Гиперграфы простых моделей и распределения счётных моделей малых теорий*

С. В. СУДОПЛАТОВ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru, sudoplat@ngs.ru

УДК 510.67

Ключевые слова: гиперграф простых моделей, малая теория, бинарная структура, предпорядок Рудина—Кейслера, предельная модель.

Аннотация

Определяются гиперграфы простых моделей над реализациями типов малых теорий. На основе графовых структур моделей малых теорий устанавливаются иерархии множеств в этих гиперграфах, раскрывающие структурные связи в счётных моделях малых теорий. Обосновывается ключевая роль теоретико-графовых конструкций в построении эренфойхтовых теорий. На основе гиперграфовых конструкций классификация элементарных полных теорий с конечными предпорядками Рудина—Кейслера обобщается на класс всех малых теорий.

Abstract

S. V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 179—203.

Hypergraphs of prime models over realizations of types in small theories are defined. On the basis of graph structures of models of small theories, hierarchies of sets in these hypergraphs, revealing structural connections in countable models of small theories, are established. The key role of graph-theoretic objects in constructions of Ehrenfeucht theories is proved. Using hypergraph constructions, a classification of complete first-order theories with finite Rudin—Keisler preorders is generalized to the class of all small theories.

Посвящается памяти профессора
Юрия Евгеньевича Шишмарёва

В [5, 8] показано, что все возможности структур счётных моделей малых теорий с конечными предпорядками Рудина—Кейслера описываются на языке простых моделей над реализациями типов этих теорий. С другой стороны, в [4]

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а, а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-344.2008.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 179—203.
© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

установлено, что в отдельных случаях взаимосвязь структур простых моделей, представленная в виде гиперграфов, позволяет описывать спектр и структуры всех моделей данной теории. По существу, гиперграфовые интерпретации заложены в структурное описание несчётно категоричных теорий [11].

В настоящей работе мы рассмотрим семейство гиперграфов простых моделей произвольной малой теории и представим механизм структурного описания моделей теории по этим семействам. Тем самым обосновывается, в частности, ключевая роль теоретико-графовых конструкций в построении примеров эренфойхтовых теорий (см. [6]).

На основе гиперграфового подхода мы дадим описание возможностей для распределения числа предельных (не обязательно над фиксированными типами) моделей малых теорий и тем самым представим структурные возможности для числа счётных моделей малых теорий. На основе техники генерических конструкций, разработанной в [6, 8, 9], в предположении континуум-гипотезы устанавливаются реализации всех возможностей распределения числа счётных моделей малых теорий относительно предпорядков Рудина—Кейслера и функций распределения числа предельных моделей. Ограничение на предположение континуум-гипотезы связано с открытой проблемой Воота о существовании теории, имеющей несчётное неконтинуальное число попарно неизоморфных счётных моделей.

В работе без пояснений будет использоваться стандартная теоретико-модельная терминология [3, 17], аппарат теории графов [10], а также понятия и обозначения из [5, 6, 8].

Построения первых трёх разделов будут проводиться преимущественно на основе моделей $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, которые, как показано, например, в [19], во многих случаях позволяют свести достаточно общую структурную ситуацию к классам известных объектов.

Через $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$, возможно с индексами, будут обозначаться модели элементарных теорий, через $M, N, \ldots$ — носители этих моделей. Простые модели над кортежами $\bar{a}$ будут обозначаться через $\mathcal{M}_{\bar{a}}$.

1. Гиперграфы простых моделей

Напомним, что *гиперграфом* называется любая пара множеств (X, Y), где Y — некоторое подмножество булеана $\mathcal{P}(X)$ множества X.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель *малой* теории T. Обозначим через $\bar{H}(\mathcal{M})$ совокупность всех подмножеств носителя M системы $\mathcal{M}$, которые являются носителями простых над некоторыми кортежами $\bar{a} \in M$ элементарных подмоделей $\mathcal{M}_{\bar{a}}$ модели $\mathcal{M}$:

$$\bar{H}(\mathcal{M}) = \{M_{\bar{a}} \mid \mathcal{M}_{\bar{a}} \text{ — простая над некоторым кортежем } \bar{a} \in M \text{ элементарная подмодель модели } \mathcal{M}\}.$$

Пара $\big(M, \bar{H}(\mathcal{M})\big)$ называется *гиперграфом всех простых подмоделей* модели $\mathcal{M}$.

Очевидно, что принадлежность кортежа $\bar{b}$ простой модели $\mathcal{M}_{\bar{a}} \in \bar{H}(\mathcal{M})$ равносильна существованию элементарной подмодели $\mathcal{M}_{\bar{b}} \in \bar{H}(\mathcal{M})$ модели $\mathcal{M}_{\bar{a}}$. Тем самым отношение включения на множестве $\bar{H}(\mathcal{M})$ задаёт отношение, состоящее из всех пар кортежей $(\bar{a}, \bar{b})$ на множестве M, для которых типы $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ являются главными.

Примеры.

1. Для бесконечной модели $\mathcal{M}$ пустой сигнатуры гиперграф $\big(M, \bar{H}(\mathcal{M})\big)$ включает все счётные подмножества множества M.
2. Для модели $\mathcal{M}$ плотного линейного порядка без концевых элементов гиперграф $\big(M, \bar{H}(\mathcal{M})\big)$ состоит из всевозможных носителей счётных плотных линейно упорядоченных подмножеств без концевых элементов.
3. Модель $\mathcal{M}$ теории Эренфойхта с тремя счётными моделями, построенная на плотном линейно упорядоченном множестве без концевых элементов с добавлением констант c_k, $k \in \omega$, таких что $c_k < c_{k+1}$, порождает гиперграф $\big(M, \bar{H}(\mathcal{M})\big)$, состоящий из всевозможных носителей счётных плотных линейно упорядоченных подмножеств без концевых элементов, каждый из которых включает плотные линейные порядки на каждом из интервалов $(-\infty; c_0)$, $(c_k; c_{k+1})$, $k \in \omega$.
4. Для модели $\mathcal{M}$ линейного пространства над некоторым полем гиперграф $\big(M, \bar{H}(\mathcal{M})\big)$ строится из всевозможных конечномерных или счётномерных подпространств.

Поскольку операция $(\cdot)^{\mathrm{eq}}$ сохраняет малость теории и естественным образом расширяет простые модели над кортежами до простых моделей над элементами, в дальнейшем для удобства изложения вместо моделей $\mathcal{M}$ часто будут рассматриваться модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, а в гиперграфы простых моделей будут включаться лишь носители простых моделей над элементами (а не кортежами) модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Рассматриваемое множество носителей простых моделей будет обозначаться через $H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$.

Отметим, что приводимые ниже понятия и рассуждения также имеют смысл для моделей, в которых каждая простая над некоторым кортежем элементарная подмодель является простой над некоторым своим элементом. К таким моделям, например, относятся простые модели над $\varnothing$, а также модели теорий, у которых имеется неглавный 1-тип и все неглавные типы являются властными.

Покажем, что гиперграфы $\big(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})\big)$ счётных моделей $\mathcal{M}$ позволяют определять счётную категоричность данной теории T.

Действительно, простота модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ над некоторым элементом равносильна тому, что множество M^{eq} принадлежит $H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$. Поскольку любая счётная модель счётно категоричной теории проста, а любая не счётно категоричная малая теория имеет счётную насыщенную модель, которая не является простой ни над каким кортежем, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Теория T счётно категорична тогда и только тогда, когда для любой счётной модели $\mathcal{M} \models T$ выполняется $M^{\mathrm{eq}} \in H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$.*

Если исходная теория не является счётно категоричной, как показывают приведённые выше примеры, структуры $\big(M^{eq}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})\big)$ с классификационной точки зрения в общей ситуации мало информативны, поскольку классы эквивалентности по типам изоморфизма гиперграфов слишком широки относительно типов формульной взаимоопределимости данных структур и слабо учитывают специфику самих структур.

Вместе с тем в определённых ситуациях свойства гиперграфов $\big(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})\big)$ могут оказаться полезными. Например, наличие минимальных простых моделей отражается в гиперграфе в виде наличия минимальных множеств, а структуры с несимметричным отношением полуизолированности влекут существование в гиперграфах бесконечных $\subseteq$-цепей без концевых элементов. В подобных ситуациях представляется перспективной проблема изучения взаимосвязи классов структур и классов соответствующих гиперграфов.

Отметим следующее полезное свойство гиперграфов $\big(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})\big)$ для счётных моделей $\mathcal{M}$, которое вытекает из доказываемой в разделе 4 представимости любой счётной модели малой теории в виде объединения элементарной цепи простых моделей и тем самым выделяет все гиперграфы счётных моделей малых теорий среди всех возможных гиперграфов на счётных носителях.

Предложение 1.2. *Любое счётное множество M^{eq} представляется в виде счётного объединения $\subseteq$-цепи множеств из $H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$.*

2. НРКВ-гиперграфы и теорема о структуре типа

Для получения дополнительной классификационной информации о моделях данной теории T свяжем с гиперграфом $\big(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})\big)$ *ядерную* функцию

$$\ker_{\mathcal{M}} \colon H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}) \to \mathcal{P}(M^{\mathrm{eq}}),$$

действующую по правилу

$$\ker_{\mathcal{M}}(M_a) \rightleftharpoons \{b \in M_a \mid \mathcal{M}_b = \mathcal{M}_a\}.$$

Множество $\ker_{\mathcal{M}}(M_a)$ называется *ядром* модели $\mathcal{M}_a$ (относительно модели $\mathcal{M}$).

