраске оно содержит по крайней мере две вершины одного цвета и две — другого. Иначе будем говорить, что ребро e *плохое*. Из определения следует, что гиперграф обладает свойством B_2, если существует двухцветная раскраска множества его вершин, в которой все рёбра являются хорошими. Когда гиперграф H обладает свойством B_2, будем писать $H \vDash B_2$.

Половинной раскраской множества вершин V будем называть его двухцветную раскраску, в которой ровно $\lfloor |V|/2 \rfloor$ вершин покрашены в один цвет, а остальные $\lceil |V|/2 \rceil$ — в другой.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая совокупность двухцветных раскрасок множества V. Тогда для каждого ребра $e \in E$ через $\tilde{\mathfrak{A}}(e)$ обозначим множество раскрасок из $\mathfrak{A}$, в которых ребро e является плохим.

2. Формулировки результатов и структура доказательства

Главным результатом работы является следующая теорема.

Основная теорема 1. *Верно равенство* $m_2(5) = 7$.

Разобьём доказательство теоремы на несколько этапов. Сначала в разделе 3 докажем верхнюю оценку.

Лемма 2.1. *Имеет место неравенство* $m_2(5) \leqslant 7$.

Доказательство нижней оценки разобьём на четыре части в зависимости от количества вершин в гиперграфе H.

Лемма 2.2. *Пусть 5-равномерный гиперграф* $H = (V, E)$ *таков, что* $|V| \leqslant 8$, $|E| = 6$. *Тогда* H *обладает свойством* B_2.

Теорема 2.1. *Пусть 5-равномерный гиперграф* $H = (V, E)$ *таков, что* $|V| = 9$, $|E| = 6$. *Тогда* H *обладает свойством* B_2.

Теорема 2.2. *Пусть 5-равномерный гиперграф* $H = (V, E)$ *таков, что* $|V| = 10$, $|E| = 6$. *Тогда* H *обладает свойством* B_2.

Лемма 2.3. *Пусть 5-равномерный гиперграф $H = (V, E)$ таков, что $|V| \geqslant 10$, $|E| = 6$. Тогда H обладает свойством B_2.*

Доказательство леммы 2.2 мы приведём в разделе 4, теоремы 2.1 — в разделе 5, теоремы 2.2 — в разделе 6, леммы 2.3 — в разделе 7.

Таким образом, мы докажем, что если 5-равномерный гиперграф H таков, что $|E| = 6$, то при любом количестве вершин H обладает свойством B_2, следовательно, $m_2(5) \geqslant 7$. С учётом доказанной в лемме 2.1 верхней оценки мы получим в точности утверждение основной теоремы.

Также получены следующие результаты.

Теорема 2.3. *Верно равенство $m_2(4) = 4$.*

Доказательство теоремы 2.3 мы приведём в разделе 8.

Теорема 2.4. *Имеет место неравенство $m_3(7) \leqslant 8$.*

Доказательство теоремы 2.4 мы приведём в разделе 9.

Теорема 2.5. *Имеет место неравенство $m_4(9) \leqslant 8$.*

Доказательство теоремы 2.5 мы приведём в разделе 10.

3. Доказательство леммы 2.1

Рассмотрим 5-равномерный гиперграф $H = (V, E)$,

$$V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}, \quad E = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7\},$$

где

$$\begin{gathered} e_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8\}, \quad e_2 = \{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8\}, \\ e_3 = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8\}, \quad e_4 = \{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}, \\ e_5 = \{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}, \quad e_6 = \{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}, \quad e_7 = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}. \end{gathered}$$

Покажем, что H не обладает свойством B_2. Для этого достаточно убедиться в том, что в любой двухцветной раскраске множества V гиперграф H содержит плохое ребро. Рассмотрим произвольную раскраску в два цвета. Без ограничения общности можно считать, что в ней вершина 8 имеет красный цвет. Чтобы ребро e_1 не было плохим, необходимо, чтобы в нём было две красные и две синие вершины. Одна из его вершин уже имеет красный цвет.

Допустим, что вершина 1 также красного цвета, а вершины 2 и 3 синие. Для того чтобы все оставшиеся рёбра e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 были хорошими, при любом $j = \overline{2, 7}$ должно выполняться одно из следующих условий:

1) $e_j \setminus \{8\}$ имеет две синие и две красные вершины;
2) $e_j \setminus \{8\}$ имеет три синие вершины и одну красную.

Рассмотрев e_2, имеем: одна из вершин 5 и 6 синяя; из e_3 получаем, что одна из вершин 5 и 7 должна быть синей; из e_5: вершина 6 или вершина 7 красная. Если вершина 5 красная, то обе вершины 6 и 7 синие. Получили противоречие, так как тогда в ребре e_5 четыре синие вершины. Следовательно, вершина 5 имеет синий цвет. Тогда, рассмотрев ребро e_6, имеем: вершина 4 или вершина 7 красная; из рассмотрения e_7: вершина 4 или вершина 6 красная; из рассмотрения e_4: среди вершин с номерами $\{4, 6, 7\}$ две синие. Если вершина 4 красная, то вершины 6 и 7 синие. Получаем противоречие с условиями 1), 2) для ребра e_5. Следовательно, вершина 4 синяя. Тогда вершины 7 и 6 красные, что противоречит условиям для ребра e_4. Иными словами, если зафиксировать данную раскраску вершин ребра e_1, то получается плохое ребро при любой раскраске оставшихся вершин. Другие варианты раскраски ребра e_1 рассматриваются аналогично.

Таким образом, в любой двухцветной раскраске H содержит плохие рёбра, а значит, H не обладает свойством B_2.

Лемма доказана. □

4. Доказательство леммы 2.2

Нам потребуется следующий результат.

Утверждение 4.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество раскрасок гиперграфа $H = (V, E)$. Если*

$$\left|\bigcup_{e\in E}\tilde{\mathfrak{A}}(e)\right| < |\mathfrak{A}|,$$

то $H \vDash B_2$.

Доказательство очевидно. □

Перейдём к доказательству леммы.

Пусть $H = (V, E)$ — 5-равномерный гиперграф, $|V| \leqslant 8$, $|E| = 6$. Докажем, что H обладает свойством B_2. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $|V| = 8$ (или $|V| = 7$). Существует 70 половинных раскрасок 8-элементного (7-элементного) множества. При этом для каждого ребра существует ровно 10 половинных раскрасок, в которых оно является плохим. Тогда имеем

$$\left|\bigcup_{e\in E}\tilde{\mathfrak{A}}(e)\right| \leqslant 6\cdot 10 = 60 < 70 = |\mathfrak{A}|.$$

Следовательно, по утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Случай 2. Если $|V| = 6$, то при любой половинной раскраске ни одно ребро не может содержать более трёх вершин одного цвета, т. е. все рёбра H хорошие, и $H \vDash B_2$.

