Абелевы и гамильтоновы группоиды*

А. А. СТЕПАНОВА
Дальневосточный государственный университет
e-mail: stepltd@mail.primorye.ru

Н. В. ТРИКАШНАЯ
Дальневосточный государственный университет
e-mail: trik74@mail.ru

УДК 510.8+512.57

Ключевые слова: абелева алгебра, гамильтонова алгебра, группоид, квазигруппа, полугруппа.

Аннотация

В работе исследуются некоторые группоиды, являющиеся абелевыми алгебрами и гамильтоновыми алгебрами. Алгебра абелева, если для любой её полиномиальной операции и любых элементов a, b, $\bar{c}$, $\bar{d}$ выполняется импликация $t(a,\bar{c}) = t(a,\bar{d}) \Longrightarrow t(b,\bar{c}) = t(b,\bar{d})$. Алгебра гамильтонова, если любая её подалгебра является классом некоторой конгруэнции. В 1994 г. было дано описание структуры абелевых полугрупп. В данной работе описаны абелевы группоиды с единицей, абелевы конечные квазигруппы и абелевы полугруппы S с условием $abS = aS$ и $Sba = Sa$ для любых $a, b \in S$. Доказано, что конечная абелева квазигруппа является гамильтоновой алгеброй. Дана характеризация гамильтоновых группоидов с единицей и полугрупп при условии абелевости этих алгебр.

Abstract

A. A. Stepanova, N. V. Trikashnaya, Abelian and Hamiltonian groupoids, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 165—177.

In this work, we investigate some groupoids that are Abelian algebras and Hamiltonian algebras. An algebra is Abelian if for every polynomial operation and for all elements a, b, $\bar{c}$, $\bar{d}$ the implication $t(a,\bar{c}) = t(a,\bar{d}) \Longrightarrow t(b,\bar{c}) = t(b,\bar{d})$ holds. An algebra is Hamiltonian if every subalgebra is a block of some congruence on the algebra. R. J. Warne in 1994 described the structure of the Abelian semigroups. In this work, we describe the Abelian groupoids with identity, the Abelian finite quasigroups, and the Abelian semigroups S such that $abS = aS$ and $Sba = Sa$ for all $a, b \in S$. We prove that a finite Abelian quasigroup is a Hamiltonian algebra. We characterize the Hamiltonian groupoids with identity and semigroups under the condition of Abelianity of these algebras.

*Работа поддержана грантом ведущих научных школ РФ (проект НШ-2810.2008.1) и грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00336-а).

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 165—177.

Памяти Юрия Евгеньевича Шишмарёва

1. Введение

Свойства абелевости и гамильтоновости для алгебр были рассмотрены в [4—6]. Данная работа посвящена изучению некоторых группоидов, являющихся абелевыми алгебрами и гамильтоновыми алгебрами.

Напомним некоторые определения. Алгебра $\langle A; \cdot \rangle$, где $\cdot$ — бинарная операция, называется группоидом. Группоид $\langle A; \cdot \rangle$ называется квазигруппой, если для любых $a, b \in A$ существуют единственные элементы $x, y \in A$, такие что $x \cdot a = b$, $a \cdot y = b$. Квазигруппа с единицей 1, для которой $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для любого $a \in A$, называется лупой. Группоид с ассоциативной бинарной операцией называется полугруппой.

Алгебра называется абелевой, если для любой полиномиальной операции $t(x, y_1, \ldots, y_n)$ и любых элементов u, v, $c_1, \ldots, c_n$, $d_1, \ldots, d_n$ алгебры из равенства $t(u, c_1, \ldots, c_n) = t(u, d_1, \ldots, d_n)$ следует равенство $t(v, c_1, \ldots, c_n) = t(v, d_1, \ldots, d_n)$. Алгебра называется гамильтоновой, если любая её подалгебра является классом некоторой конгруэнции алгебры. Нетрудно понять, что группа $\langle A; \cdot \rangle$ является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда она коммутативна, а гамильтоновой алгеброй тогда и только тогда, когда любая её подалгебра — нормальный делитель. Также несложно показать, что любой модуль или унарная алгебра абелевы и гамильтоновы. В [3] описываются абелевы группоиды $\langle A; \cdot \rangle$, для которых $|A \cdot A| \leqslant 3$. В [7, 8] даётся характеризация абелевых полугрупп, периодических абелевых полугрупп, полупростых абелевых полугрупп и рассматриваются вопросы, связанные с гамильтоновостью полугрупп.

2. Группоиды с единицей

В этом разделе рассматриваются группоиды с единицей, удовлетворяющие свойствам абелевости и гамильтоновости. Единицу группоида будем обозначать через 1.

Теорема 2.1. *Пусть $\langle A; \cdot \rangle$ — группоид с единицей. Группоид $\langle A; \cdot \rangle$ является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда $\langle A; \cdot \rangle$ — коммутативная полугруппа, такая что для любых $a, b \in A$ уравнение $a \cdot x = b$ имеет не более одного решения в $\langle A; \cdot \rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle A; \cdot \rangle$ — абелева алгебра. Покажем, что $\langle A; \cdot \rangle$ — полугруппа. Пусть $a, b, c \in A$. Поскольку $\langle A; \cdot \rangle$ — группоид с единицей, то $(1 \cdot b) \cdot (c \cdot 1) = (1 \cdot 1) \cdot (b \cdot c)$. Так как $\langle A; \cdot \rangle$ — абелева алгебра, то $(a \cdot b) \cdot (c \cdot 1) = (a \cdot 1) \cdot (b \cdot c)$. Следовательно, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, и закон ассоциативности в группоиде $\langle A; \cdot \rangle$ выполняется.