Предложение 2.1. *Ядро каждой элементарной подмодели $\mathcal{M}_a$ модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ состоит из всех элементов $b \in M_a$, связанных с элементом a некоторыми формулами $\varphi_b(x, y)$, для которых выполняется $\models \varphi_b(a, b)$ и формулы $\varphi_b(a, y)$, $\varphi_b(x, b)$ являются главными.*

Доказательство. Если указанной формулы $\varphi_b(x, y)$ не существует, то $\mathrm{tp}(a/b)$ — неглавный тип и равенство $\mathcal{M}_b = \mathcal{M}_a$ невозможно. Если же формула $\varphi_b(x, y)$ имеется, то рассмотрим произвольный кортеж $\bar{c}$ элементов из $\mathcal{M}_a$. По определению простой модели существует главная формула $\psi(a, y, \bar{z})$, для которой выполняется $\models \psi(a, b, \bar{c})$. Тогда формула $\varphi_b(x, b) \wedge \psi(x, b, \bar{z})$ является

главной и изолирует тип $\mathrm{tp}(a\hat{\ }\bar{c}/b)$. Тем самым в модели $\mathcal{M}_a$ реализуются лишь главные типы над b, и справедливо равенство $\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_b$. □

Из предложения 2.1 вытекает, что для любой счётной простой модели $\mathcal{M}$ над $\varnothing$ выполняется соотношение $\ker_{\mathcal{M}}(M^{\mathrm{eq}}) = M^{\mathrm{eq}}$. Тогда это же равенство справедливо для любой счётной модели счётно категоричной теории T. Более того, предложение 1.1 позволяет сформулировать следствие.

Следствие 2.2. *Теория T счётно категорична тогда и только тогда, когда для любой счётной модели $\mathcal{M} \models T$ ядро каждой элементарной подмодели $\mathcal{M}_a$ модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ совпадает с M_a.*

Рассмотрим теперь для модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ всевозможные формулы $\varphi(x, y)$, для которых $\vdash \varphi(x, y) \to \neg(x \approx y)$ и найдутся такие элементы $a \in M^{\mathrm{eq}}$, что формулы $\varphi(a, y)$ являются главными. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x, y)$ двухместное отношение

$$R_\varphi \rightleftharpoons \{(a, b) \mid \mathcal{M}^{\mathrm{eq}} \models \varphi(a, b)\}.$$

Если $(a, b) \in R_\varphi$, пару (a, b) будем называть *φ-дугой*. Если $\varphi(a, y)$ — главная формула, то φ-дуга (a, b) называется *главной*. Если, кроме того, $\varphi(x, b)$ является главной формулой, то множество

$$[a, b] \rightleftharpoons \{(a, b), (b, a)\}$$

называется *главным φ-ребром*. Будем называть φ-дуги и φ-рёбра просто *дугами* и *рёбрами*, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь. Главные дуги (a, b), у которых пары (b, a) не являются главными дугами, будем называть *необращаемыми*.

Модель $\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}$ с носителем M^{eq} и всевозможными двухместными отношениями R_φ называется *главным графом* модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$.

Предложение 2.3. *Проекции всевозможных двухместных отношений R_φ определяют множества реализаций всех 1-типов теории T^{eq}, реализуемых в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$.*

Доказательство. Пусть $p(x)$ — произвольный 1-тип теории T^{eq}, реализуемый в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Из малости теории T вытекает наличие некоторой главной формулы $\varphi_0(y)$ этой теории. Следовательно, найдётся формула $\psi(x, y)$ и реализация a типа $p(x)$ в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, для которых формула $\psi(a, y)$ является главной и выполняется $\psi(a, y) \vdash \varphi_0(y)$. При этом в качестве $\psi(x, y)$ годится любая формула $\chi(x, y)$ вида $\psi(x, y) \wedge \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — произвольная формула типа $p(x)$. Тогда любая реализация совокупности X всех указанных формул $\exists\, y\ R_\psi(x, y)$ является реализацией типа $p(x)$. □

Таким образом, помимо *главной* бинарной структуры модель $\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}$ содержит структуру всех 1-типов, реализуемых в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$.

Напомним [10], что неорграф без петель называется *полным*, если любые две его различные вершины смежны.

Из предложения 2.1 вытекает, что ядро любой простой модели $\mathcal{M}_a$ со всевозможными главными рёбрами образует полный неорграф, а любая вершина $b \in M_a$, не принадлежащая $\ker_{\mathcal{M}}(M_a)$, является общим концом всевозможных главных дуг (c, b), где $c \in \ker_{\mathcal{M}}(M_a)$, и никакая из пар (b, c) не является главной дугой. В частности, для любой счётной модели $\mathcal{M}$ счётно категоричной теории ядро $\ker_{\mathcal{M}}(M^{\mathrm{eq}})$ образует полный граф на множестве M^{eq}, и это свойство представляет ещё одну характеризацию счётной категоричности.

При рассмотрении гиперграфа $\big(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})\big)$ с ядерной функцией $\ker_{\mathcal{M}}$ ядра $\ker_{\mathcal{M}}(M_a)$ простых моделей $\mathcal{M}_a$ над реализациями a фиксированного 1-типа $p(x)$ образуют максимальные связные графы на множестве M^{eq}. Эти графы соответствуют компонентам связности C неорграфов с раскрашенными рёбрами, образованных всевозможными главными рёбрами. Ограничения компонент C на множество реализаций типа $p(x)$ образуют графы с раскрашенными рёбрами, которые при условии насыщенности исходной модели $\mathcal{M}$ будем называть *ядерными неорграфами над типом* p. При этом по определению группы автоморфизмов ядерных неорграфов транзитивны, а теории этих неорграфов малы.

В силу теоремы компактности ядерный неорграф на множестве реализаций типа $p(x)$ в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, соответствующей насыщенной модели $\mathcal{M}$, единственен тогда и только тогда, когда структура ядерного неорграфа, ограниченного на $p(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$, имеет конечное число 2-типов и $p(x)$ — главный тип. В противном случае имеется бесконечное число таких ядерных неорграфов. Поскольку группа автоморфизмов структуры типа, получаемой из насыщенной модели, транзитивна, все ядерные неорграфы над типом $p(x)$ попарно изоморфны.

Среди известных ядерных неорграфов отметим следующие, играющие существенную роль при построении эренфойхтовых теорий:

1) полные α-элементные неорграфы (ядерные неорграфы получаются заменой каждого элемента в плотном линейном порядке без концевых элементов со счётной цепью констант на класс эквивалентности, содержащий α попарно несравнимых элементов [7]);
2) ациклические неорграфы со счётным числом цветов рёбер и с бесконечным числом рёбер каждого из цветов, инцидентных любой вершине [6];
3) неорграфы Хрушовского—Хервига [12].

Ядерные неорграфы, получаемые из примеров 1) и 2), являются полными, а насыщенные неорграфы Хрушовского—Хервига образуют ядерные неорграфы с бесконечным диаметром относительно объединения всех входящих в них бинарных отношений.

Рассмотрим теперь связи между ядерными неорграфами, осуществляемые с помощью необращаемых главных дуг. Эти связи уместно прослеживать с помощью следующего объекта, включающего определённые выше составляющие.

Для данной модели $\mathcal{M}$ *гиперграфом простых моделей с ядерной функцией и главной бинарной структурой* (или *НРКВ-гиперграфом*) будем называть

четвёрку

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \Big(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}), \ker_{\mathcal{M}}, \Sigma\big(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}\big)\Big),$$

где $\Sigma\big(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}\big)$ — совокупность всех двухместных отношений главного графа $\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}$.

Покажем, каким образом структуры НРКВ-гиперграфов $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ в целом и входящие в них необращаемые главные дуги в частности отражают структурные свойства данной теории T.

Прежде всего заметим, что из изоморфной вложимости модели $\mathcal{M}$ в модель $\mathcal{N}$ следует изоморфная вложимость НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ в НРКВ-гиперграф $\mathcal{H}(\mathcal{N})$. Отсюда, в частности, вытекает, что насыщенной (однородной, универсальной) модели $\mathcal{M}$ соответствует НРКВ-гиперграф $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ специального вида, который также можно рассматривать как *насыщенный* (*однородный*, *универсальный*) НРКВ-гиперграф среди всех НРКВ-гиперграфов моделей данной теории. Отношения полуизолированности на множествах реализаций типов (и их свойства) также преобразуются в отношения полуизолированности (и соответствующие свойства) на множествах реализаций 1-типов.

Покажем, что при наличии необращаемых дуг, связывающих реализации полного 1-типа $p(x)$, отношение полуизолированности SI_p несимметрично (как в исходной структуре, так и в соответствующем НРКВ-гиперграфе).

Действительно, пусть (a, b), где a и b — реализации типа p, — $\varphi(x, y)$-главная дуга, а пара (b, a) не является главной дугой. Предполагая, напротив, что SI_p симметрично, рассматриваемую формулу φ можно выбрать таким образом, что $\varphi(x, b) \vdash p(x)$. В силу малости теории некоторая пара (b, a'), где $\models \varphi(a', b)$, является главной дугой. Рассмотрим формулу $\psi(x, y)$, для которой $\models \psi(a', b)$ и $\psi(x, b)$ — главная формула. Переведём некоторым автоморфизмом f элемент a' в элемент a. Тогда элемент b перейдёт в некоторый элемент b' и выполнится $\models \varphi(a, b') \wedge \psi(a, b')$. Поскольку $\varphi(a, y)$ — главная формула, найдётся автоморфизм, фиксирующий a и переводящий b' в b. Следовательно, выполняется $\models \varphi(a, b) \wedge \psi(a, b)$ и пара (b, a) является главной дугой. Полученное противоречие означает, что отношение SI_p несимметрично, и это свойство гарантируется каждой необращаемой главной дугой (a, b) с концами на множестве реализаций типа $p(x)$. Кроме того, поскольку для любого главного типа отношение полуизолированности на множестве его реализаций симметрично, наличие необращаемой главной дуги (a, b) влечёт неизолированность типа $p(x)$.