Лемма доказана. □

5. Доказательство теоремы 2.1

Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф из условия теоремы 2.1, т. е. H — 5-равномерный гиперграф, удовлетворяющий условиям $|V| = 9$, $|E| = 6$. Мы разобьём доказательство теоремы 2.1 на несколько частей.

5.1. Формулировки вспомогательных утверждений

Утверждение 5.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — множество половинных раскрасок гиперграфа $H = (V, E)$, $|\mathfrak{A}| = 252$, $e, f \in E$. Тогда*

1) $|\tilde{\mathfrak{A}}(e)| = 52$;
2) *если* $|e \cap f| = 1$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 20$;
3) *если* $|e \cap f| = 2$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 8$;
4) *если* $|e \cap f| = 3$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 8$;
5) *если* $|e \cap f| = 4$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 20$.

Доказательство получается простым подсчётом. □

Утверждение 5.2. *Пусть в гиперграфе H есть такие три различных ребра e, f, h, что $|e \cap f| \notin \{2, 3\}$, $|e \cap h| \notin \{2, 3\}$. Тогда H обладает свойством B_2.*

Доказательство мы приведём в разделе 5.2.

Утверждение 5.3. *Пусть в гиперграфе H есть такие два различных ребра e и f, что $|e \cap f| = 1$. Тогда H обладает свойством B_2.*

Доказательство мы приведём в разделе 5.3.

Утверждение 5.4. *Пусть в гиперграфе H есть такие два различных ребра e и f, что $|e \cap f| = 4$. Тогда H обладает свойством B_2.*

Доказательство мы приведём в разделе 5.4.

Утверждение 5.5. *Пусть в H никакие рёбра не имеют мощностей попарных пересечений 1 и 4. Тогда существуют такие рёбра $e, f \in E$, что $|e \cap f| = 3$.*

Доказательство мы приведём в разделе 5.5.

Утверждение 5.6. *Пусть в H все рёбра имеют пересечения по двум или трём вершинам. Тогда $H \vDash B_2$.*

Доказательство мы приведём в разделе 5.6.

Доказав эти утверждения, мы рассмотрим все возможные варианты пересечения рёбер гиперграфа H. Следовательно, теорема 2.1 будет доказана.

5.2. Доказательство утверждения 5.2

Пусть a_1, a_2, a_3 — различные рёбра H, отличные от e, f и h. Тогда из утверждения 5.1 получаем, что

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{\mathfrak{A}}(e)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(f)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(h)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(a_1)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(a_2)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(a_3)|\leqslant\\
&\quad\leqslant|\tilde{\mathfrak{A}}(e)|+|\tilde{\mathfrak{A}}(f)\setminus\tilde{\mathfrak{A}}(e)|+|\tilde{\mathfrak{A}}(h)\setminus\tilde{\mathfrak{A}}(e)|+|\tilde{\mathfrak{A}}(a_1)\setminus\tilde{\mathfrak{A}}(e)|+\\
&\quad+|\tilde{\mathfrak{A}}(a_2)\setminus\tilde{\mathfrak{A}}(e)|+|\tilde{\mathfrak{A}}(a_3)\setminus\tilde{\mathfrak{A}}(e)|\leqslant 52+32+32+44\cdot 3=248<252.
\end{aligned}
$$

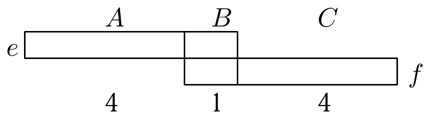
Следовательно, по утверждению 4.1 гиперграф H обладает свойством B_2. □

5.3. Доказательство утверждения 5.3

Введём следующие обозначения:

$$A=e\setminus f,\quad B=e\cap f,\quad C=f\setminus e.$$

Ясно, что $A\cup B\cup C=V$.



Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — оставшиеся рёбра H. Если найдётся такое i, что $|e\cap a_i|\notin\{2,3\}$, или такое i, что $|f\cap a_i|\notin\{2,3\}$, то по утверждению 5.2 H обладает свойством B_2. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда все оставшиеся рёбра a_i пересекаются и с e, и с f либо по двум, либо по трём вершинам. Для каждого ребра a_i возможны три ситуации:

	$\lvert a_i\cap A\rvert$	$\lvert a_i\cap B\rvert$	$\lvert a_i\cap C\rvert$
α	3	0	2
β	2	0	3
γ	2	1	2 .

Рассмотрим следующее множество раскрасок $\mathfrak{A}_1$: множество B покрашено в красный цвет, множества A и C имеют по две красные и две синие вершины. Всего таких раскрасок 36. В любой раскраске из $\mathfrak{A}_1$ рёбра e и f являются хорошими. Нетрудно убедиться, что

$|\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)|=6$, если a_i имеет тип α или β;
$|\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)|=10$, если a_i имеет тип γ.

Возможны следующие три ситуации.

Ситуация 1. Если рёбер типа γ не более двух, то

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_1(u)\right|=|\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)\cup\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_2)\cup\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_3)\cup\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_4)|\leqslant 2\cdot 10+2\cdot 6=32<36=|\tilde{\mathfrak{A}}_1|.$$

Следовательно, по утверждению 4.1 $H\vDash B_2$.

Ситуация 2. Пусть все a_i имеют тип γ. Покрасим множество A таким образом, чтобы оно содержало две синие и две красные вершины и при этом только одно из множеств $a_i \cap A$, $i = \overline{1,4}$ (или ни одно из них), было одноцветным. Подберём подобную раскраску и для множества C.

Далее возможны четыре случая.

Случай 2а. Одноцветных множеств нет ни среди $a_i \cap A$, ни среди $a_i \cap C$. Тогда, покрасив B в красный цвет, мы получим раскраску из $\mathfrak{A}_1$, в которой нет плохих рёбер. Значит, $H \vDash B_2$.

Случай 2б. Пусть ребро $a_j \cap A$ одноцветно, все $a_i \cap C$, $i = \overline{1,4}$, неодноцветны. В этом случае рёбра e, f и a_i, $i \neq j$, будут хорошими при любой раскраске вершины B. Покрасим B в цвет, противоположный цвету $a_j \cap A$. Тогда и ребро a_j станет хорошим. Так мы построим раскраску, в которой у H нет плохих рёбер. Значит, $H \vDash B_2$.

Случай, когда $a_j \cap C$ одноцветно, а все множества $a_i \cap A$, $i = \overline{1,4}$, неодноцветны, рассматривается аналогично.

Случай 2в. Пусть $a_j \cap A$, $a_j \cap C$ — одноцветные множества. Сделаем так, чтобы цвета этих множеств были различны. Если изначально они были одного цвета, инвертируем цвета множества A (т. е. изменим цвет каждой вершины на противоположный). В этом случае множества $a_i \cap A$, $i \neq j$, останутся неодноцветными. После этого покрасим B в красный цвет. Получаем раскраску из $\mathfrak{A}_1$, в которой нет плохих рёбер, следовательно, $H \vDash B_2$.