Покажем, что $\langle A; \cdot \rangle$ — коммутативная полугруппа. Пусть $a, b \in A$. Так как алгебра $\langle A; \cdot \rangle$ абелева, из равенства $1 \cdot 1 \cdot a = a \cdot 1 \cdot 1$ следует $1 \cdot b \cdot a = a \cdot b \cdot 1$. Таким образом, $a \cdot b = b \cdot a$, и закон коммутативности в полугруппе $\langle A; \cdot \rangle$ выполняется.

Покажем, что для любых $a, b \in A$ уравнение $a \cdot x = b$ имеет не более одного решения. Предположим, что $a \cdot c_1 = a \cdot c_2$ для некоторых $c_1, c_2 \in A$. Так как $\langle A; \cdot\rangle$ — абелева алгебра, то $1 \cdot c_1 = 1 \cdot c_2$. Следовательно, $c_1 = c_2$.

Докажем достаточность. Пусть $t(x, y_1, \ldots, y_n)$ — полиномиальная операция алгебры $\langle A; \cdot\rangle$. Так как $\langle A; \cdot\rangle$ — коммутативная полугруппа, то $t(x, y_1, \ldots, y_n) = x^k \cdot y_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{k_n}$ для некоторых $k, k_1, \ldots, k_n \in \omega$. Предположим, что $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c, e \in A$ и $c^k \cdot (a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}) = c^k \cdot (b_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot b_n^{k_n}) = e$. Поскольку уравнение $c^k \cdot x = e$ имеет единственное решение, то $a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n} = b_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot b_n^{k_n}$. Следовательно, $d^k \cdot (a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}) = d^k \cdot (b_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot b_n^{k_n})$ для любого $d \in A$. Таким образом, $\langle A; \cdot\rangle$ — абелева алгебра. □

Следствие 2.2. *Конечный группоид с единицей является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда это абелева группа.*

Следствие 2.3. *Конечный абелев группоид с единицей является гамильтоновой алгеброй.*

Лемма 2.4. *Если полугруппа $\langle A; \cdot\rangle$ является гамильтоновой алгеброй, то для любого $a \in A$ существуют i, j, $1 \leqslant i < j$, такие что $a^i = a^j$.*

Доказательство. Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — гамильтонова полугруппа и $a \in A$. Предположим, что $a^i \neq a^j$ для любых i, j, $i \neq j$. Пусть $B = \{a^2\} \cup \{a^k \mid k \geqslant 4\}$. Тогда $\langle B, \cdot\rangle$ — подполугруппа полугруппы $\langle A, \cdot\rangle$. Так как полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ гамильтонова, то существует конгруэнция Θ, для которой B является её классом. Из $a \,\Theta\, a$ и $a^2 \,\Theta\, a^4$ следует $a^3 \,\Theta\, a^5$, т. е. $a^3 \in B$. Противоречие. □

Теорема 2.5. *Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — абелев группоид с единицей. Группоид $\langle A; \cdot\rangle$ является гамильтоновой алгеброй тогда и только тогда, когда $\langle A; \cdot\rangle$ — периодическая абелева группа.*

Доказательство. Предположим, что $\langle A; \cdot\rangle$ — абелев гамильтонов группоид с единицей. По теореме 2.1 $\langle A; \cdot\rangle$ является полугруппой. Пусть $a \in A$. По лемме 2.4 существуют i, j, $1 \leqslant i < j$, такие что $a^i = a^j$, т. е. $1 \cdot a^i = a^{j-i} \cdot a^i$. Поскольку полугруппа $\langle A; \cdot\rangle$ является абелевой алгеброй, то $1 \cdot 1 = a^{j-i} \cdot 1$, т. е. $1 = a^{j-i}$. В частности, для любых $a, b \in A$ уравнение $ax = b$ имеет решение. Тогда по теореме 2.1 и лемме 2.4 $\langle A; \cdot\rangle$ является периодической абелевой группой.

Предположим, что $\langle A; \cdot\rangle$ — периодическая абелева группа. Тогда любой подгруппоид $\langle A; \cdot\rangle$ содержит единицу, т. е. является подгруппой, и любая её подгруппа является нормальным делителем, т. е. классом некоторой конгруэнции группоида $\langle A; \cdot\rangle$. □

3. Квазигруппы

Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — квазигруппа, $a \in A$. Введём следующие обозначения (см. [1]):

$$R_a(x) = x \cdot a, \quad L_a(x) = a \cdot x, \quad x + y = R_a^{-1}(x) \cdot L_a^{-1}(y).$$

Ясно, что $R_a(x)$ и $L_a(x)$ — перестановки множества A и $\langle A; +\rangle$ — квазигруппа.

Замечание 3.1 [1]. Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — квазигруппа, $a \in A$. Тогда

1) $\langle A; +\rangle$ — лупа с нейтральным элементом $0 = a \cdot a$;
2) равенства $r_a(x)+a = R_a^{-1}(x)$ и $l_a(x)+a = L_a^{-1}(x)$ определяют перестановки $r_a(x)$ и $l_a(x)$ множества A;
3) $x \cdot y = R_a(x) + L_a(y)$ для любых $x, y \in A$;
4) $R_a(a) = L_a(a) = 0$;
5) $R_a^{-1}(0) = L_a^{-1}(0) = a$.