Проведённое рассуждение показывает, что переходы с помощью необращаемых главных дуг от элементов к элементам на множестве реализаций типа p связывают различные ядерные неорграфы над типом p. Поскольку отношение полуизолированности транзитивно, эти переходы определяют отношение частичного порядка $\leqslant$ на множестве ядерных неорграфов над типом p, и каждый ядерный неорграф принадлежит бесконечной $\leqslant$-цепи.

Таким образом, справедлива следующая *p-декомпозиционная теорема*.

Теорема 2.4.

1. *Структура множества реализаций любого полного 1-типа $p(x)$ над $\varnothing$ в НРКВ-гиперграфе $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ составляется из попарно непересекающихся ядерных неорграфов над типом $p(x)$, а также из частичного порядка $\leqslant$ на множестве этих ядерных неорграфов, который определяется необратимыми главными дугами.*
2. *Ядерный неорграф на множестве реализаций типа $p(x)$ в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, соответствующей счётной насыщенной модели $\mathcal{M}$, является единственным, если структура ядерного неорграфа, ограниченного на $p(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$, имеет конечное число 2-типов и $p(x)$ — главный тип. Имеется бесконечное число таких ядерных неорграфов в противном случае. Все ядерные неорграфы над типом $p(x)$ попарно изоморфны.*
3. *Совпадение частичного порядка $\leqslant$ с тождественным отношением равносильно отсутствию необращаемых главных дуг, связывающих реализации типа $p(x)$, или, что то же самое, симметричности отношения полуизолированности SI_p. Если $\leqslant$ — нетождественный частичный порядок, то каждый ядерный неорграф принадлежит бесконечной $\leqslant$-цепи.*

Примеры указанных выше частичных порядков $\leqslant$ относительно необращаемых главных дуг извлекаются из следующих известных примеров структур с несимметричным отношением полуизолированности:

1) примеры Эренфойхта структур на плотных линейных порядках со счётным множеством констант, упорядоченных по возрастанию [21];
2) примеры М. Г. Перетятькина структур на бесконечно ветвящихся деревьях со счётным множеством констант, упорядоченных по возрастанию [1, 2];
3) структура свободной ориентированной псевдоплоскости с 1-несущественной упорядоченной раскраской [5];
4) генерические эренфойхтовы структуры [6].

3. Графовые связи между типами

Рассмотрим теперь графовые связи между структурами разных типов.

В силу того что всем n-типам, реализуемым в модели $\mathcal{M}$, соответствуют 1-типы, реализуемые в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ именами реализаций n-типов, предпорядок Рудина—Кейслера $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на множестве типов, реализуемых в модели $\mathcal{M}$, интерпретируется в виде предпорядка Рудина—Кейслера $\leqslant^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{RK}}$ на множестве 1-типов, реализуемых в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, который, в свою очередь, переносится на структуру НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Это, в частности, означает, что реализуемость в модели $\mathcal{M}$ властного типа (или, что эквивалентно, наличие в $\mathcal{M}$ наибольшего $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-класса для теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$) равносильна существованию властного 1-типа и его реализуемости в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, т. е. наличию наибольшего $(\leqslant^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{RK}} \cap \geqslant^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{RK}})$-класса для совокупности

1-типов, реализуемых в структуре $\left(M^{\mathrm{eq}}, \Sigma\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}\right)\right)$, а также универсальности НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Таким образом, справедлива следующая теорема, а также её непосредственное следствие.

Теорема 3.1. *Для любого предпорядка Рудина—Кейслера $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ на множестве типов некоторой малой теории существует универсальный НРКВ-гиперграф $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, в котором на множестве всех реализаций 1-типов интерпретируется множество с предпорядком $\leqslant_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}}$, изоморфное множеству с предпорядком $\leqslant_{\mathrm{RK}}$.*

Следствие 3.2. *Предпорядок $\leqslant_{\mathrm{RK}}$ теории T определяет наибольший $(\leqslant_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}} \cap \geqslant_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}})$-класс (непустое множество властных типов) тогда и только тогда, когда имеется наибольший $(\leqslant_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}} \cap \geqslant_{\mathrm{RK}}^{\mathrm{eq}})$-класс для совокупности 1-типов, реализуемых в структуре $\left(M^{\mathrm{eq}}, \Sigma\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}^{\mathrm{eq}}\right)\right)$, где $\mathcal{M}$ — универсальная модель теории T.*

Переходы между ядерными неорграфами 1-типов p и q по предпорядку Рудина—Кейслера осуществляются с помощью главных рёбер (при этом типы p и q взаимоподчиняются друг другу и модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ изоморфны) или необратимых главных дуг. Если элементы a и b ядерных неорграфов Γ_p и Γ_q над типами p и q соответственно связаны лишь необратимыми главными дугами (a, b), то модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ неизоморфны, а взаимоподчиняемость типов p и q равносильна существованию ядерного неорграфа Γ'_p над типом p, некоторый элемент c которого принадлежит главной дуге (b, c).

Следовательно, на множестве *главных компонент связности* C, т. е. компонент связности, образованных главными рёбрами, можно ввести частичный порядок $\leqslant$, который определяется необратимыми главными дугами. При этом, как и для цепей ядерных неорграфов, $\leqslant$-цепи главных компонент связности в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, соответствующей насыщенной модели $\mathcal{M}$, могут быть лишь одноэлементными (для счётно категоричной теории) или бесконечными.

Действительно, в силу теоремы компактности если имеются две главные компоненты связности, то их бесконечное число. С другой стороны, любое n-элементное множество A, составленное из элементов, принадлежащих n разным главным компонентам связности, принадлежит простой модели $\mathcal{M}_A$ над A. Следовательно, в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ есть элемент c (имя для кортежа всех элементов из A), который является началом n необращаемых главных дуг с концами из A. Таким образом, каждый элемент из $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ является концом некоторой необращаемой главной дуги, и с помощью этих дуг можно составить бесконечную $\leqslant$-цепь главных компонент связности. Более того, в силу существования указанных выше элементов c множество главных компонент связности с частичным порядком $\leqslant$ является направленным вниз.

Таким образом, справедлива следующая аналогичная теореме 2.4 *декомпозиционная теорема* о структуре, связывающей ядерные неорграфы над разными типами.

Теорема 3.3.

1. *Структура множества реализаций любого полного* 1*-типа* $p(x)$ *над* $\varnothing$ *в НРКВ-гиперграфе* $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ *составляется из попарно непересекающихся главных компонент связности, а также из частичного порядка* $\leqslant$ *на множестве главных компонент связности, который определяется необратимыми главными дугами.*
2. *Главная компонента связности в модели* $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$*, соответствующей счётной насыщенной модели* $\mathcal{M}$*, единственна, если структура* $\mathcal{M}$ *счётно категорична. Имеется бесконечное число главных компонент в противном случае. Все главные компоненты, содержащие реализации одного и того же типа, попарно изоморфны.*
3. *Совпадение частичного порядка* $\leqslant$ *с тождественным отношением равносильно отсутствию необращаемых главных дуг или, что то же самое, счётной категоричности данной теории. Если* $\leqslant$ *— нетождественный частичный порядок, то каждая главная компонента связности принадлежит бесконечной* $\leqslant$*-цепи. Множество всех главных компонент связности направлено вниз частичным порядком* $\leqslant$*.*

4. Предельные модели

Модель $\mathcal{M}$ называется *предельной*, если $\mathcal{M}$ не является простой моделью ни над каким кортежем и $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ для некоторой элементарной цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ простых моделей над некоторыми кортежами.

Предложение 4.1. *Любая счётная модель* $\mathcal{M}$ *малой теории* T *представляется в виде объединения некоторой элементарной цепи* $(\mathcal{M}_{\bar a_i})_{i\in\omega}$ *простых моделей над кортежами* $\bar a_i$*.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная счётная модель малой теории T. Построим элементарную цепь $\mathfrak{C}$ простых моделей $\mathcal{M}_{\bar a_i}$ над кортежами $\bar a_i$, $i \in \omega$, такую что $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{i\in\omega} \mathcal{M}_{\bar a_i}$. С этой целью перенумеруем все элементы модели $\mathcal{M}$:

$$M = \{b_k \mid k \in \omega\},$$

а также все формулы вида $\varphi(x, \bar c)$, $\bar c \in M$:

$$\Phi \rightleftharpoons \{\varphi_m(x, \bar c_m) \mid m \in \omega\}.$$

Построение цепи $\mathfrak{C}$ будем осуществлять по индукции. При этом на каждом шаге k будет определена некоторая конечная последовательность кортежей $\bar a_0, \ldots, \bar a_n$ и с каждым из этих кортежей связаны соответствующие конечные множества X_i^k, $0 \leqslant i \leqslant n$, которые после объединения по всем k при фиксированных i будут образовывать носители моделей $\mathcal{M}_{\bar a_i}$. Если кортеж $\bar a_i$ до шага k не определён, то множества X_i^l считаются пустыми для всех $l < k$.