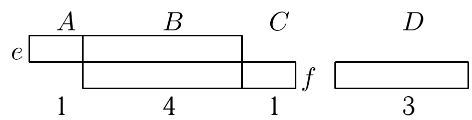
Случай 2г. Пусть $a_j \cap A$, $a_k \cap C$ одноцветны, но $k \neq j$. Инвертируем цвета множества A, если цвета у $a_j \cap A$, $a_k \cap C$ различны. После этого покрасим B в цвет, противоположный цвету $a_k \cap C$. Так мы получаем раскраску H, в которой нет плохих рёбер. Следовательно, $H \vDash B_2$.

Ситуация 3. Пусть три ребра имеют тип γ (без ограничения общности считаем, что это a_1, a_2, a_3), а четвёртое ребро a_4 — тип α. Покрасим A так, чтобы в нём было по две вершины каждого цвета и при этом среди множеств $a_i \cap A$, $i = \overline{1,3}$, было не более одного одноцветного. Покрасим C тем же образом, что и A, но при этом сделаем дополнительно неодноцветным множество $a_4 \cap C$. Так как $|a_4 \cap A| = 3$, то в данной раскраске множества A множество $a_4 \cap A$ будет неодноцветным. Таким образом, ребро a_4 будет хорошим в подобранной раскраске. Остальные рёбра a_1, a_2, a_3 можно сделать хорошими с помощью инверсии цветов множеств A или C, а также подбора цвета для B. Рассуждения в точности повторяют рассуждения для случаев 2a, 2b, 2c и 2d. Таким образом, $H \vDash B_2$. Случай, когда четвёртое ребро a_4 имеет тип β, полностью аналогичен рассмотренному. □

5.4. Доказательство утверждения 5.4

Введём следующие обозначения:

$$A = e \setminus f, \quad B = e \cap f, \quad C = f \setminus e, \quad D = V \setminus \{e \cup f\}.$$



Согласно утверждению 5.2 достаточно рассмотреть случай, когда все оставшиеся ребра a_1, a_2, a_3, a_4 имеют мощность пересечения 2 или 3 и с ребром f, и с ребром e. Для ребра a_i возможны следующие ситуации:

	$\lvert a_i \cap A\rvert$	$\lvert a_i \cap B\rvert$	$\lvert a_i \cap C\rvert$	$\lvert a_i \cap D\rvert$
α	1	2	1	1
β	1	2	0	2
γ	0	2	1	2
δ	0	3	0	2
ε	0	2	0	3
ζ	1	1	1	2

Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_2$: множество A красное, в B содержатся две красные и две синие вершины, C синее, в D содержатся две синие вершины и одна красная или две красные вершины и одна синяя. Ясно, что $|\mathfrak{A}_2| = 36$. В любой раскраске из $\mathfrak{A}_2$ рёбра e и f являются хорошими, т. е. $\tilde{\mathfrak{A}}_2(e) = \tilde{\mathfrak{A}}_2(f) = \varnothing$.

Легко убедиться, что

$|\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i)| = 6$, если a_i имеет тип α, δ, ε или ζ;
$|\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i)| = 10$, если a_i имеет тип β или γ.

Рассмотрим возникающие ситуации.

Ситуация 1. Рёбер типа β или γ не более двух. Понятно, что

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_2(u)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{4}\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i)\right| \leqslant 2\cdot 10 + 2\cdot 6 = 32 < 36 = |\mathfrak{A}_2|.$$

Следовательно, $H \vDash B_2$ по утверждению 4.1.

Ситуация 2. Рёбер типа β или γ ровно четыре. Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_3$: множества A и C красные, множество D синее, B содержит две красные и две синие вершины. Ясно, что $|\mathfrak{A}_3| = 6$ и для любого i выполнено $|\tilde{\mathfrak{A}}_3(a_i)| = 1$. В то же время $\tilde{\mathfrak{A}}_3(e) = \tilde{\mathfrak{A}}_3(f) = \varnothing$. Следовательно,

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_3 u)\right| \leqslant 4 < 6 = |\mathfrak{A}_3|,$$

и по утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Ситуация 3. Рёбер типа β или γ ровно три. Рассмотрим два случая в зависимости от типа четвёртого ребра.

Случай 3а. Четвёртое ребро имеет тип α или ζ. Рассмотрим снова множество раскрасок $\mathfrak{A}_3$. Для рёбер a_1, a_2, a_3 выполнено: $|\tilde{\mathfrak{A}}_3(a_i)| = 1$, $i = \overline{1,3}$. Тогда если ребро a_4 имеет тип α, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_3(a_i)| = 1$, если же ребро a_4 имеет тип ζ, то оно хорошее в любой раскраске из $\mathfrak{A}_3$. Таким образом,

$$\left|\bigcup_{u\in E} \tilde{\mathfrak{A}}_3(u)\right| \leqslant 3\cdot 1 + 1 < 6 = |\mathfrak{A}_3|,$$

и $H \vDash B_2$ согласно утверждению 4.1.

Случай 3б. Четвёртое ребро имеет тип ε или δ. Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_4$: множества A и C красные, в B три синие и одна красная вершина, в D две красные и одна синяя вершина. Ясно, что $|\mathfrak{A}_4| = 12$. Кроме того, имеем $\tilde{\mathfrak{A}}_4(e) = \tilde{\mathfrak{A}}_4(f) = \varnothing$. Если a_i имеет тип β, γ или δ, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_4(a_i)| = 2$. Рёбра типа ε являются хорошими в любой раскраске из $\mathfrak{A}_4$. Получаем

$$\left|\bigcup_{u\in E} \tilde{\mathfrak{A}}_4(u)\right| \leqslant 3\cdot 2 + 2 < 12 = |\mathfrak{A}_4|,$$

а значит, $H \vDash B_2$.

Утверждение доказано. □

5.5. Доказательство утверждения 5.5

Предположим, что в гиперграфе H нет таких рёбер $e, f \in E$, что $|e \cap f| = 3$. Тогда для любых рёбер $e, f \in E$ выполнено $|e \cap f| = 2$.

Пусть

$$A = e \setminus f, \quad B = e \cap f, \quad C = f \setminus e, \quad D = V \setminus (e \cup f).$$

Ясно, что $|A| = |C| = 3$, $|B| = 2$, $|D| = 1$.