Лемма 3.2. *Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — конечная квазигруппа, $a \in A$. Тогда функции $R_a^{-1}(x)$, $L_a^{-1}(x)$ и $x + y$ на множестве A определяются полиномиальными операциями алгебры $\langle A; \cdot\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — конечная квазигруппа и $a \in A$. Введём обозначение
$$g_a^k(x) = \big(\ldots\big((x \cdot a) \cdot a\big) \cdot \ldots\big) \cdot a,$$
где a встречается ровно k раз. Так как для любого $x \in A$ множество $\{g_a^0(x), g_a^1(x), \ldots, g_a^k(x), \ldots\}$ конечно, то существует $n > 0$ (не зависящее от x), такое что $g_a^n(x) = g_a^{n-1}(x) \cdot a = x$. Так как $R_a^{-1}(x) \cdot a = x$, то $g_a^{n-1}(x) = R_a^{-1}(x)$. Аналогично $h_a^{k-1}(y) = L_a^{-1}(y)$ для некоторой полиномиальной операции $h_a^{k-1}(y)$ алгебры $\langle A; \cdot\rangle$. Следовательно,
$$x + y = R_a^{-1}(x) \cdot L_a^{-1}(y) = g_a^{n-1}(x) \cdot h_a^{k-1}(y),$$
т. е. функция $x + y$ определяется полиномиальной операцией $g_a^{n-1}(x) \cdot h_a^{k-1}(y)$ алгебры $\langle A; \cdot\rangle$. □

Теорема 3.3. *Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — конечная квазигруппа, $a \in A$. Квазигруппа $\langle A; \cdot\rangle$ является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда*

1) *$\langle A; +\rangle$ — абелева группа;*
2) *перестановки $r_a(x)$ и $l_a(x)$ являются автоморфизмами $\langle A; +\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — конечная абелева квазигруппа и $a \in A$. По лемме 3.2 функции $R_a^{-1}(x)$, $L_a^{-1}(x)$ и $x+y$ на множестве A определяются полиномиальными операциями алгебры $\langle A; \cdot\rangle$. Следовательно, алгебра $\langle A; +\rangle$ абелева. По замечанию 3.1 $\langle A; +\rangle$ — лупа с нейтральным элементом 0. Тогда по теореме 2.1 $\langle A; +\rangle$ — абелева группа.

Покажем, что перестановка $r_a(x)$ является автоморфизмом абелевой группы $\langle A; +\rangle$. Для этого достаточно показать, что $r_a(x)$ — гомоморфизм этой группы. Пусть $b, c \in A$. В абелевой группе $\langle A; +\rangle$ имеет место равенство
$$R_a^{-1}(0 + c) + R_a^{-1}(0) = R_a^{-1}(0 + 0) + R_a^{-1}(c).$$
Так как алгебра $\langle A; \cdot\rangle$ абелева и функции $R_a^{-1}(x)$ и $x + y$ определяются полиномиальными операциями алгебры $\langle A; \cdot\rangle$, то
$$R_a^{-1}(b + c) + R_a^{-1}(0) = R_a^{-1}(b + 0) + R_a^{-1}(c).$$

По определению перестановки $r_a(x)$ и по замечанию 3.1

$$(r_a(b+c)+a)+a=(r_a(b)+a)+(r_a(c)+a), \quad r_a(b+c)=r_a(b)+r_a(c).$$

Аналогично показывается, что $l_a(x)$ — автоморфизм абелевой группы $\langle A;+\rangle$.

Докажем достаточность. Через R обозначим кольцо эндоморфизмов группы $\langle A;+\rangle$, порождённое автоморфизмами r_a^1 и l_a^1. Покажем, что для любой полиномиальной операции $f(x_0,\ldots,x_n)$ алгебры $\langle A;\cdot\rangle$ существуют $d\in A$ и $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in R$, такие что для любых $x_0,\ldots,x_n\in A$ выполняется соотношение

$$f(x_0,\ldots,x_n)=\alpha_0(x_0)+\ldots+\alpha_n(x_n)+d. \tag{1}$$

Проведём индукцию по сложности $f(x_0,\ldots,x_n)$. Если $f(x_0,\ldots,x_n)=x_0$, то данное соотношение очевидно. Пусть

$$f(x_0,\ldots,x_n)=g(x_0,\ldots,x_n)\cdot h(x_0,\ldots,x_n).$$

По предположению индукции

$$g(x_0,\ldots,x_n)=\beta_0(x_0)+\ldots+\beta_n(x_n)+b,$$
$$h(x_0,\ldots,x_n)=\gamma_0(x_0)+\ldots+\gamma_n(x_n)+c,$$

где $\beta_i,\gamma_i\in R$. Тогда, используя замечание 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
&f(x_0,\ldots,x_n)=g(x_0,\ldots,x_n)\cdot h(x_0,\ldots,x_n)=\\
&\quad=R_a\big(g(x_0,\ldots,x_n)\big)+L_a\big(h(x_0,\ldots,x_n)\big)=\\
&\quad=r_a^{-1}(g(x_0,\ldots,x_n)-a)+l_a^{-1}(h(x_0,\ldots,x_n)-a)=\\
&\quad=r_a^{-1}\big(g(x_1,\ldots,x_n)\big)-r_a^{-1}(a)+l_a^{-1}\big(h(x_0,\ldots,x_n)\big)-l_a^{-1}(a)=\\
&\quad=r_a^{-1}(\beta_0(x_0)+\ldots+\beta_n(x_n)+b)+l_a^{-1}(\gamma_0(x_0)+\ldots+\gamma_n(x_n)+c)+r=\\
&\quad=r_a^{-1}\big(\beta_0(x_0)\big)+\ldots+r_a^{-1}\big(\beta_n(x_n)\big)+l_a^{-1}\big(\gamma_0(x_0)\big)+\ldots+l_a^{-1}\big(\gamma_n(x_n)\big)+d=\\
&\quad=(r_a^{-1}\beta_0+l_a^{-1}\gamma_0)(x_0)+\ldots+(r_a^{-1}\beta_n+l_a^{-1}\gamma_n)(x_n)+d
\end{aligned}$$

для некоторых $r,d\in A$. Ясно, что $r_a^{-1}\beta_i+l_a^{-1}\gamma_i\in R$. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Покажем, что $\langle A;\cdot\rangle$ — абелева алгебра. Пусть $f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ — полиномиальная операция этой алгебры и

$$f(b,r_1,\ldots,r_n)=f(b,s_1,\ldots,s_n),$$

где $b,r_1,\ldots,r_n,s_1,\ldots,s_n\in A$. Пользуясь соотношением (1), получаем

$$\alpha_0(b)+\alpha_1(r_1)+\ldots+\alpha_n(r_n)+d=\alpha_0(b)+\alpha_1(s_1)+\ldots+\alpha_n(s_n)+d.$$

Тогда

$$\alpha_1(r_1)+\ldots+\alpha_n(r_n)+d=\alpha_1(s_1)+\ldots+\alpha_n(s_n)+d.$$

Следовательно,

$$\alpha_0(c)+\alpha_1(r_1)+\ldots+\alpha_n(r_n)+d=\alpha_0(c)+\alpha_1(s_1)+\ldots+\alpha_n(s_n)+d$$

для любого $c\in A$. Тем самым доказано, что $\langle A;\cdot\rangle$ — абелева алгебра. □

Следующее утверждение дает некоторое необходимое условие абелевости конечной квазигруппы, которое мы будем использовать при рассмотрении примеров в этом разделе.