На начальном шаге зафиксируем кортеж $\bar a_0 \rightleftharpoons \langle b_0 \rangle$ и для формулы $\varphi_m(x, b_0)$ из множества Φ, имеющей минимальный номер и удовлетворяющей условию

$\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi_m(x, b_0)$, найдём реализацию d_m главного полного типа $p(x, b_0)$, содержащего формулу $\varphi_m(x, b_0)$. Положим $X_0^0 \rightleftharpoons \{b_0, d_m\}$.

Предположим, что на шаге индукции k уже найдены кортежи $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ и сформированы конечные множества $X_0^k, \ldots, X_n^k$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) все элементы кортежа $\bar{a}_i$ содержатся среди элементов кортежа $\bar{a}_{i+1}$, $i < n$, и принадлежат множеству X_i^k;
2) $\{b_0, \ldots, b_k\} \subseteq X_n^k$;
3) $X_i^k \subset X_{i+1}^k$, $i < n - 1$;
4) для выбранной на шаге k минимальной по номеру m не рассмотренной ранее формулы $\varphi_m(x, \bar{c}_m)$, содержащей лишь элементы максимального непустого множества X_j^{k-1} и удовлетворяющей условию $\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi_m(x, \bar{c}_m)$, найдена реализация $d_m \in M$ главного полного типа $p(x, X_j^{k-1} \cup \{b_k\})$, содержащего формулу $\varphi_m(x, \bar{c}_m)$ и такого, что для любого кортежа $\bar{a}_i$ с условием $\bar{c}_m \in X_i^{k-1}$ и любого кортежа $\bar{d} \in X_i^{k-1} \cup \{d_m\}$ тип $\mathrm{tp}(\bar{d}/\bar{a}_i)$ является главным; эта реализация помещена в минимальное по индексу i множество X_i^k с условием $\bar{c}_m \in X_i^{k-1}$.

На шаге индукции $k+1$ рассмотрим элемент b_{k+1}. Если этот элемент уже попал в множество X_n^k, то последовательность $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ не расширяется, а множества X_i^{k+1} получаются из множеств X_i^k добавлением элемента d_m в соответствии с условиями 3) и 4) для значения $k+1$ вместо k.

Если $b_{k+1} \notin X_n^k$ и начиная с некоторого $i_0 \leqslant n$ все типы $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_i)$, $\bar{b} \in X_i^k \cup \{b_{k+1}\}$, являются главными, то снова последовательность $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ не расширяется, а элемент b_{k+1} добавляется к множеству $X_{i_0}^k$ и ко всем последующим множествам X_i^k, $i_0 \leqslant i \leqslant n$. Затем множества X_i^{k+1} образуются из полученных множеств добавлением элемента d_m в соответствии с условиями 3) и 4) для значения $k+1$ вместо k.

Если некоторый тип $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a}_n)$, $\bar{b} \in X_n^k \cup \{b_{k+1}\}$, не является главным, то добавляем к последовательности $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n$ кортеж $\bar{a}_{n+1}$, состоящий из всех элементов множества $X_n^k \cup \{b_{k+1}\}$. Образуем множества X_i^{k+1}, $0 \leqslant i \leqslant n+1$, добавлением реализации d_m главного полного типа $p(x, X_n^k \cup \{b_{k+1}\})$, содержащего минимальную по номеру m не рассмотренную ранее формулу $\varphi_m(x, \bar{c}_m)$, включающую лишь элементы множества X_n^k и удовлетворяющую условию $\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi_m(x, \bar{c}_m)$, и такого, что для любого кортежа $\bar{a}_i$ с условием $\bar{c}_m \in X_i^k$ и любого кортежа $\bar{d} \in X_i^k \cup \{d_m\}$ тип $\mathrm{tp}(\bar{d}/\bar{a}_i)$ является главным. Эту реализацию добавляем к минимальному по индексу i множеству X_i^k с условием $\bar{c}_m \in X_i^k$ и ко всем последующим множествам X_j^k, $i \leqslant j \leqslant n$. Положим $X_{n+1}^{k+1} \rightleftharpoons X_n^k \cup \{b_{k+1}, d_m\}$.

В этой конструкции множества $X_i \rightleftharpoons \bigcup\limits_{k \in \omega} X_i^k$ являются носителями простых моделей $\mathcal{M}_{\bar{a}_i}$ над кортежами $\bar{a}_i$. При этом выполняется $\mathcal{M}_{\bar{a}_i} \prec \mathcal{M}_{\bar{a}_{i+1}}$ и $\mathcal{M} = \bigcup\limits_i \mathcal{M}_{\bar{a}_i}$. Если число индексов i конечно, модель $\mathcal{M}$ является простой над наибольшим кортежем $\bar{a}_i$ и элементарную цепь моделей $\mathcal{M}_{\bar{a}_i}$ дополняем до счётной цепи, добавляя счётное число раз модель $\mathcal{M}$. $\square$

По предложению 4.1 справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Каждая счётная модель малой теории, не являющаяся простой ни над каким кортежем, предельна. Носители всех счётных моделей малой теории представляются в НРКВ-гиперграфах $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ в виде выделенных множеств или в виде объединения счётных цепей последовательно строго вложенных выделенных множеств M_n, $n \in \omega$. При этом во втором случае элементы ядер $\ker_{\mathcal{M}}(M_n)$, $n \in \omega$, связаны с элементами ядер $\ker_{\mathcal{M}}(M_k)$, $k < n$, необращаемыми главными дугами.*

Как замечено в [5, 8], из конечности предпорядка Рудина—Кейслера в системе $\mathrm{RK}(T)$ следует, что любая счётная модель $\mathcal{M}$ теории T, не являющаяся простой ни над каким кортежем, *предельна над* некоторым *типом* p, т. е. каждая модель некоторой элементарной цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$, объединение которой совпадает с $\mathcal{M}$, проста над некоторой реализацией типа p.

В общей ситуации предельные модели могут не составляться из простых моделей $\mathcal{M}_n$ над реализациями одного и того же типа, т. е. ядра моделей $\mathcal{M}_n$ после переноса в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ могут лежать лишь в таких структурах реализаций типов $p_{nk}(x)$, $k \in \omega$, что $p_{n_1k_1} \neq p_{n_2k_2}$ при $n_1 \neq n_2$.

Предельные модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются *эквивалентными* (пишем $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$, если существуют элементарные цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ и $(\mathcal{N}_n)_{n\in\omega}$ простых над некоторыми кортежами моделей, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$, $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{N}_n$;
2) существуют константные обогащения $\mathcal{M}'_{n+1} = \langle \mathcal{M}_{n+1}, c\rangle_{c\in M'_n}$ и $\mathcal{N}'_{n+1} = \langle \mathcal{N}_{n+1}, c\rangle_{c\in N'_n}$, $n \in \omega$, $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}'_0 = \mathcal{N}_0$, такие что $\mathcal{M}'_{n+1} \simeq \mathcal{N}'_{n+1}$, $n \in \omega$.

Очевидным является следующее предложение.

Предложение 4.3. *Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — предельные модели, то $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$.*

Рассмотрим теперь иерархии предельных моделей по степени их насыщенности, подобные иерархиям простых моделей по предпорядкам Рудина—Кейслера, которые позволяют оценить число попарно неизоморфных предельных моделей.

Обозначим через $\mathrm{EEL}(T)$ множество $\mathbf{LM}$ типов изоморфизма предельных моделей теории T с отношением элементарной вложимости $\preceq$.

Очевидно, что любое непустое множество $\mathrm{EEL}(T)$ является предупорядоченным, а из малости теории T следует существование в $\mathrm{EEL}(T)$ элемента (типа изоморфизма счётной насыщенной модели), в который элементарно вкладываются все типы изоморфизма предельных моделей. Вместе с тем система $\mathrm{EEL}(T)$ может не иметь минимальных классов $(\preceq \cap \succeq)$-эквивалентности. Кроме того, вообще говоря, нельзя говорить о единственности такого «наибольшего» элемента. Более того, например, в известных эренфойхтовых теориях [1, 2, 6, 21] насыщенные модели элементарно вложимы даже в простые модели над реализациями властных типов.

Таким образом, число $I_l(T)$ попарно неизоморфных предельных моделей малой теории T ограничивается снизу числом $|\mathrm{EEL}(T)/(\preceq \cap \succeq)|$ классов $(\preceq \cap \succeq)$-эквивалентности. В отдельных случаях, например при $I(T,\omega) = 3$, оценка

$$I_l(T) \geqslant |\mathrm{EEL}(T)/(\preceq \cap \succeq)| \tag{1}$$

неулучшаема, а в некоторых примерах из [6] неравенство (1) является строгим. Остаётся открытой проблема характеризации малых теорий с условием $I_l(T) = |\mathrm{EEL}(T)/(\preceq \cap \succeq)|$.

Приведённые рассуждения показывают, что иерархия насыщенности предельных моделей, строящаяся на основе множества $\mathrm{EEL}(T)$ с предпорядком элементарной вложимости, достаточно слабо связана с числом $I_l(T)$.

Введём в рассмотрение утончение $\mathrm{EEL}(T)$-иерархии, при котором связь между типами изоморфизмов моделей осуществляется на основе согласования между последовательностями главных компонент связности, а простые модели над некоторыми элементами этих компонент составляют заданные предельные модели.

Будем говорить, что предельная модель $\mathcal{M}$ *согласованно элементарно вложима* в предельную модель $\mathcal{N}$, если существует элементарное вложение f модели $\mathcal{M}$ в модель $\mathcal{N}$, переводящее некоторые кортежи $\bar{a}_n \in M$ в соответствующие кортежи $f(\bar{a}_n) \in N$, $n \in \omega$, такие что $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{\bar{a}_n}$, $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{N}_{f(\bar{a}_n)}$. Обозначим через $\mathrm{CEEL}(T)$ множество $\mathbf{LM}$ типов изоморфизма предельных моделей теории T с отношением согласованной элементарной вложимости $\preceq_c$.