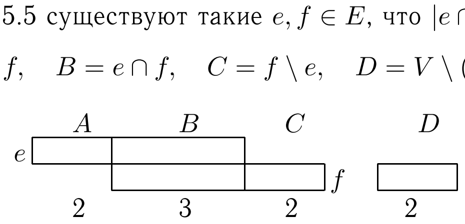
Пусть h — ребро H, отличное от e и f. По предположению $|h \cap e| = 2$, $|h \cap f| = 2$, следовательно, $|A \cap h| = 2$, $|C \cap h| = 2$, $|D \cap h| = 1$. Далее, h_1 — четвёртое ребро, $|h_1 \cap e| = 2$, $|h_1 \cap f| = 2$. Точно так же получаем, что $|A \cap h_1| = 2$, $|C \cap h_1| = 2$, $|D \cap h_1| = 1$. Но $|A| = |C| = 3$, $|D| = 1$, следовательно, $|A \cap h \cap h_1| \geqslant 1$, $|C \cap h \cap h_1| \geqslant 1$, $|D \cap h \cap h_1| = 1$, значит, $|h \cap h_1| \geqslant 3$. Мы получили противоречие с высказанным предположением.

Утверждение доказано. □

5.6. Доказательство утверждения 5.6

По утверждению 5.5 существуют такие $e, f \in E$, что $|e \cap f| = 3$. Пусть

$$A = e \setminus f, \quad B = e \cap f, \quad C = f \setminus e, \quad D = V \setminus (e \cup f).$$



Для оставшихся рёбер a_1, a_2, a_3, a_4 возможны девять различных вариантов распределения вершин по множествам A, B, C, D, которые обозначены в таблице буквами α—δ_3. Рассмотрим следующее множество $\mathfrak{A}_1$ раскрасок вершин H: в каждом из множеств A, C, D содержится одна красная и одна синяя вершина, в B — две красные и одна синяя вершина. Ясно, что $|\mathfrak{A}_1| = 24$. При этом $\tilde{\mathfrak{A}}_1(e) = \tilde{\mathfrak{A}}_1(f) = \varnothing$. Значения $|\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)|$ для рёбер a_i также приведены в таблице.

	$\|a_i \cap A\|$	$\|a_i \cap B\|$	$\|a_i \cap C\|$	$\|a_i \cap D\|$	$\|\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)\|$
α	1	2	1	1	8
β_1	1	2	0	2	4
β_2	0	2	1	2	4
γ_1	2	1	1	1	6
γ_2	1	1	2	1	6
γ_3	1	1	1	2	6
δ_1	2	1	2	0	0
δ_2	2	0	2	1	0
δ_3	0	3	0	2	0

Допустим, что не выполнена ни одна из следующих ситуаций ($i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$).

Ситуация 1. Все ребра имеют тип α.

Ситуация 2. Три ребра имеют тип α, и одно ребро имеет тип β_i, γ_k или δ_j.

Ситуация 3. Два ребра имеют тип α, и два ребра имеют тип β_i, γ_k.

Ситуация 4. Одно ребро имеет тип α, и три ребра имеют тип γ_k.

Ситуация 5. Одно ребро имеет тип α, два ребра имеют тип γ_k, и одно ребро имеет тип β_i.

Ситуация 6. Все рёбра имеют тип γ_k.

Тогда

$$\left|\bigcup_{u\in E} \tilde{\mathfrak{A}}_1(u)\right| \leqslant 22 < 24 = |\tilde{\mathfrak{A}}_1|.$$

Следовательно, по утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Для ситуаций 1, 4 и 6 искомой является следующая раскраска:

A	B	C	D
2к	3с	2к	2с

.

Рассмотрим ситуацию 2. Возможны четыре случая в зависимости от типа четвёртого ребра.

Случай 2а. Три ребра имеют тип α, четвёртое ребро имеет тип β_i. Тогда искомой является следующая раскраска:

A	B	C	D
2к	3с	2к	2к

.

Случай 2б. Три ребра имеют тип α, четвёртое ребро имеет тип γ_k. Искомой является та же раскраска, что и в ситуации 1.

Случай 2в. Три ребра имеют тип α, четвёртое ребро имеет тип δ_3. Искомой является та же раскраска, что и в случае 2а.

Случай 2г. Три ребра имеют тип α, четвёртое ребро имеет тип δ_1 или δ_2. Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_2$:

A	B	C	D
к/с	2с/к	2к	2с

.

Ясно, что $|\mathfrak{A}_2| = 6$, рёбра e и f являются хорошими в любой раскраске из $\mathfrak{A}_2$. Если a_i имеет тип α, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i)| = 1$, если тип δ_1, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i)| = 2$, если, наконец, тип δ_2, то $\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i) = \varnothing$. Таким образом,

$$\left| \bigcup_{u \in E} \tilde{\mathfrak{A}}_2(u) \right| \leqslant 5 < 6 = |\tilde{\mathfrak{A}}_2|,$$

следовательно, по утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Рассмотрим ситуацию 3. Здесь возможны три различных случая.

Случай 3а. Два ребра имеют тип α, и два ребра имеют тип γ_k, $k = 1, 2, 3$. Искомой является та же раскраска, что и в ситуации 1.

Случай 3б. Два ребра имеют тип α, и два ребра имеют тип β_i, $i = 1, 2$, или два ребра имеют тип α, одно ребро имеет тип β_i, и одно ребро имеет тип γ_k, $k = 1, 3$. Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_3$:

A	B	C	D
к/с	2с/к	2к	к/с

.

Ясно, что $|\mathfrak{A}_3| = 12$, рёбра e и f являются хорошими в любой раскраске из $\mathfrak{A}_3$. Справедливы следующие импликации:

если a_i имеет тип α, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_3(a_i)| = 3$;

если a_i имеет тип β_1, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_3(a_i)| = 2$;

если a_i имеет тип β_2, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_3(a_i)| = 0$;

если a_i имеет тип γ_k, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_3(a_i)| = 2$.

Следовательно, в данном случае

$$\left| \bigcup_{e \in E} \tilde{\mathfrak{A}}_3(e) \right| \leqslant 10 < 12 = |\tilde{\mathfrak{A}}_3|,$$

а значит, по утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Случай 3в. Два ребра имеют тип α, одно ребро имеет тип β_i, и одно ребро имеет тип γ_2. Поменяв местами раскраски множеств A и C, рассуждаем таким же образом, как и в 3б.

Остаётся разобрать ситуацию 5. Разобьём её на три случая.

Случай 5а. Одно ребро имеет тип α, два ребра имеют тип γ_k, и одно ребро имеет тип β_i, $k = 1, 2$, $i = 1, 2$ (нет рёбер типа γ_3). Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_4$:

A	B	C	D
к/с	2к/с	к/с	2с

.

Ясно, что $|\mathfrak{A}_4| = 12$ и рёбра e и f являются хорошими в любой раскраске из $\mathfrak{A}_4$.