Утверждение 3.4. *Если $\langle A; \cdot\rangle$ — конечная абелева квазигруппа, то существует такое $n \in \omega$, что либо $\{x \in A \mid x^2 = a\} = \varnothing$, либо $|\{x \in A \mid x^2 = a\}| = n$ для любого $a \in A$.*

Доказательство. Пусть элементы $a, b, a_i, b_j \in A$ таковы, что $a_i^2 = a$, $b_j^2 = b$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ и $n \geqslant m$. Зафиксируем $c \in A$. Так как $\langle A; \cdot\rangle$ — квазигруппа, то существуют такие различные $d_1, \ldots, d_n \in A$, что $a_i = c \cdot d_i$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда

$$(c \cdot d_i) \cdot (c \cdot d_i) = (c \cdot d_j) \cdot (c \cdot d_j)$$

для любых i, j, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Пусть $r \in A$ — такой элемент, что $b_1 = r \cdot d_1$. Из условия абелевости алгебры $\langle A; \cdot\rangle$ следует

$$(r \cdot d_1) \cdot (r \cdot d_1) = (r \cdot d_j) \cdot (r \cdot d_j),$$

т. е. $b = (r \cdot d_j)^2$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Поскольку элементы $rd_1, \ldots, rd_n$ различны, то $n \leqslant m$. Предложение доказано. □

Теорема 3.5. *Любая конечная абелева квазигруппа является гамильтоновой алгеброй.*

Доказательство. Пусть $\langle A; \cdot\rangle$ — конечная абелева квазигруппа, $\langle B; \cdot\rangle$ — её подалгебра и $a \in B$. По теореме 3.3 $\langle A; +\rangle$ — абелева группа с нейтральным элементом $0 = a \cdot a$. Ясно, что $0 \in B$. По лемме 3.2 функции $R_a^{-1}(x)$, $L_a^{-1}(x)$ и $x + y$ на множестве A определяются полиномиальными операциями алгебры $\langle A; \cdot\rangle$, причём из доказательства этой леммы следует, что эти операции зависят от единственного элемента множества A — элемента a. Следовательно, множество B замкнуто относительно операций $R_a^{-1}(x)$, $L_a^{-1}(x)$, $x+y$ и $\langle B; +\rangle$ — подгруппа группы $\langle A; +\rangle$.

Покажем, что $\langle B; \cdot\rangle$ — квазигруппа. Заметим, что уравнения $x \cdot a = c$ и $a \cdot x = c$, где $c \in B$, имеют решения $R_a^{-1}(c) \in B$ и $L_a^{-1}(c) \in B$ соответственно. Уравнение $x \cdot b = c$, где $b, c \in B$, равносильно уравнению $R_a(x) + L_a(b) = c$, т. е. $x \cdot a + a \cdot b = c$. В группе $\langle B; +\rangle$ существует такой элемент d, что $d + a \cdot b = c$. Уравнение $x \cdot a = d$ разрешимо в $\langle B; \cdot\rangle$. Следовательно, и уравнение $x \cdot b = c$ разрешимо в $\langle B; \cdot\rangle$. Аналогично уравнение $b \cdot x = c$ разрешимо в $\langle B; \cdot\rangle$, т. е. $\langle B; \cdot\rangle$ — квазигруппа.

Покажем, что разбиение группы $\langle A; +\rangle$ на классы смежности по подгруппе $\langle B; +\rangle$ определяет конгруэнцию квазигруппы $\langle A; \cdot\rangle$. Предположим, что $b \in B$ и $c \in A$. Существует такой элемент $d \in B$, что $b = a \cdot d$. Тогда $(c \cdot a) + b = (c \cdot a) + (a \cdot d) = c \cdot d \in c \cdot B$. Кроме того, $c \cdot b = (c \cdot a) + (a \cdot b) \in (c \cdot a) + B$. Следовательно, $c \cdot B = (c \cdot a) + B$. Аналогично $B \cdot c = (a \cdot c) + B$. Тогда для любого $c \in A$ существует такой элемент $d \in A$, что $c \cdot B = B \cdot d$. По теореме 3.3 перестановки $r_a(x)$ и $l_a(x)$ являются автоморфизмами группы $\langle A; +\rangle$.