Как и $\mathrm{EEL}(T)$-иерархия, $\mathrm{CEEL}(T)$-иерархия позволяет оценить снизу число $I_l(T)$:

$$I_l(T) \geqslant |\mathrm{CEEL}(T)/(\preceq_c \cap {}_c\succeq)|. \tag{2}$$

Следующий пример показывает, что в общем случае, как и для взаимной элементарной вложимости, наличие взаимной согласованной элементарной вложимости предельных моделей не гарантирует их изоморфизма, т. е. неравенство (2) также может являться строгим.

Пример. Рассмотрим счётную модель $\mathcal{M}$ связного бесконтурного ациклического графа $\langle M; Q\rangle$, в котором каждый элемент имеет бесконечное число образов и бесконечное число прообразов (см. пример из [5]). Снабдим эту структуру 1-несущественной упорядоченной раскраской так, чтобы на множестве реализаций типа $p_\infty(x)$ отношение полуизолированности было несимметричным: если $\models p_\infty(a)$ и $\models Q(a,b)$, то a полуизолирует b посредством формулы $Q(a,y)$, а b не полуизолирует a. Теперь обогатим структуру предикатами $R_n^{(n+2)}$, $n \in \omega$, удовлетворяющими следующим условиям:

1) $R_0 = Q$;
2) если $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\models p_\infty(a_n)$ и $\models Q(a_{i+1}, a_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$, то

$$R_n(a_n, \ldots, a_0, y) \vdash R_{n-1}(a_{n-1}, \ldots, a_0, y)$$

и $R_n(x, a_{n-1}, \ldots, a_0, y)$ при изменении реализаций типа $p_\infty(x)$ в пределах $Q(\mathcal{M}, a_{n-1})$ определяет на множестве $R_{n-1}(a_{n-1}, \ldots, a_0, \mathcal{M})$ бесконечное число классов эквивалентности, каждый из которых бесконечен.

Рассмотрим неглавный тип $q(x)$, содержащий все формулы $R_n(a_n, \ldots, a_0, x)$, где $(a_n)_{n\in\omega}$ — последовательность реализаций типа p_∞, $\models Q(a_{n+1}, a_n)$, $n \in \omega$. Существуют взаимно согласованно элементарно вложимые неизоморфные предельные модели, задаваемые последовательностью $(a_n)_{n\in\omega}$, в которых тип $q(x)$ имеет различное конечное число реализаций.

Приведённая в примере причина неизоморфности взаимно согласованно элементарно вложимых предельных моделей, основанная на возможности различного числа реализаций типов q (и, как следствие, на неоднородности предельных моделей с выделенными константами a_n), по существу, единственна, поскольку отсутствие таких типов позволяет шаг за шагом расширять конечные частичные изоморфизмы между взаимно согласованно элементарно вложимыми предельными моделями, доводя частичные изоморфизмы до изоморфизмов моделей. Возможность таких расширений можно проследить на примерах предельных моделей эренфойхтовых теорий из [1, 2, 6, 21]. При этом в примерах из [6] изоморфизмы предельных моделей строятся на основе существования в этих моделях реализаций одних и тех же типов над конечными множествами, обеспечиваемых специальными предикатами $R_{\mathbf{A}}(x, \bar{y})$.

5. λ-модельные гиперграфы

В этом разделе мы определим связь структуры НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ счётной насыщенной модели $\mathcal{M}$ теории T с числом $I(T, \omega)$ попарно неизоморфных счётных моделей теории T, а также укажем средства обогащения НРКВ-гиперграфа, приводящие к точному подсчёту значения $I(T, \omega)$, равного числу попарно неизоморфных структурных объектов, определяемых обогащённым НРКВ-гиперграфом.

Полные 1-типы $q_1(x)$ и $q_2(x)$ над $\varnothing$, реализуемые в НРКВ-гиперграфе $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, назовём *p-эквивалентными* и будем писать $q_1 \sim_p q_2$, если некоторая главная компонента связности содержит реализации типов $q_1(x)$ и $q_2(x)$.

Обозначим через $I_p(T, \omega)$ число попарно неизоморфных счётных моделей теории T, каждая из которых является простой над некоторым кортежем.

Предложение 5.1. *Число $I_p(T, \omega)$ совпадает с числом классов $\sim_p$-эквивалентности теории T.*

Доказательство. В силу насыщенности модели $\mathcal{M}$ каждая простая над некоторым кортежем $\bar{a}$ модель представляется некоторым 1-типом, реализуемым именем $c_{\bar{a}}$ кортежа $\bar{a}$ в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. С другой стороны, представляемые $\sim_p$-эквивалентными типами простые модели изоморфны, поскольку при наличии маршрута, состоящего из главных рёбер и соединяющего реализации 1-типов q_1 и q_2, простота модели над реализацией типа q_1 равносильна её простоте над реализацией

типа q_2. Таким образом, число $I_p(T,\omega)$ равно числу попарно $\sim_p$-неэквивалентных полных 1-типов над $\varnothing$, реализуемых в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. $\square$

Поскольку согласно теореме 4.2 каждая предельная модель теории T представляется в виде объединения счётной цепи структур последовательно строго вложенных выделенных множеств НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, изоморфизм предельных моделей влечёт изоморфизм соответствующих предельных структур в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. Следовательно, на основании предложения 5.1 число $I(T,\omega)$ оценивается снизу суммой числа классов $\sim_p$-эквивалентности и числа $I_l\big(\mathcal{H}(\mathcal{M})\big)$ попарно неизоморфных предельных структур в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$:

$$I(T,\omega) \geqslant I_p(T,\omega) + I_l\big(\mathcal{H}(\mathcal{M})\big). \tag{3}$$

Эта оценка на графовом уровне неулучшаема, так как графовые структуры модели $\mathcal{M}$ переносятся в $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Рассмотрим теперь возможности обогащений НРКВ-гиперграфа $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, приводящие к достижению равенства в неравенстве (3) после замены $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ на обогащённый НРКВ-гиперграф.

По предложению 4.3 наличие изоморфизма предельных моделей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ свидетельствуется возможностью *согласованного* расширения простых моделей, представленных в НРКВ-гиперграфах $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{H}(\mathcal{N})$. Эта согласованность достигается введением в НРКВ-гиперграфы соответствий между кортежами элементов и их именами в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, а также некоторой системы формульно определимых двухместных отношений, через которые формульно определяются все формульные отношения исходной структуры. Тем самым для обогащённых НРКВ-гиперграфов будет иметь место равенство в неравенстве (3).

Покажем теперь, что сигнатурные средства, использованные в [6] для построения реализаций основных характеристик эренфойхтовых теорий, являются минимальными при интерпретациях насыщенных моделей $\mathcal{M}$ в виде НРКВ-гиперграфов, задающих эти характеристики.

Действительно, одноместные предикаты $\mathrm{Col}_n(x)$, $n \in \omega$, обеспечивают наличие неглавных 1-типов, которые обязаны реализовываться в модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Двухместный предикат $Q(x,y)$ (такой предикат в структуре может быть не один, допускается наличие счётного формульно независимого семейства $Q_n(x,y)$, $n \in \omega$) создаёт несимметричность отношения полуизолированности на множестве реализаций властного типа $p_\infty(x)$, определяемого множеством формул $\neg\mathrm{Col}_n(x)$, $n \in \omega$. Семейство двухместных предикатов $\{R_j \mid j \in \omega\}$ образует ядерные неорграфы на множестве реализаций типа $p_\infty(x)$, упорядоченные посредством предиката Q в соответствии с теоремами 2.4 и 3.3, а предикаты $R_{\mathbf{A}}(x,\bar{y})$ обеспечивают взаимореализуемость властного типа $p_\infty(x)$ с остальными властными типами.

Рассмотрим теперь произвольную теорию T, имеющую ровно три попарно неизоморфные счётные модели. Напомним, что все неглавные типы теории T являются властными, и после перехода от насыщенной модели $\mathcal{M}$ к модели $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ зафиксируем в качестве типа $p_\infty(x)$ некоторый неглавный 1-тип, реализуемый в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Для определяющего тип $p_\infty(x)$ множества формул $\varphi_n(x)$,

$n \in \omega$, где $\{\varphi_n(x) \mid n \in \omega\} \vdash p_\infty(x)$, в качестве формул $\mathrm{Col}_n(x)$ рассмотрим формулы $\varphi_n(x) \wedge \neg\varphi_{n+1}(x)$, а в качестве $Q_n(x,y)$, $n \in \omega$, — счётное семейство формул, каждая из которых свидетельствует о несимметричности отношения полуизолированности SI_{p_∞} и является главной после подстановки вместо первой координаты любой реализации типа p_∞. Более того, потребуем, чтобы для любых двух реализаций a и b типа $p_\infty(x)$ нашлась реализация c этого же типа и формул $Q_i(x,y)$, $Q_j(x,y)$, для которых выполнялось $\models Q_i(c,a) \wedge Q_j(c,b)$, и тем самым имело место *локальное свойство попарного пересечения* [7]. В качестве предикатов R_j, $j \in \omega$, рассмотрим всевозможные совместные с $p_\infty(x) \cup p_\infty(y)$ двухместные формулы $\psi(x,y)$, все реализации которых на структуре типа $p_\infty(x)$ являются главными рёбрами и образуют ядерные неорграфы. Наконец, в качестве предикатов $R_{\mathbf{A}}(x,\bar{y})$ рассмотрим для каждого реализуемого в $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ неглавного 1-типа $q(y)$ всевозможные совместные с $p_\infty(x) \cup q(y)$ формулы $\chi_q(x,y)$, связывающие лишь главными рёбрами реализации типа $p_\infty(x)$ с реализациями типа $q(y)$. Добавив к гиперграфу $(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$ указанные предикаты, а также структуру, обеспечивающую единственность предельной модели, получаем *трёхмодельный гиперграф*.