Для ребра a_i типа α выполнено $|\tilde{\mathfrak{A}}_4(a_i)| = 3$. Для ребра a_i типа γ_k выполнено $|\tilde{\mathfrak{A}}_4(a_i)| = 2$. Если же ребро a_i имеет тип β_i, то $|\tilde{\mathfrak{A}}_4(a_i)| = 4$. Следовательно, в данном случае

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_4(u)\right| \leqslant 11 < 12 = |\tilde{\mathfrak{A}}_4|,$$

а значит, по утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Случай 5б. Одно ребро имеет тип α, два ребра имеют тип γ_3 или одно ребро имеет тип γ_1, второе имеет тип γ_3, третье ребро имеет тип β_i, $k = 1, 3$, $i = 1, 2$. Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_3$. Тогда

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_3(u)\right| \leqslant 9 < 12 = |\tilde{\mathfrak{A}}_3|,$$

следовательно, по утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Случай 5в. Одно ребро имеет тип α, одно ребро имеет тип γ_2, одно ребро имеет тип γ_3, и одно ребро имеет тип β_i, $k = 1, 3$, $i = 1, 2$. Рассмотрим множество раскрасок $\mathfrak{A}_5$:

A	B	C	D
2к	2с/к	к/с	к/с

.

Множество раскрасок $\mathfrak{A}_5$ отличается от $\mathfrak{A}_3$ тем, что раскраски множеств A и C поменялись местами. Тогда $|\mathfrak{A}_5| = 12$, рёбра e и f являются хорошими в любой раскраске из $\mathfrak{A}_5$. Значит,

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_5(u)\right| \leqslant 9 < 12 = |\tilde{\mathfrak{A}}_5|.$$

Согласно утверждению 4.1 $H \vDash B_2$.

Утверждение доказано. $\square$

6. Доказательство теоремы 2.2

Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф из условия теоремы 2.2, т. е. H — 5-равномерный гиперграф, удовлетворяющий условиям $|V| = 10$, $|E| = 6$. Мы разобьём доказательство теоремы 2.2 на несколько частей.

6.1. Формулировки вспомогательных утверждений

Утверждение 6.1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *множество половинных раскрасок гиперграфа* $H = (V, E)$, $|\mathfrak{A}| = 252$, $e, f \in E$. *Тогда имеют место следующие равенства*:

1) $|\tilde{\mathfrak{A}}(e)| = 52$;
2) *если* $|e \cap f| = 1$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 20$;
3) *если* $|e \cap f| = 2$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 8$;
4) *если* $|e \cap f| = 3$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 8$;
5) *если* $|e \cap f| = 4$, *то* $|\tilde{\mathfrak{A}}(e) \cap \tilde{\mathfrak{A}}(f)| = 20$.

Доказательство получается простым подсчётом.

Утверждение 6.2. *Пусть в гиперграфе* H *есть такие три различных ребра* e, f, h, *что* $|e \cap f| \notin \{2, 3\}$, $|e \cap h| \notin \{2, 3\}$. *Тогда* H *обладает свойством* B_2.

Доказательство в точности повторяет рассуждения утверждения 5.2, и мы не будем его приводить.

Утверждение 6.3. *Пусть в гиперграфе* H *есть такие два различных ребра* e *и* f, *что* $|e \cap f| = 1$. *Тогда* H *обладает свойством* B_2.

Доказательство мы приведём в разделе 6.2.

Утверждение 6.4. *Пусть в гиперграфе* H *есть такие два различных ребра* e *и* f, *что* $|e \cap f| = 4$. *Тогда* H *обладает свойством* B_2.

Доказательство мы приведём в разделе 6.3.

Утверждение 6.5. *Пусть в гиперграфе* H *все рёбра имеют мощность попарных пересечений* 2. *Тогда* H *обладает свойством* B_2.

Доказательство мы приведём в разделе 6.4.

Утверждение 6.6. *Пусть в гиперграфе* H *все рёбра имеют пересечения по двум или трём вершинам. Тогда* H *обладает свойством* B_2.

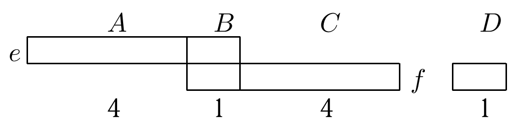
Доказательство мы приведём в разделе 6.5.

Доказав эти утверждения, мы рассмотрим все возможные варианты пересечения рёбер гиперграфа H. Следовательно, теорема 2.2 будет доказана. □

6.2. Доказательство утверждения 6.3

Введём следующие обозначения:

$$A = e \setminus f, \quad B = e \cap f, \quad C = f \setminus e, \quad D = V \setminus \{e \cup f\}.$$



Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — оставшиеся рёбра H. Если найдётся такое i, что $|e \cup a_i| \notin \{2, 3\}$, то по утверждению 6.2 H обладает свойством B_2.

Остаётся рассмотреть случай, когда все оставшиеся рёбра a_i пересекаются и с e, и с f либо по двум, либо по трём вершинам. Возможны шесть различных вариантов распределения вершин ребра a_i:

	$\lvert a_i \cap A\rvert$	$\lvert a_i \cap B\rvert$	$\lvert a_i \cap C\rvert$	$\lvert a_i \cap D\rvert$
α	2	0	3	0
β	1	1	2	1
γ	3	0	2	0
δ	2	1	1	1
ε	2	0	2	1
η	2	1	2	0 .

Рассмотрим следующее множество $\mathfrak{A}$ раскрасок вершин H: множество B красное, D синее, A и C содержат по две вершины каждого цвета. Всего таких раскрасок 36.

Нетрудно заметить, что

$|\tilde{\mathfrak{A}}(a_i)| = 6$, если a_i имеет тип α, β, γ или δ;
$|\tilde{\mathfrak{A}}(a_i)| = 10$, если a_i имеет тип ε или η.

Рассмотрим возможные варианты в зависимости от типов рёбер a_1, a_2, a_3 и a_4.

Вариант 1. Если рёбер типа ε или η не более двух, то

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}(u)\right| = |\tilde{\mathfrak{A}}(a_1)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(a_2)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(a_3)\cup\tilde{\mathfrak{A}}(a_4)| \leqslant 2\cdot 10 + 2\cdot 6 = 32 < 36 = |\mathfrak{A}|.$$

Следовательно, по утверждению 6.2 в множестве $\mathfrak{A}$ существует хорошая раскраска H, и H обладает свойством B_2.

Вариант 2. Пусть теперь рёбер типа ε или η больше двух. Построим необходимую раскраску вершин V в зависимости от типов рёбер.

Ситуация 1. Пусть все a_i имеют тип ε или η. Выберем такую раскраску из $\mathfrak{A}$, что множества $A\cap a_1$, $A\cap a_2$, $A\cap a_3$, $C\cap a_2$, $C\cap a_3$, $C\cap a_4$ неодноцветны. Тогда рёбра a_2 и a_3 будут хорошими независимо от цвета вершин B и D. Рассмотрим рёбра a_1 и a_4. Возможны два случая.