Из замкнутости B относительно операций $R_a^{-1}(x)$, $L_a^{-1}(x)$ и определения перестановок $r_a(x)$ и $l_a(x)$ получаем, что $r_a(B) = B$ и $l_a(B) = B$. Следовательно, равенство $(c \cdot a) + B = (d \cdot a) + B$ эквивалентно равенствам $r_a(c \cdot a) + B = r_a(d \cdot a) + B$, $(c - a) + B = (d - a) + B$ и $c + B = d + B$. Аналогично равенство $(a \cdot c) + B = (a \cdot d) + B$ эквивалентно равенству $c + B = d + B$. Пусть $c + B = d + B$ и $c' + B = d' + B$. Тогда $(c \cdot a) + B = (d \cdot a) + B$ и $(a \cdot c') + B = (a \cdot d') + B$. Следовательно, $\big((c \cdot a) + (a \cdot c')\big) + B = \big((d \cdot a) + (a \cdot d')\big) + B$, т. е. $(c \cdot c') + B = (d \cdot d') + B$. Таким образом, разбиение группы $\langle A; + \rangle$ на классы смежности по подгруппе $\langle B; + \rangle$ определяет конгруэнцию квазигруппы $\langle A; \cdot \rangle$, и $\langle A; \cdot \rangle$ — гамильтонова алгебра. □

Следующий пример показывает, что условие 2) теоремы 3.3 является существенным. Пусть квазигруппа $\langle Q; \cdot \rangle$ задаётся таблицей Кэли

$\cdot$	0	1	2	3
0	1	3	2	0
1	2	0	3	1
2	0	2	1	3
3	3	1	0	2

.

Построим лупу $\langle Q; + \rangle$ выбрав в качестве a элемент $1 \in Q$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.

Тогда $\langle Q; + \rangle$ совпадает с группой вычетов по модулю 4, т. е. является абелевой группой, при этом перестановка $r_1(x)$ не является автоморфизмом этой группы: $r_1(1) = R_1^{-1}(1) - 1 = 3 - 1 = 2$, $r_1(1) + r_1(1) = 0$, $r_1(1 + 1) = r_1(2) = R_1^{-1}(2) - 1 = 2 - 1 = 1$. По предложению 3.4 квазигруппа $\langle Q; \cdot \rangle$ не является абелевой. Заметим, что квазигруппа $\langle Q; \cdot \rangle$ также не является гамильтоновой. Действительно, $\langle \{0, 1\}; \cdot \rangle$ — подалгебра $\langle Q; \cdot \rangle$, $2 \cdot \{0, 1\} = \{0, 2\}$, поэтому подалгебра $\langle \{0, 1\}; \cdot \rangle$ не является классом конгруэнции квазигруппы $\langle Q; \cdot \rangle$.

Группоид

$\cdot$	0	1	2	3
0	1	0	3	2
1	2	1	0	3
2	0	3	2	1
3	3	2	1	0

является примером неабелевой (в силу предложения 3.4) гамильтоновой (поскольку не обладает неодноэлементными собственными подалгебрами) квазигруппы.

4. Полугруппы

В этом разделе изучаются абелевы и гамильтоновы полугруппы. На протяжении всего раздела в выражениях вида $a \cdot b$, где a и b — элементы полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$, знак операции $\cdot$, как правило, будет опускаться.

Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется стационарной [2], если равенство $ub = uc$ влечёт $vb = vc$ и равенство $bu = cu$ влечёт $bv = cv$ для любых $u, v, b, c \in A$.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения абелевой алгебры.

Утверждение 4.1. *Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ абелева тогда и только тогда, когда полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ стационарна и для любых $a, b, c, d, u, v \in A$ равенство $aub = cud$ влечёт $avb = cvd$.*

В [7] приводится характеризация абелевых полугрупп. В случае когда полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ удовлетворяет условию

$$\text{для любых } b, c \in A \quad \text{или } bcA = bA \text{ и } Abc = Ac, \text{ или множество } A \cdot A \text{ конечно,} \tag{$*$}$$

можно дать более наглядное описание строения абелевых полугрупп.

Следующие определения можно найти в [2]. Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется прямоугольной связкой полугрупп, если существует семейство $\{A_{i\lambda} \mid i \in I,\ \lambda \in \Lambda\}$, являющееся разбиением множества A, причём $\langle A_{i\lambda}, \cdot \rangle$ — подполугруппы полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ и для любых $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ выполняется включение $A_{i\lambda} \cdot A_{j\mu} \subseteq A_{i\mu}$. Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется раздуванием полугруппы $\langle B, \cdot \rangle$, если существует разбиение $\{X_a \mid a \in B\}$ множества A, такое что $a \in X_a$ и $x \cdot y = a \cdot b$ для любых $a, b \in B$, $x \in X_a$, $y \in X_b$.

Определим отношение эквивалентности на множестве A:

$$a \;\alpha\; b \iff \forall x \in A \ (ax = bx \text{ и } xa = xb)$$

для любых $a, b \in A$.

Замечание 4.2. Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является раздуванием полугруппы $\langle B, \cdot \rangle$ тогда и только тогда, когда для любого $a \in A$ существует такой элемент $b \in B$, что $a \;\alpha\; b$.

Лемма 4.3. *Если полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является раздуванием прямоугольной связки $\langle T, \cdot \rangle$ абелевых групп, то $T = A \cdot A$.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — раздувание прямоугольной связки T абелевых групп. Ясно, что $T \subseteq A \cdot A$. Если $a_1 \cdot a_2 \in A \cdot A$, то по определению раздувания полугруппы существуют такие элементы $x, y \in T$, что $x \;\alpha\; a_1$ и $y \;\alpha\; a_2$, т.е. $a_1 \cdot a_2 = x \cdot y \in T$ и $A \cdot A \subseteq T$. $\square$

Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — полугруппа. Введём следующие отношения на множестве A:

$$x \;\Phi\; y \iff \exists z \ (xz = yz),$$
$$x \;\Psi\; y \iff \exists z \ (zx = zy),$$

$$x\ X\ y \iff \exists z\ (zx = x \wedge zy = y \wedge z^2 = z),$$
$$x\ Y\ y \iff \exists z\ (xz = x \wedge yz = y \wedge z^2 = z),$$
$$x\ Z\ y \iff x\ X\ y \wedge x\ Y\ y.$$

Замечание 4.4. Если полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ абелева, то

$$x\ \Phi\ y \iff \forall z\ (xz = yz), \quad x\ \Psi\ y \iff \forall z\ (zx = zy),$$

и отношения Φ и Ψ являются отношениями эквивалентности на множестве A.