На основании [5, следствие 3] справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Для любой малой теории T следующие условия эквивалентны*:
1) $I(T,\omega) = 3$;
2) *теория T имеет трёхмодельный гиперграф.*

Как известно (см. [5, теорема 1]), для теорий с четырьмя счётными моделями возможны следующие три взаимоисключающие ситуации:
1) двухэлементный предпорядок Рудина—Кейслера и две предельные модели над властными типами;
2) трёхэлементный предпорядок Рудина—Кейслера с двумя максимальными элементами и единственная предельная модель;
3) трёхэлементная цепь, составляющая предпорядок Рудина—Кейслера, и единственная предельная модель.

Указанные ситуации также можно охарактеризовать на языке гиперграфов и представить в виде *четырёхмодельных гиперграфов*.

Продолжая в соответствии с [5, теорема 1] разбор возможных ситуаций относительно предпорядков Рудина—Кейслера и функции распределения числа предельных моделей для теорий, имеющих n счётных моделей, аналогично вышеизложенному можно построить *n-модельные гиперграфы*, дающие возможность охарактеризовать теории T с условием $I(T,\omega) = n$.

Процесс построения гиперграфов, сохраняющих данное число попарно неизоморфных счётных моделей, можно продолжить и для бесконечных мощностей. Как и выше, это достигается вводом в гиперграф $(M^{\mathrm{eq}}, H(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$ формульно определимой информации о предпорядке Рудина—Кейслера и о числе предельных моделей. Тем самым определяется понятие *λ-модельного гиперграфа*, позволяющее охарактеризовать теории T с условием $I(T,\omega) = \lambda$ в следующем обобщении теоремы 5.2.

Теорема 5.3. *Для любой малой теории T следующие условия эквивалентны*:

1) $I(T,\omega)=\lambda$;
2) *теория T имеет λ-модельный гиперграф.*

6. Распределения простых и предельных моделей теории

Рассмотрим аналоги счётной категоричности и эренфойхтовости для предельных и простых над кортежами моделей.

Теория T называется *p-категоричной* (*l-категоричной*, *p-эренфойхтовой*, *l-эренфойхтовой*), если $I_p(T,\omega)=1$ (соответственно $I_l(T)=1$, $1<I_p(T,\omega)<\omega$, $1<I_l(T)<\omega$).

Очевидно, что p-категоричность теории T равносильна её счётной категоричности, её p-эренфойхтовость — конечности неодноэлементной системы $\mathrm{RK}(T)$, а p эренфойхтовость и условие $1\leqslant I_l(T)<\omega$ — эренфойхтовости теории.

Отметим, что именно отсутствие p-эренфойхтовости позволило в ряде статей доказать отсутствие эренфойхтовых теорий в классах суперстабильных [14], 1-базируемых [16], псевдосуперстабильных [20], суперпростых [13] теорий, а также теорий, не имеющих свойство строгого порядка и интерпретирующих бесконечные множества попарно различных констант [18].

Напомним [8], что для теорий с конечными предпорядками Рудина—Кейслера число счётных моделей определяется числом простых над кортежами моделей, а также функцией распределения IL числа предельных над типами моделей.

Теорема 6.1. *Любая малая теория T с конечным предпорядком Рудина—Кейслера удовлетворяет следующим условиям*:

1) *система $\mathrm{RK}(T)$ имеет наименьший элемент $\mathbf{M}_0$ (тип изоморфизма простой модели), и $\mathrm{IL}(\tilde{\mathbf{M}}_0)=0$;*
2) *система $\mathrm{RK}(T)$ имеет наибольший $\sim_{RK}$-класс $\tilde{\mathbf{M}}_1$ (класс типов изоморфизма всех простых моделей над реализациями властных типов) и из $|\mathrm{RK}(T)|>1$ следует $\mathrm{IL}(\tilde{\mathbf{M}}_1)\geqslant 1$;*
3) *если $|\tilde{\mathbf{M}}|>1$, то $\mathrm{IL}(\tilde{\mathbf{M}})\geqslant 1$.*

Более того, справедлива следующая декомпозиционная формула:

$$I(T,\omega)=|\mathrm{RK}(T)|+\sum_{i=0}^{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{\mathrm{RK}}|-1}\mathrm{IL}(\tilde{\mathbf{M}}_i),$$

где $\tilde{\mathbf{M}}_0,\ldots,\tilde{\mathbf{M}}_{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{\mathrm{RK}}|-1}$ — все элементы частично упорядоченного множества $\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}$ и $\mathrm{IL}(\tilde{\mathbf{M}}_i)\in\omega\cup\{\omega,\omega_1,2^\omega\}$ для любого i.

Наряду с известной характеризацией p-категоричности (теорема Рыль-Нардзевского) согласно теореме 6.1 имеется синтаксическая характеризация p-эренфойхтовости.

Рассмотрим класс l-категоричных теорий. Очевидно, что никакая такая теория не p-категорична, а единственность предельной модели влечёт её насыщенность. Тем самым объединение любой элементарной цепи простых над кортежами моделей снова является простой моделью или образует предельную насыщенную модель. Следовательно, по определению насыщенности модели l-категоричность теории равносильна тому, что для любой элементарной цепи $(\mathcal{M}_{\bar{a}_i})_{i\in\omega}$ простых над кортежами $\bar{a}_i$ моделей, объединение которых образует предельную модель, и любого кортежа $\bar{b} \in M_{\bar{a}_i}$ любой тип $q(x) \in S^1(\bar{b})$ реализуется в некоторой модели $\mathcal{M}_{\bar{a}_j}$, $j \geqslant i$.

Ещё один критерий l-категоричности основан на невозможности построения предельной модели $\mathcal{M}$ как объединения элементарной цепи простых над типами q_n моделей $\mathcal{M}_{q_n}$, $q_n \leqslant_{\mathrm{RK}} q_{n+1}$, $n \in \omega$, для которых существует тип q с условиями $q_n \leqslant_{\mathrm{RK}} q$ и $q \nleqslant_{\mathrm{RK}} q_n$, $n \in \omega$. Отсутствие модели $\mathcal{M}$ вытекает из предельности насыщенной модели, в которой реализуется тип q, в то время как тип q опускается в модели $\mathcal{M}$. Тем самым при отсутствии таких предельных моделей l-категоричность равносильна единственности с точностью до изоморфизма непростой счётной модели, в которой реализуются все типы данной теории.

Таким образом, справедлива следующая теорема, представляющая характеризации l-категоричности.

Теорема 6.2. *Для любой малой не ω-категоричной теории T следующие условия эквивалентны*:

1) *теория T l-категорична*;
2) *любая предельная модель теории T насыщенна*;
3) *для любой элементарной цепи $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ простых над кортежами моделей теории T, объединение которых образует предельную модель, и любого кортежа $\bar{b} \in M_i$ любой тип $q(x) \in S^1(\bar{b})$ реализуется в некоторой модели $\mathcal{M}_j$, $j \geqslant i$*;
4) *объединение любой элементарной цепи простых над типами q_n моделей $\mathcal{M}_{q_n}$, $n \in \omega$, является простой моделью над некоторым типом или единственной с точностью до изоморфизма предельной моделью, реализующей все типы теории T.*

Отметим, что l-категоричными являются все теории T с $I(T,\omega) = 3$. Также l-категорична любая теория, у которой типы изоморфизмов счётных моделей определяются их размерностями из $\omega \cup \{\infty\}$, конечные значения которых соответствуют простым над кортежами моделям. В частности, согласно [11] l-категорична любая не ω-категоричная ω_1-категоричная теория. Так как в l-категоричных теориях отсутствуют неодноэлементные $\sim_{\mathrm{RK}}$-классы, отличные от $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-наибольшего $\sim_{\mathrm{RK}}$-класса (см. [5, следствие 2]), классы теорий с тремя

счётными моделями, а также теории с размерностями представляют две взаимоисключающие возможности для предпорядков Рудина—Кейслера в l-категоричных теориях:

1) конечный или счётный предпорядок Рудина—Кейслера с ограниченными длинами $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-цепей на $\sim_{\mathrm{RK}}$-классах, в котором все $\sim_{\mathrm{RK}}$-классы, отличные от наибольшего, одноэлементны;
2) счётный предпорядок Рудина—Кейслера с неограниченными длинами $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-цепей на $\sim_{\mathrm{RK}}$-классах, каждый из которых одноэлементен, и при этом каждый элемент из $\mathbf{M} \in \mathrm{RK}(T)$ находится в отношении $\mathbf{M} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathbf{M}'$ с некоторым элементом $\mathbf{M}'$ каждой бесконечной $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-цепи.

Заметим также, что, поскольку все простые и счётные насыщенные модели однородны, l-категоричные теории являются *почти однородными*, т. е. однородны все их счётные модели, после обогащения каждой из них некоторым конечным множеством констант.