Случай 1а. Рёбра a_1 и a_4 разного типа (без ограничения общности считаем, что a_1 типа ε, а a_4 типа η). Тогда покрасим вершину B так, чтобы ребро a_4 стало хорошим, а вершину D так, чтобы a_1 стало хорошим.

Случай 1б. Рёбра a_1 и a_4 одного типа ε (или η). Тогда если $A\cap a_4$ и $C\cap a_1$ одного цвета, то красим множество D (или B соответственно) в противоположный цвет. Если $A\cap a_4$ и $C\cap a_1$ разного цвета, то инвертируем цвета в части A (при этом неодноцветность остальных множеств сохраняется) и красим в нужный цвет вершину D (или B соответственно).

Ситуация 2. Пусть рёбра a_1, a_2, a_3 имеют тип ε и η.

Случай 2а. Ребро a_4 имеет тип α или γ. Тогда доказательство такое же, как в ситуации 1.

Случай 2б. Ребро a_4 имеет тип β или δ. Без ограничения общности считаем, что a_4 типа β. Тогда выберем такую раскраску из $\mathfrak{A}$, что множества $A \cap a_1$, $A \cap a_2$, $C \cap a_2$, $C \cap a_3$, $C \cap a_4$ неодноцветны. В этом случае ребро a_2 будет хорошим независимо от раскраски вершин B и D. Существует две возможности.

Рёбра a_1 и a_3 разных типов (без ограничения общности считаем, что a_1 типа ε, а a_3 типа η). Тогда покрасим множества B и D так, чтобы a_1 и a_3 стали хорошими. Если при этом ребро a_4 окажется плохим, то это будет означать, что вершины a_4, принадлежащие A, B и D, покрашены в один цвет. Если инвертировать цвета в C и D, то первые три ребра при этом не испортятся, a_4 станет хорошим, так как $a_4 \cap C$ было неодноцветно, а цвета $a_4 \cap A$ и $a_4 \cap D$ стали разными.

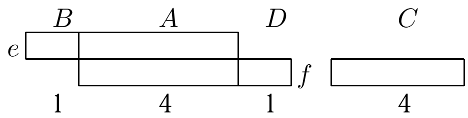
Рёбра a_1 и a_3 одного типа (без ограничения общности считаем, что типа η). Заметим, что a_4 всегда можно сделать хорошим, так как a_1 и a_3 не содержат вершину D (следовательно, её можно покрасить в любой цвет), а $C \cap a_4$ разноцветно. Если при этом $A \cap a_3$ и $C \cap a_1$ одного цвета, то покрасим множество B в противоположный цвет. Иначе инвертируем цвета в A.

Утверждение доказано. $\square$

6.3. Доказательство утверждения 6.4

Пусть

$$B = e \setminus f, \quad A = e \cap f, \quad D = f \setminus e, \quad C = V \setminus \{e \cup f\}.$$



Согласно утверждению 6.2 достаточно рассмотреть случай, когда все оставшиеся рёбра a_1, a_2, a_3, a_4 имеют мощность пересечения 2 или 3 и с ребром f, и с ребром e. Возможны следующие случаи распределения вершин ребра a_i:

	$\lvert a_i \cap B\rvert$	$\lvert a_i \cap A\rvert$	$\lvert a_i \cap D\rvert$	$\lvert a_i \cap C\rvert$
α	0	2	0	3
β	1	1	1	2
γ	0	3	0	2
δ	1	2	1	1
ε	0	2	1	2
η	1	2	0	2 .

Далее доказательство в точности повторяет рассуждения из утверждения 6.3. Утверждение доказано. $\square$

6.4. Доказательство утверждения 6.5

Пусть ребра e и f имеют мощность пересечения 2. Посмотрим, как могут пересекаться с ними остальные четыре ребра. Пусть

$$A = e \setminus f, \quad B = e \cap f, \quad C = f \setminus e, \quad D = V \setminus \{e \cup f\}.$$

Тогда

	$\vert a_i \cap A\vert$	$\vert a_i \cap B\vert$	$\vert a_i \cap C\vert$	$\vert a_i \cap D\vert$
α	1	1	1	2
β	2	0	2	1

.

Заметим, что рёбра типа α содержат обе вершины из множества D и одну вершину из множества B. Поскольку $|B| = 2$, возможны только два различных ребра типа α в гиперграфе H. Аналогично рёбер типа β не может быть более двух. Следовательно, при указанных условиях в гиперграфе ровно по два ребра каждого из типов α и β.

Существует единственная (с точностью до перенумерации вершин в каждой из частей A, B, C и D) конфигурация рёбер гиперграфа H. А именно, пусть $H = (V, E)$,

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad E = \{e, f, a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

где

$$e = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad f = \{4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$a_1 = \{1, 2, 6, 7, 9\}, \quad a_2 = \{2, 3, 7, 8, 10\},$$
$$a_3 = \{3, 4, 6, 9, 10\}, \quad a_4 = \{1, 5, 8, 9, 10\}.$$

Легко проверить, что такой гиперграф H обладает свойством B_2.

Утверждение доказано. □

6.5. Доказательство утверждения 6.6

Из утверждения 6.5 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда найдутся такие рёбра $e, f \in E$, что $|e \cap f| = 3$.

Пусть

$$A = e \setminus f, \quad B = e \cap f, \quad C = f \setminus e, \quad D = V \setminus (e \cup f).$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{A}_1$ раскрасок вершин H:

A	B	C	D
к/с	2к/с	к/с	2с/к

.

Рассмотрим другое множество $\mathfrak{A}_2$ раскрасок вершин H:

A	B	C	D
2с	3к	2с	2к/с

.

Тогда $|\mathfrak{A}_1| = 36$, $|\mathfrak{A}_2| = 3$. Заметим, что в любой раскраске из множеств $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ рёбра e и f являются хорошими. Посмотрим, какими могут быть оставшиеся четыре ребра в зависимости от распределения их вершин по множествам A, B, C и D:

	$\lvert a_i \cap A\rvert$	$\lvert a_i \cap B\rvert$	$\lvert a_i \cap C\rvert$	$\lvert a_i \cap D\rvert$	$\lvert\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)\rvert$	$\lvert\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i)\rvert$
α	2	0	2	1	0	–
β	1	1	1	2	11	0
γ	0	2	0	3	0	–
δ	1	1	2	1	8	1
ε	2	1	1	1	8	1
η	0	2	1	2	8	1
θ	1	2	0	2	8	1
ι	2	1	2	0	0	–
κ	1	2	1	1	11	0
λ	0	3	0	2	0	–

Символ «–» означает, что соответствующая мощность нас интересовать не будет. Возможны следующие ситуации.