Если Θ — отношение эквивалентности на A и $a \in A{\cdot}A$, то через Θ_a обозначим множество $(a/\Theta) \cap (A \cdot A)$, где a/Θ — класс эквивалентности Θ с представителем a.

Лемма 4.5. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — абелева полугруппа. Тогда для любого идемпотента $f \in A$ и любых $x, y \in A$ выполняется равенство $xy = xfy$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in A$, $f \in A$ — идемпотент. Тогда $xf = xff$. Так как полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ абелева, имеем $xy = xfy$. □

Лемма 4.6. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — абелева полугруппа, удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда*

1) *отношения X и Y являются отношениями эквивалентности на $A \cdot A$;*
2) *для любых идемпотентов $e, f \in A$ имеет место равенство $\Phi_e \cap \Psi_f = \{ef\}$, причём ef — идемпотент;*
3) *для любого $a \in A{\cdot}A$ найдутся такие идемпотенты $e, f \in A$, что $a \in X_e \cap Y_f$, причём $X_e \cap Y_f = Z_{ef}$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Покажем, что отношение X является отношением эквивалентности на $A \cdot A$. Докажем рефлексивность отношения X. Пусть $a = bc$ — произвольный элемент $A \cdot A$. По условию $(*)$ $Ac = Aa$. Из $a \in Ac$ следует, что $a \in Aa$, т. е. $a = da$ для некоторого $d \in A$. Пусть $e = dd$. Тогда $ea = dda = da = a$. Так как $ddda = da$, то $(ddd)\ \Phi\ d$. Тогда $e^2 = dddd = dd = e$. Следовательно, $a\ X\ a$ для любого элемента $a \in A \cdot A$.

Докажем транзитивность отношения X. Пусть $a\ X\ b$ и $b\ X\ c$, где $a, b, c \in A \cdot A$, т. е. $ea = a$, $eb = b$, $fb = b$, $fc = c$ для некоторых идемпотентов $e, f \in A$. Так как полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ абелева, из равенства $eb = fb$ следует $ea = fa = a$. Следовательно, $a\ X\ c$. Таким образом, отношение X является отношением эквивалентности на $A{\cdot}A$. Аналогично доказывается, что отношение Y также является отношением эквивалентности на $A \cdot A$.

Докажем утверждение 2). Пусть e, f — идемпотенты. Так как $eff = ef$ и $eef = ef$, то $(ef)\ \Phi\ e$ и $(ef)\ \Psi\ f$, т. е. $ef \in \Phi_e \cap \Psi_f$. Пусть $g \in \Phi_e \cap \Psi_f$, $g = bc$, $b, c \in A$. Так как $ge = ee$, то $bcb(ce) = b(ce)$, т. е. $(bcb)\ \Phi\ b$. Следовательно, $bcbc = bc$, т. е. $g^2 = g$, в частности, ef — идемпотент. Если $g, g' \in \Phi_e \cap \Psi_f$, то, поскольку g, g' — идемпотенты, $g = gg = gg' = g'g' = g'$. Таким образом, $\Phi_e \cap \Psi_f = \{ef\}$.

Докажем утверждение 3). Если $a \in A \cdot A$, то в силу рефлексивности отношения X существует идемпотент $e \in A$, такой что $a\ X\ e$. Аналогично существует идемпотент f, такой что aYf. Следовательно, $a \in X_e \cap Y_f$. По лемме 4.5 $a = ea = e(fa)$ и $a = af = (ae)f$. Так как ef — идемпотент, то $a \in Z_{ef}$. Равенство $X_e \cap Y_f = Z_{ef}$ доказано. □

Лемма 4.7. *Если $\langle A, \cdot\rangle$ — абелева полугруппа, удовлетворяющая условию $(*)$, то $\langle A \cdot A, \cdot\rangle$ — прямоугольная связка абелевых групп*

$$\{\langle Z_{ef}; \cdot\rangle \mid e,\ f \text{ — идемпотенты}\},$$

причём $Z_{ef'} = Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$ для любых идемпотентов $e, f, e', f' \in A$.

Доказательство. Отношение Z является отношением эквивалентности на $A \cdot A$ как пересечение двух отношений эквивалентности.

Пусть $a \in A \cdot A$. По лемме 4.6 существует такой идемпотент g, что $a \in Z_g$. Следовательно, полугруппа $\langle A \cdot A, \cdot\rangle$ есть объединение полугрупп $\langle Z_g, \cdot\rangle$, где g — идемпотент. Пусть $g \in A$ — произвольный идемпотент. Покажем, что $\langle Z_g, \cdot\rangle$ — абелева группа. Ясно, что $\langle Z_g, \cdot\rangle$ — полугруппа с единицей g. Покажем, что уравнение $ax = b$ имеет решение для любых $a, b \in Z_g$. По условию $(*)$ $Ag = Abg$. Тогда $g = xbg$ для некоторого $x \in A$. Поэтому $ag = axbg$ и $a = (ax)b$. Тогда по теореме 2.1 $\langle Z_g, \cdot\rangle$ — абелева группа.