Для дальнейшего изучения произвольной малой теории T и определения числа её счётных моделей (в частности, для исследования l-эренфойхтовости) будем считать, что предупорядоченное множество $\mathrm{RK}(T)$ счётно и при этом согласно [6, теорема 5.1] является направленным вверх и имеет наименьший элемент. Поскольку в теореме 6.1 описано возможное число λ предельных над типами моделей ($\lambda \in \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$), рассмотрим возможное число предельных моделей, которые не являются предельными ни над одним из типов.

По определению каждая предельная модель $\mathcal{M}$ представляется в виде объединения элементарной цепи $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ простых над типами q_i моделей $\mathcal{M}_i$. При этом один и тот же тип может повторяться бесконечное число раз (что соответствует предельной модели над типом) или из цепи $(\mathcal{M}_i)_{i\in\omega}$ можно извлечь бесконечную подцепь попарно неизоморфных моделей $\mathcal{M}_{i_j}$, которые просты над попарно различными типами q_{i_j}, и эта подцепь не уплотняется до элементарной цепи $(\mathcal{N}_k)_{k\in\omega}$ (где $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \mathcal{N}_k$) простых над кортежами моделей, среди которых имеется бесконечное число простых моделей над одним и тем же типом.

Каждая $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-*последовательность*, т. е. последовательность неглавных типов $(q_n)_{n\in\omega}$ с условиями $q_n \leqslant_{\mathrm{RK}} q_{n+1}$, $n \in \omega$, может определять некоторое число $\lambda\big((q_n)_{n\in\omega}\big) \in \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ предельных моделей $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{q_n}$, где $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ — элементарная цепь простых моделей над реализациями типов q_n. При этом зависимость между числами $\lambda\big((q_n)_{n\in\omega}\big)$ для различных $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$ обусловливается следующим отношением эквивалентности: $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательности $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$ называются *эквивалентными* ($(q_n)_{n\in\omega} \sim (q'_n)_{n\in\omega}$), если найдётся их общая $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-подпоследовательность $(q''_n)_{n\in\omega}$.

Заметим, что прямой зависимости между числами $\lambda\big((q_n)_{n\in\omega}\big)$ и $\lambda\big((q'_n)_{n\in\omega}\big)$ для эквивалентных $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$, вообще говоря, нет, поскольку предельные модели, задаваемые $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностью

$(q_n)_{n\in\omega}$, могут не задаваться $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q'_n)_{n\in\omega}$ и наоборот. Справедливы лишь следующие соотношения:

1) $\lambda\big((q_n)_{n\in\omega}\big) \leqslant \lambda\big((q'_n)_{n\in\omega}\big)$, где $(q'_n)_{n\in\omega}$ — $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-подпоследовательность последовательности $(q_n)_{n\in\omega}$;
2) $\lambda\big((q_n)_{n\in\omega}\big) = \lambda\big((q'_n)_{n\in\omega}\big)$, где для $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$ найдутся такие числа k и m, что $\mathcal{M}_{q_{k+n}} \simeq \mathcal{M}_{q'_{m+n}}$ начиная с некоторого n.

Действительно, по определению любая предельная модель над $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$ предельна над любой подпоследовательностью $(q'_n)_{n\in\omega}$, но не наоборот. Кроме того, если для последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$ и $(q'_n)_{n\in\omega}$ найдутся такие числа k и m, что $\mathcal{M}_{q_{k+n}} \simeq \mathcal{M}_{q'_{m+n}}$ начиная с некоторого n, то любая предельная модель над $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$ предельна над $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q'_n)_{n\in\omega}$ и наоборот, поскольку элементарная цепь простых над кортежами моделей $(\mathcal{M}_{\bar{a}_n})_{n\in\omega}$ расширяется до элементарной цепи $(\mathcal{M}_{\bar{b}_n})_{n\in\omega}$, где $\mathcal{M}_{\bar{a}_n} = \mathcal{M}_{\bar{b}_{n+l}}$, $n \in \omega$, $\mathrm{tp}(\bar{b}_i) \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathrm{tp}(\bar{b}_{i+1})$, $i = 0, \ldots, l-1$.

Из первого соотношения следует, что континуальное число $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностей $(q_n)_{n\in\omega}$, где никакая из последовательностей не является собственной подпоследовательностью остальных и каждая задаёт некоторую предельную модель, не являющуюся предельной над остальными последовательностями, влечёт континуальное число попарно неизоморфных предельных моделей.

Следующее понятие позволяет сформулировать достаточное условие для континуального числа предельных моделей.

Теория T называется *l-богатой*, если существуют неглавные типы q_n, $n \in \omega$, над которыми простые модели $\mathcal{M}_{q_n}$ попарно неизоморфны, такие что для каждой последовательности $(n_k)_{k\in\omega}$ существует элементарная цепь моделей $\mathcal{M}_{n_k}$, изоморфных $\mathcal{M}_{q_{n_k}}$, объединение которой образует предельную модель.

Заметим, что все типы q_n, участвующие в определении l-богатой теории, RK-эквивалентны, а соответствующий $\sim_{\mathrm{RK}}$-класс в $\mathrm{RK}(T)$ является счётным.

Предложение 6.3. *Если T — l-богатая теория, то $I_l(T) = 2^\omega$.*

Доказательство. По определению l-богатой теории достаточно доказать, что имеется континуум попарно неэквивалентных $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностей, составленных из типов q_n. Разобьём множество натуральных чисел, индексирующих типы q_n, на две бесконечные части X_0 и X_1, а затем каждую из этих частей на счётное множество счётных частей $X_i^{j,k}$, $i = 0, 1$, $j, k \in \omega$. Теперь, рассмотрев последовательности типов q_n, индексы которых принадлежат таким множествам $X_{i_0}^{0,k_0}, X_{i_1}^{1,k_1}, \ldots, X_{i_m}^{m,k_m}, \ldots$, что разным последовательностям q_n соответствуют разные множества $X_{i_m}^{m,k_m}$, замечаем, что эти последовательности попарно не пересекаются, а нижние индексы кодируют всевозможные двоичные последовательности. Тем самым число неэквивалентных $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностей типов q_n континуально. $\square$

Отметим, что согласно теореме 6.1 и предложению 6.3 имеются три вида порождения континуального числа предельных моделей над $\sim_{\mathrm{RK}}$-классами:

1) континуум предельных моделей над некоторым типом из данного $\sim_{\mathrm{RK}}$-класса;
2) континуум предельных моделей над некоторой $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностью попарно различных типов из данного $\sim_{\mathrm{RK}}$-класса;
3) континуум предельных моделей над попарно различными $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностями попарно различных типов из данного $\sim_{\mathrm{RK}}$-класса.

В силу теоремы Морли [15] числа предельных моделей над данными $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностями неглавных типов $\mathbf{q}$ (состоящих из одних и тех же или попарно различных типов) могут варьироваться в пределах множества $\omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$. Тем самым число $I_l(T)$ представляется в виде суммы $\sum\limits_{\mathbf{q}} \mathrm{IL}_{\mathbf{q}}$, где $\mathrm{IL}_{\mathbf{q}}$ — число предельных моделей, относящихся к $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательности $\mathbf{q}$ и не относящихся к расширениям и сужениям последовательности $\mathbf{q}$, участвующим в подсчёте значения $I_l(T)$.

Аналогично [5, следствие 2] с использованием доказательства предложения 4 из [5] устанавливается следующая лемма.

Лемма 6.4. *Если* $\mathbf{q}$ — $\leqslant_{\mathrm{RK}}$*-последовательность типов* q_n, $n \in \omega$, *и* $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ — *элементарная цепь, никакая коконечная подцепь которой не состоит из попарно изоморфных моделей, то* $\mathrm{IL}_{\mathbf{q}} \geqslant 1$.

Будем говорить, что семейство $\mathbf{Q}$ $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностей типов $\mathbf{q}$ *представляет* $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательность типов $\mathbf{q}'$, если любая предельная модель над $\mathbf{q}'$ является предельной над некоторой последовательностью $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$.

Согласно изложенному выше справедлива следующая теорема для теорий с произвольными предпорядками Рудина—Кейслера, описывающая всевозможные распределения числа счётных моделей теории в зависимости от заданных последовательностей неглавных типов и являющаяся обобщением теоремы 6.1.

Теорема 6.5. *Любая малая теория* T *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *система* $\mathrm{RK}(T)$ *является направленной вверх и имеет наименьший элемент* $\mathbf{M}_0$ (*тип изоморфизма простой модели теории*), $\mathrm{IL}(\tilde{\mathbf{M}}_0) = 0$;
2) *если* $\mathbf{q}$ — $\leqslant_{\mathrm{RK}}$*-последовательность неглавных типов* q_n, $n \in \omega$, *такая что каждый тип* q *теории* T *находится в отношении* $q \leqslant_{\mathrm{RK}} q_n$ *для некоторого* n, *то существует предельная модель над* $\mathbf{q}$; *в частности, при наличии* $\mathbf{q}$ *справедливо* $I_l(T) \geqslant 1$ *и предельной над последовательностью* $\mathbf{q}$ *является счётная насыщенная модель теории*;
3) *если* $\mathbf{q}$ — $\leqslant_{\mathrm{RK}}$*-последовательность типов* q_n, $n \in \omega$, *и* $(\mathcal{M}_{q_n})_{n\in\omega}$ — *элементарная цепь, никакая коконечная подцепь которой не состоит из попарно изоморфных моделей, то существует предельная модель над* $\mathbf{q}$;
4) *если* $\mathbf{q}' = (q'_n)_{n\in\omega}$ — *подпоследовательность* $\leqslant_{\mathrm{RK}}$*-последовательности* $\mathbf{q}$, *то любая предельная модель над последовательностью* $\mathbf{q}$ *предельна над* $\mathbf{q}'$;
5) *если* $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$ *и* $\mathbf{q}' = (q'_n)_{n\in\omega}$ — *такие* $\leqslant_{\mathrm{RK}}$*-последовательности типов, что для некоторых чисел* $k, m \in \omega$ *начиная с некоторого* n *каждый тип* q_{k+n} *находится с типом* q'_{m+n} *в отношении* $\mathcal{M}_{q_{k+n}} \simeq \mathcal{M}_{q'_{m+n}}$, *то каждая*

модель $\mathcal{M}$ предельна над последовательностью $\mathbf{q}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ предельна над последовательностью $\mathbf{q}'$.