Ситуация 1. Пусть в графе H есть хотя бы одно ребро типа α, γ, ι или λ. Тогда

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_1(u)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{4}\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)\right| \leqslant 3\cdot 11 = 33 < 36 = |\mathfrak{A}_1|.$$

Следовательно, по утверждению 4.1 H обладает свойством B_2.

Ситуация 2. Иначе рассмотрим три случая.

Случай 2а. Гиперграф H не содержит рёбер типа β или κ. Тогда

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_1(u)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{4}\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)\right| \leqslant 8\cdot 4 = 32 < 36 = |\mathfrak{A}_1|.$$

Следовательно, по утверждению 4.1 H обладает свойством B_2.

Случай 2б. В H есть ровно одно ребро типа β или κ. Тогда

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_1(u)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{4}\tilde{\mathfrak{A}}_1(a_i)\right| \leqslant 11 + 8\cdot 3 = 35 < 36 = |\mathfrak{A}_1|,$$

следовательно, по утверждению 4.1 H обладает свойством B_2.

Случай 2в. В H есть два или более рёбер типа β или κ. Тогда

$$\left|\bigcup_{u\in E}\tilde{\mathfrak{A}}_2(u)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{4}\tilde{\mathfrak{A}}_2(a_i)\right| \leqslant 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 < 3 = |\mathfrak{A}_2|.$$

Следовательно, по утверждению 4.1 H обладает свойством B_2.

Утверждение доказано. □

7. Доказательство леммы 2.3

Докажем лемму индукцией по числу вершин гиперграфа H.

База индукции. Пусть $|V| = 10$. Тогда утверждение леммы верно по теореме 2.2.

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение леммы верно для $|V| = n$, $n \geqslant 10$. Докажем, что оно верно для $|V| = n + 1$. Заметим, что при $|V| \geqslant 11$ в гиперграфе H найдётся либо вершина степени 1, либо вершина степени 2. Рассмотрим два этих случая.

Случай 1. Пусть $A \in V$ — вершина степени 1, $a \in E$ — ребро, содержащее A. Рассмотрим 5-равномерный гиперграф H', полученный из H следующим образом: $V' = V \setminus A$, $E' = (E \setminus a) \cup a'$, где $a' = (a \setminus A) \cup B$, B — любая вершина из $V \setminus a$. Тогда $|V'| = n$, $|E'| = 6$, значит, граф H' обладает свойством B_2 по предположению индукции, т. е. существует раскраска V', при которой все его ребра хорошие. Применим к $V' = V \setminus A$ ту же раскраску, а вершине A присвоим цвет вершины B в V'. Таким образом, все рёбра H оказываются хорошими в описанной раскраске.

Случай 2. Пусть $A \in V$ — вершина степени 2, $a_1, a_2 \in E$ — рёбра, содержащее A. Рассмотрим 5-равномерный гиперграф $H' = (V', E')$, где $V' = V \setminus A$, $E' = \big(E \setminus (a_1 \cup a_2)\big) \cup a_1' \cup a_2'$, $a_1' = (a_1 \setminus A) \cup B$, $a_2' = (a_2 \setminus A) \cup B$, а B — вершина из $V \setminus (a_1 \cup a_2)$. Ясно, что $|V'| = n$, $|E'| = 6$. Значит, по предположению существует такая раскраска V', что все рёбра H' хорошие. Применяем теперь эту раскраску к $V \setminus A$, а вершину A красим в тот цвет, который имела вершина B в H'. Получаем раскраску гиперграфа H, в которой все его рёбра хорошие.

Лемма доказана. □

8. Доказательство теоремы 2.3

Докажем сначала, что $m_2(4) \leqslant 4$. Рассмотрим 4-равномерный гиперграф $H = (V, E)$,

$$V = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}, \quad E = \{e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4\},$$

где

$$e_1 = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}, \quad e_2 = \{2,\, 3,\, 4,\, 5\}, \quad e_3 = \{1,\, 2,\, 4,\, 5\}, \quad e_4 = \{1,\, 3,\, 4,\, 5\}.$$

Несложно проверить, что такой гиперграф не обладает свойством B_2, следовательно, $m_2(4) \leqslant |E| = 4$.

Для того чтобы доказать равенство $m_2(4) = 4$, необходимо и достаточно показать, что любой 4-равномерный гиперграф с тремя рёбрами обладает свойством B_2. Пусть $H = (V, E)$ — такой гиперграф. Рассмотрим три ситуации.

Ситуация 1. Гиперграф H имеет 5 вершин. В этом случае множество V будет содержать ровно три вершины степени 2 и две вершины степени 3 (их содержат все рёбра). Покрасим вершины степени 2 в красный цвет, а оставшиеся —

в синий. Тогда каждое ребро будет содержать ровно две красные вершины. Следовательно, в него будут входить две красных и две синих вершины. Значит, гиперграф H обладает свойством B_2.

Ситуация 2. Гиперграф H имеет 6 вершин. Рассмотрим два случая.

Случай 1. В множестве V есть вершина v степени 1. Пусть $v \in e \in E$. Рассмотрим $H' = (V', E')$. Здесь $V' = V \setminus \{v\}$, $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{f\}$, где $f = (e \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$, $v' \in V \setminus \{v\}$. При этом $|V| = 5$, следовательно, $H' \vDash B_2$, а значит, и H обладает свойством B_2 (искомая раскраска H' переносится на H, цвет v совпадает с цветом v').

Случай 2. Множество V не содержит вершин степени 1. Такой гиперграф H единственен. С точностью до перенумерации вершин он имеет вид $H = (V, E)$ с

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{e_1, e_2, e_3\},$$

где

$$e_1 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad e_2 = \{3, 4, 5, 6\}, \quad e_3 = \{1, 2, 5, 6\}.$$

Легко проверить, что H обладает свойством B_2.

Ситуация 3. Гиперграф H содержит 7 или более вершин. Тогда в нём обязательно найдётся хотя бы одна вершина степени 1. Следовательно, доказательство сводится к случаю с меньшим количеством вершин, как и в случае 1 ситуации 1.

Теорема доказана. □

9. Доказательство теоремы 2.4

Рассмотрим 7-равномерный гиперграф $H = (V, E)$,

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\},$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}, \quad e_2 = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10\},\\ e_3 &= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}, \quad e_4 = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\},\\ e_5 &= \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad e_6 = \{2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\},\\ e_7 &= \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}, \quad e_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Покажем, что H не обладает свойством B_3.