Пусть e, f, e', f' — идемпотенты. По лемме 4.6 fe' — идемпотент, а по лемме 4.5 имеет место равенство $efe'f' = ef'$. Покажем, что $Z_{ef} \cdot Z_{e'f'} = Z_{ef'}$. Если $a \in Z_{ef}$, $b \in Z_{e'f'}$, то по леммам 4.5 и 4.6 $ab = abe'f' = abee'f' = abef'$ и $ab = efab = eff'ab = ef'ab$, т. е. $ab \in Z_{ef'}$ и $Z_{ef} \cdot Z_{e'f'} \subseteq Z_{ef'}$. Если $c \in Z_{ef'}$, то по леммам 4.5 и 4.6 $c = ef'cef' = (eff'cef)e'f'$, т. е. $c \in Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$ и $Z_{ef'} \subseteq Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$. Таким образом, полугруппа $\langle A \cdot A, \cdot\rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп $\{\langle Z_{ef}; \cdot\rangle \mid e,\ f \text{ — идемпотенты}\}$. □

Теорема 4.8. *Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — полугруппа, удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда $\langle A, \cdot\rangle$ является абелевой алгеброй в том и только в том случае, когда $\langle A, \cdot\rangle$ — раздувание прямоугольной связки абелевых групп и произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — абелева полугруппа, удовлетворяющая условию $(*)$. По лемме 4.6 произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A. По лемме 4.7 полугруппа $\langle A \cdot A, \cdot\rangle$ — прямоугольная связка абелевых групп $\{\langle Z_{ef}; \cdot\rangle \mid e,\ f \text{ — идемпотенты}\}$, причём $Z_{ef'} = Z_{ef} \cdot Z_{e'f'}$ для любых идемпотентов $e, f, e', f' \in A$.

Покажем, что $\langle A, \cdot\rangle$ — раздувание прямоугольной связки абелевых групп. Зафиксируем произвольный элемент $t \in A$, не принадлежащий множеству $A \cdot A$. По замечанию 4.2 достаточно найти такой идемпотент g, что элемент $gtg \in A$ является представителем класса эквивалентности t/α. Пусть e и f — произвольные идемпотенты, $(te)(ft) \in Z_g$, где g — идемпотент, а следовательно, единица группы $\{\langle Z_g; \cdot\rangle$. По лемме 4.5 $(te)(ft) = (te')(f't)$ для любых идемпотентов e', f', поэтому g не зависит от выбора идемпотентов e и f.

Докажем, что $(gtg)\ \alpha\ t$. Так как $(te)(ft) \in Z_g$, то $gt(eft) = t(eft)$. Так как полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ абелева, $gtg = tg$. Аналогично $gtg = gt$. Тогда для любого

$x \in A \cdot A$, используя лемму 4.5, получаем $xt = xgt = xgtg$ и $tx = tgx = gtgx$, т. е. $(gtg)\,\alpha\, t$, и $\langle A;\cdot\rangle$ — раздувание полугруппы $\langle A\cdot A;\cdot\rangle$.

Докажем достаточность. По лемме 4.3 $\langle A,\cdot\rangle$ — раздувание полугруппы $\langle A\cdot A;\cdot\rangle$, являющейся по условию прямоугольной связкой абелевых групп $Z_{i\lambda}$ с единицами $e_{i\lambda}$, причём $e_{i\lambda}\cdot e_{j\mu} = e_{i\mu}$ для любых $i,j\in I$ и $\lambda,\mu\in\Lambda$. Покажем, что $\langle A;\cdot\rangle$ — абелева алгебра. Пусть $x,y,a_k,b_k\in A$ ($k\in\{1,2\}$) и $a_1xb_1 = a_2xb_2$. Покажем, что $a_1yb_1 = a_2yb_2$. По определению раздувания полугруппы существуют такие $x'\in Z_{j\mu}$, $y'\in Z_{l\nu}$, $a'_k\in Z_{i\lambda_k}$, $b'_k\in Z_{i_k\lambda}$ ($k\in\{1,2\}$), что $x\,\alpha\,x'$, $y\,\alpha\,y'$, $a_k\,\alpha\,a'_k$, $b_k\,\alpha\,b'_k$. Тогда $a'_1x'b'_1 = a'_2x'b'_2$. Для любого $k\in\{1,2\}$

$$\begin{aligned}a'_kx'b'_k &= (a'_ke_{i\lambda_k})x'(e_{i_k\lambda}b'_k) = a'_k(e_{i\lambda}e_{i\lambda_k})x'(e_{i_k\lambda}e_{i\lambda})b'_k = \\ &= (a'_ke_{i\lambda})(e_{i\lambda_k}x'e_{i_k\lambda})(e_{i\lambda}b'_k) = (a'_ke_{i\lambda})(e_{i\lambda_k}e_{j\mu}x'e_{j\mu}e_{i_k\lambda})(e_{i\lambda}b'_k) = \\ &= (a'_ke_{i\lambda})(e_{i\mu}x'e_{j\lambda})(e_{i\lambda}b'_k) = a''_kx''b''_k,\end{aligned}$$

где $a''_k = a'_ke_{i\lambda}$, $x'' = e_{i\mu}x'e_{j\lambda}$, $b''_k = e_{i\lambda}b'_k$ и $a''_k, x'', b''_k \in Z_{i\lambda}$. Следовательно, $a''_1x''b''_1 = a''_2x''b''_2$. Аналогично $a'_ky'b'_k = a''_ky''b''_k$, где $y'' = e_{i\nu}y'e_{l\lambda}\in Z_{i\lambda}$. Так как $\langle Z_{i\lambda};\cdot\rangle$ — абелева группа, то $a''_1y''b''_1 = a''_2y''b''_2$, т. е. $a'y'b' = c'y'd'$. Тогда $ayb = cyd$. Аналогично доказывается стационарность полугруппы $\langle A;\cdot\rangle$. Следовательно, по теореме 2.1 полугруппа $\langle A;\cdot\rangle$ абелева. □

Заметим, что условие $(*)$ используется только при доказательстве необходимости в теореме 4.8.