Более того, справедлива следующая декомпозиционная формула:

$$I(T,\omega) = |\mathrm{RK}(T)| + \sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \mathrm{IL}_{\mathbf{q}},$$

где $\mathrm{IL}_{\mathbf{q}} \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ — число предельных моделей, относящихся к $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательности $\mathbf{q}$ и не относящихся к расширениям и сужениям последовательности $\mathbf{q}$, участвующим в подсчёте значения $I_l(T)$, и семейство $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностей типов $\mathbf{Q}$ представляет все $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательности, над которыми существуют предельные модели.

Согласно теореме 6.5 конечные значения $\sum\limits_{\mathbf{q}\in\mathbf{Q}} \mathrm{IL}_{\mathbf{q}}$ характеризуют класс l-эренфойхтовых теорий.

Согласно теореме 6.5 малые теории, как и теории с конечными предпорядками Рудина—Кейслера, классифицируются по предпорядкам Рудина—Кейслера и функциям распределения числа предельных (не обязательно над фиксированными типами) моделей.

Следующая теорема из [8] представляет всевозможные реализации теорий с конечными предпорядками Рудина—Кейслера относительно этих предпорядков, а также функций распределения числа предельных моделей со значениями из множества $\omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$.

Теорема 6.6. *Для любого конечного предупорядоченного множества $\langle X, \leqslant\rangle$ с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\tilde{x}_1$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X, \leqslant\rangle/{\sim}$ по отношению $\sim$ (где $x \sim y \iff x \leqslant y$ и $y \leqslant x$) и для любой функции $f\colon X/{\sim} \to \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, удовлетворяющей условиям $f(\tilde{x}_0) = 0$, $f(\tilde{x}_1) > 0$ при $|X| > 1$, $f(\tilde{y}) > 0$ при $|\tilde{y}| > 1$, существует малая теория T и такой изоморфизм $g\colon \langle X, \leqslant\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{RK}(T)$, что $\mathrm{IL}\bigl(g(\tilde{y})\bigr) = f(\tilde{y})$ для любого $\tilde{y} \in X/{\sim}$.*

Обобщением теоремы 6.6 для произвольных предпорядков Рудина—Кейслера и соответствующих функций распределения числа предельных моделей, принимающих значения из множества $\omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, является следующая теорема.

Теорема 6.7. *Пусть $\langle X, \leqslant\rangle$ — не более чем счётное направленное вверх предупорядоченное множество с наименьшим элементом x_0, $f\colon Y \to \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ — функция, где Y — множество всех $\leqslant_0$-последовательностей, т. е. последовательностей в $X \setminus \{x_0\}$, образующих всевозможные $\leqslant$-цепи, и выполняются следующие условия*:

1) *$f(y) \geqslant 1$, если для каждого элемента $x \in X$ найдётся элемент x' из последовательности y с условием $x \leqslant x'$*;
2) *$f(y) \geqslant 1$, если никакая коконечная подпоследовательность последовательности y не состоит из одинаковых элементов*;
3) *$f(y) \leqslant f(y')$, если y' — подпоследовательность последовательности y*;

4) *$f(y) = f(y')$, если $y = (y_n)_{n\in\omega}$ и $y' = (y'_n)_{n\in\omega}$ — последовательности, для которых найдутся такие числа $k, m \in \omega$, что $y_{k+n} = y'_{m+n}$ начиная с некоторого n.*

Тогда существует малая теория T и такой изоморфизм $g\colon \langle X, \leqslant\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{RK}(T)$, что каждое значение $f(y)$ равно числу предельных моделей над $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-последовательностью $(q_n)_{n\in\omega}$, соответствующей $\leqslant_0$-последовательности $y = (y_n)_{n\in\omega}$, где $g(y_n)$ — тип изоморфизма модели $\mathcal{M}_{q_n}$, $n \in \omega$.

Доказательство теоремы состоит в модификации генерической конструкции из доказательства теоремы 4.1 из [5] и теоремы 1 из [8], при которой выполняются следующие условия:

1) каждый элемент $x \in X \setminus \{x_0\}$ представляется 1-типом q_x, определяемым бесконечным цветом, а также одноместным предикатом P_x;
2) каждая простая над некоторым кортежем модель проста, либо изоморфна некоторой модели $\mathcal{M}_{q_x}$;
3) заданная $\leqslant_{\mathrm{RK}}$-взаимосвязь между типами определяется счётным набором двухместных предикатов;
4) заданное распределение числа предельных моделей определяется последовательностями двухместных предикатов, отождествляемых посредством исчисления тождеств (см. [8]) с помощью амальгам взаимореализуемости.

Поскольку число предельных моделей может варьироваться в зависимости от последовательностей попарно различных типов $\mathbf{q} = (q_n)_{n\in\omega}$, при рассмотрении тождеств из [8], приводящих к заданному числу предельных моделей над $\mathbf{q}$, требуется использовать лишь тождества, связывающие слова одинаковой длины.

Для достижения n счётных моделей достаточно использовать систему тождеств

$$n - 1 \approx m,$$

$m \geqslant n$, и

$$n_0 n_1 \ldots n_s \approx \underbrace{n_s \ldots n_s}_{s+1 \text{ раз}},$$

$\max\{n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\} < n_s$, сводящую все последовательности из ω^ω к n константным последовательностям.

Рассмотрение системы тождеств

$$n_0 n_1 \ldots n_s \approx \underbrace{n_s \ldots n_s}_{s+1 \text{ раз}},$$

$\max\{n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\} < n_s$,

$$n_0 n_1 \ldots n_s \approx n_0(n_0+1)\ldots(n_0+s),$$

$n_0 + s \leqslant n_s$,

$$n_0 n_1 \ldots n_s \approx n_0(n_0+1)\ldots(n_0+t)\underbrace{(n_0+t)\ldots(n_0+t)}_{s-t \text{ раз}},$$

$n_0 + t = n_s$, $t > 0$, $s > t$, приводит к построению теории с ω счётными моделями над $\mathbf{q}$, для которой все последовательности из ω^ω сводятся к константным или диагональной последовательностям. $\square$

Литература

[1] Перетятькин М. Г. О полных теориях с конечным числом счётных моделей // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 5. — С. 550—576.

[2] Перетятькин М. Г. Теории с тремя счётными моделями // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 2. — С. 224—235.

[3] Справочная книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса. — М.: Наука, 1982.

[4] Судоплатов С. В. Об ациклических гиперграфах минимальных простых моделей // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 6. — С. 1408—1412.

[5] Судоплатов С. В. Полные теории с конечным числом счётных моделей. I // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 1. — С. 110—124.

[6] Судоплатов С. В. Полные теории с конечным числом счётных моделей. II // Алгебра и логика. — 2006. — Т. 45, № 3. — С. 314—353.

[7] Судоплатов С. В. Властные орграфы // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 1. — С. 205—213.

[8] Судоплатов С. В. О числе счётных моделей полных теорий с конечными предпорядками Рудина—Кейслера // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 2. — С. 417—422.

[9] Судоплатов С. В. Синтаксический подход к построению генерических моделей // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, № 2. — С. 244—268.

[10] Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. Дискретная математика. — М.: ИНФРА-М; Новосибирск; Изд-во НГТУ, 2009.

[11] Baldwin J. T., Lachlan A. H. On strongly minimal sets // J. Symb. Logic. — 1971. — Vol. 36, no. 1. — P. 79—96.

[12] Herwig B. Weight ω in stable theories with few types // J. Symb. Logic. — 1995. — Vol. 60, no. 2. — P. 353—373.

[13] Kim B. On the number of countable models of a countable supersimple theory // J. London Math. Soc. — 1999. — Vol. 60, no. 2. — P. 641—645.

[14] Lachlan A. H. On the number of countable models of a countable superstable theory // Proc. Int. Cong. Logic, Methodology and Philosophy of Science. — Amsterdam: North-Holland, 1973. — P. 45—56.

[15] Morley M. The number of countable models // J. Symb. Logic. — 1970. — Vol. 35. — P. 14—18.

[16] Pillay A. Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models // Ann. Pure Appl. Logic. — 1989. — Vol. 43, no. 2. — P. 147—160.

[17] Shelah S. Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models. — Amsterdam: North-Holland, 1990. — (Stud. Logic Foundations Math.; Vol. 92).

[18] Tanović P. On constants and the strict order property // Arch. Math. Logic. — 2006. — Vol. 45, no. 4. — P. 423—430.

[19] Tanović P. Theories with constants and three countable models // Arch. Math. Logic. — 2007. — Vol. 46, no. 5-6. — P. 517—527.

[20] Tsuboi A. Countable models and unions of theories // J. Math. Soc. Japan. — 1986. — Vol. 38, no. 3. — P. 501—508.

[21] Vaught R. Denumerable models of complete theories // Infinistic Methods. — London: Pergamon, 1961. — P. 303—321.