Пусть

$$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Построим гиперграф $H_1 = (V_1, E_1)$, где $E_1 = \{e_i \cap V_1,\ i = 1, \ldots, 7\}$. Выберем произвольную двухцветную раскраску множества V и докажем, что в этой раскраске одно из рёбер гиперграфа H окажется 3-плохим (т. е. плохим в смысле свойства B_3). В доказательстве леммы 2.1 показано, что 5-равномерный гиперграф H_1 не обладает свойством B_2. Следовательно, при любой раскраске в два цвета гиперграф H_1 будет содержать 2-плохое ребро (т. е. плохое в смысле свойства B_2). Все рёбра гиперграфа H_1 содержат вершину 8, поэтому при любой двухцветной раскраске V_1 возможны две ситуации. Либо существует такое i, $i = 1, \ldots, 7$, что множество $e_i \cap V_2$ одноцветно, либо есть два множества среди $e_i \cap V_2$, $i = 1, \ldots, 7$, одно из которых имеет три красные и одну синюю вершину, а второе — три синие и одну красную. Рассмотрим эти ситуации отдельно.

Ситуация 1. Найдётся такой номер i, $i = 1, \ldots, 7$, что множество $e_i \cap V_2$ одноцветное (например, красное). Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Тогда вершины 8, 9 и 10 обязаны быть синими (иначе ребро e_1 3-плохое). Следовательно, необходимо, чтобы одна из вершин 5 или 6 была красной (иначе ребро e_2 3-плохое) и чтобы одна из вершин 5 или 7 была красной (иначе ребро e_3 3-плохое). Но в таком случае ребро e_8 будет содержать как минимум пять красных вершин. Значит, H не обладает свойством B_3.

Ситуация 2. Среди $e_i \cap V_2$, $i = 1, \ldots, 7$, есть два множества, одно из которых имеет три красные и одну синюю вершину, а второе — три синие и одну красную. Обозначим эти множества $e_k \cap V_2$ и $e_m \cap V_2$ соответственно. Тогда из вершин 8, 9 и 10 хотя бы две обязаны быть синими (иначе ребро e_k 3-плохое). С другой стороны, хотя бы две из вершин 8, 9 и 10 обязаны быть красными (иначе ребро e_m 3-плохое). Противоречие.

Теорема доказана. □

10. Доказательство теоремы 2.5

Рассмотрим 9-равномерный гиперграф $H = (V, E)$,

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\},$$

где

$$\begin{gathered}
e_1 = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12\}, \quad e_2 = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}, \\
e_3 = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \quad e_4 = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \\
e_5 = \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \quad e_6 = \{2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \\
e_7 = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}, \quad e_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.
\end{gathered}$$

Покажем, что H не обладает свойством B_4.

Пусть

$$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Построим гиперграф $H_1 = (V_1, E_1)$, где $E_1 = \{e_i \cap V_1, \ i = 1, \ldots, 7\}$. Выберем произвольную двухцветную раскраску множества V и докажем, что в этой раскраске одно из рёбер гиперграфа H окажется 4-плохим (т. е. плохим в смысле свойства B_4). Мы знаем, что гиперграф H_1 не обладает свойством B_2. Следовательно, при любой раскраске в два цвета гиперграф H_1 будет содержать

2-плохое ребро. Все рёбра гиперграфа H_1 содержат вершину 8, поэтому при любой двухцветной раскраске V_1 возможны две ситуации. Либо существует такое i, $i = 1, \ldots, 7$, что множество $e_i \cap V_2$ одноцветно, либо есть два множества среди $e_i \cap V_2$, $i = 1, \ldots, 7$, одно из которых имеет три красные и одну синюю вершину, а второе — три синие и одну красную. Рассмотрим эти ситуации отдельно.

Ситуация 1. Найдётся такой номер i, $i = 1, \ldots, 7$, что множество $e_i \cap V_2$ одноцветное (например, красное). Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Тогда из вершин 8, 9, 10, 11 и 12 четыре обязаны быть синими (иначе ребро e_1 4-плохое). Следовательно, необходимо, чтобы одна из вершин 5 или 6 была красной (иначе ребро e_7 4-плохое), чтобы одна из вершин 5 или 7 была красной (иначе ребро e_6 4-плохое) и чтобы одна из вершин 6 или 7 была красной (иначе ребро e_5 4-плохое). Но в таком случае ребро e_8 будет содержать как минимум шесть красных вершин. Значит, H не обладает свойством B_4.

Ситуация 2. Среди $e_i \cap V_2$, $i = 1, \ldots, 7$, есть два множества, одно из которых имеет три красные и одну синюю вершину, а второе — три синие и одну красную. Обозначим эти множества $e_k \cap V_2$ и $e_m \cap V_2$ соответственно. Тогда из вершин 8, 9, 10, 11 и 12 хотя бы три обязаны быть синими (иначе ребро e_k 4-плохое). С другой стороны, хотя бы три из вершин 8, 9, 10, 11 и 12 обязаны быть красными (иначе ребро e_m 4-плохое). Противоречие.

Теорема доказана. □

Литература

[1] Розовская А. П. О двухцветных раскрасках общего вида для равномерных гиперграфов // Докл. РАН. — 2009. — Т. 429, № 3. — С. 309—311.

[2] Шабанов Д. А. Об одной комбинаторной задаче Эрдёша // Докл. РАН. — 2004. — Т. 396, № 2. — С. 166—169.

[3] Шабанов Д. А. Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2007. — Т. 71, № 6. — С. 183—222.

[4] Шабанов Д. А. Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов // Мат. сб. — 2008. — Т. 199, № 7. — С. 139—160.

[5] Abbott H. L., Hare D. R. Families of 4-sets without property B // Ars Combinatoria. — 2001. — Vol. 60. — P. 239—245.

[6] Abbott H. L., Liu A. On property B of families of sets // Can. Math. Bull. — 1980. — Vol. 23. — P. 429—435.

[7] Beck J. On 3-chromatic hypergraphs // Discrete Math. — 1978. — Vol. 24. — P. 127—137.

[8] Erdős P. On a combinatorial problem. I // Nordisk Mat. Tidskr. — 1963. — Vol. 11. — P. 5—10.

[9] Erdős P. On a combinatorial problem. II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1964. — Vol. 15. — P. 445—447.

[10] Erdős P., Hajnal A. On a property of families of sets // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1961. — Vol. 12. — P. 87—123.

[11] Exoo G. On constructing hypergraphs without property B // Ars Combinatoria. — 1990. — Vol. 30. — P. 3—12.

[12] Goldberg M., Russell H. Toward computing $m(4)$ // Ars Combinatoria. — 1995. — Vol. 39. — P. 139—148.

[13] Manning G. M. Some results on the $m(4)$ problem of Erdős and Hajnal // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. — 1995. — No. 1. — P. 112—113.

[14] Radhakrishnan J., Srinivasan A. Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring // Random Structures Algorithms. — 2000. — Vol. 16. — P. 4—32.

[15] Seymour P. D. A note on combinatorial problem of Erdős and Hajnal // J. London Math. Soc. — 1974. — Vol. 8. — P. 681—682.

[16] Toft B. On color critical hypergraphs // Infinite and Finite Sets / A. Hajnal, ed. — Amsterdam: North-Holland, 1975. — P. 1445—1457.