Следующий пример показывает, что в теореме 4.8 нельзя опустить условие, что произведение идемпотентов является идемпотентом. Рассмотрим множество $A = \bigcup\{Z_{i\lambda} \mid i\in\{0,1\},\ \lambda\in\{0,1\}\}$, где $\langle Z_{i\lambda};+\rangle$ — копии группы вычетов $\langle \mathcal{Z}_2;+\rangle$ по модулю 2, $\mathcal{Z}_2 = \{\bar 0,\bar 1\}$, $\bar 0_{i\lambda}$ — копии элемента $\bar 0$ в $Z_{i\lambda}$, $\bar 1_{i\lambda}$ — копии элемента $\bar 1$ в $Z_{i\lambda}$ ($i\in\{0,1\}$, $\lambda\in\{0,1\}$). Доопределим операцию $+$ на множестве A следующим образом:

$$\bar\varepsilon_{i\lambda} + \bar\delta_{j\mu} = \begin{cases}\bar\varepsilon_{i\mu} + \bar\delta_{i\mu}, & \text{если } i=j \text{ или } \lambda=\mu,\\ \bar\varepsilon_{i\mu}+\bar\delta_{i\mu}+\bar 1_{i\mu} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Полугруппа $\langle A;+\rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп, причём сумма идемпотентов не является идемпотентом: например, $\bar 0_{00} + \bar 0_{11} = \bar 1_{01}$. Полученная полугруппа не является абелевой, так как $\bar 0_{10} + \bar 1_{01} = \bar 1_{11} + \bar 1_{01}$ и $\bar 0_{10} + \bar 1_{11} \neq \bar 1_{11} + \bar 1_{11}$.

В [8] доказано, что полупростая полугруппа $\langle A,\cdot\rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда $\langle A,\cdot\rangle \cong \langle H,\cdot\rangle\times\langle I,\cdot\rangle\times\langle J,\cdot\rangle$, где $\langle H,\cdot\rangle$ — абелева группа, $\langle I,\cdot\rangle$ — полугруппа левых нулей, $\langle J,\cdot\rangle$ — полугруппа правых нулей. Нетрудно доказать следующее замечание.

Замечание 4.9. Полугруппа $\langle A,\cdot\rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп, причём произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A тогда и только тогда, когда $\langle A,\cdot\rangle \cong \langle H,\cdot\rangle\times\langle I,\cdot\rangle\times\langle J,\cdot\rangle$, где $\langle H,\cdot\rangle$ — абелева группа, $\langle I,\cdot\rangle$ — полугруппа левых нулей, $\langle J,\cdot\rangle$ — полугруппа правых нулей.

Тогда по теореме 4.8 и замечанию 4.9 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.10. *Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — полугруппа, удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда $\langle A, \cdot\rangle$ является абелевой алгеброй в том и только в том случае, когда $\langle A, \cdot\rangle$ — раздувание полупростой абелевой полугруппы.*

Следующее утверждение дает достаточное условие гамильтоновости полугруппы.

Утверждение 4.11. *Если полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ является раздуванием прямоугольной связки периодических абелевых групп и произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A, то $\langle A, \cdot\rangle$ — гамильтонова алгебра.*

Доказательство. Пусть полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ — раздувание $\langle C, \cdot\rangle$, где $\langle C, \cdot\rangle$ — прямоугольная связка периодических абелевых групп. Предположим, что $\langle B, \cdot\rangle$ — подполугруппа $\langle A, \cdot\rangle$. По замечанию 4.9 и [8, предложение 4.6] $\langle C, \cdot\rangle$ — гамильтонова полугруппа. Следовательно, существует конгруэнция Θ_1 на $\langle C, \cdot\rangle$ с классом эквивалентности $B \cap C$. Обозначим через Θ наименьшее отношение эквивалентности на $\langle A, \cdot\rangle$, содержащее Θ_1 и $\{(a, b) \in A \times A \mid a \ \alpha \ b\}$. Заметим, что если $b' \in B$, $b' \ \alpha \ b$ и $b \in C$, то $b \in B$. Действительно, поскольку все элементы полугруппы $\langle C, \cdot\rangle$ имеют конечный порядок, то $(b')^k = b^k = e$ для некоторого $k \geqslant 1$, где e — единица группы, содержащей b. Тогда $b = eb = (b')^k b = (b')^{k+1} \in B$. Отсюда следует, что Θ — отношение конгруэнции на $\langle A, \cdot\rangle$ с классом конгруэнции B. □

Теорема 4.12. *Абелева полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ является гамильтоновой алгеброй тогда и только тогда, когда $\langle A, \cdot\rangle$ — раздувание прямоугольной связки периодических абелевых групп и произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A.*

Доказательство. Достаточность следует из утверждения 4.11. Докажем необходимость. Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — гамильтонова и абелева полугруппа и $a, b \in A$. Покажем, что $aA \subseteq abA$. По лемме 2.4 существуют i, j, $1 \leqslant i < j$, такие что $b^i = b^j$. Тогда $a(b^i c) = a(b^j c)$. Отсюда следует, что $a(b^i c) = ab^{j-i}(b^i c)$. Так как алгебра $\langle A, \cdot\rangle$ абелева, то $ac = ab^{j-i}c$, т. е. $ac \in abA$, и включение $aA \subseteq abA$ доказано. Следовательно, полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ удовлетворяет условию $(*)$. По теореме 4.8 полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ — раздувание прямоугольной связки абелевых групп, являющихся по лемме 2.4 периодическими, причём произведение идемпотентов из A является идемпотентом из A. □

Литература

[1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.

[2] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972.

[3] Овчинникова Е. В. Об абелевых группоидах с образами малой мощности // Алгебра и теория моделей. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.

[4] Хобби Д., Маккензи Р. Строение конечных алгебр. — М.: Мир, 1993.

[5] Kiss E. W. and Valeriote M. A. Strongly Abelian varieties and the Hamiltonian property // Can. J. Math. — 1991. — Vol. 43, no. 2. — P. 1—16.

[6] Kiss E. W. and Valeriote M. A. Abelian algebras and the Hamiltonian property // J. Pure Appl. Algebra. — 1993. — Vol. 87, no. 1. — P. 37—49.

[7] Warne R. J. Semigroups obeying the term condition // Algebra Universalis. — 1994. — Vol. 31, no. 1. — P. 113—123.

[8] Warne R. J. TC semigroups and inflations // Semigroup Forum. — 1997. — Vol. 54, no. 1. — P. 271—277.