Когомологическая характеристика длины частично упорядоченного множества

А. Г. СУХОНОС
Институт прикладной математики ДВО РАН
e-mail: agsukh@mail.ru

УДК 512.667+512.667.5+512.562

Ключевые слова: топология Гротендика, пучковые когомологии, частично упорядоченные множества, когомологическая размерность, размерность лебеговского типа.

Аннотация

Рассматриваются топологии Гротендика на частично упорядоченном множестве, задаваемые одним семейством, и соответствующие пучковые когомологии. Устанавливается связь между данными когомологиями и длиной частично упорядоченного множества. Для этого на множестве цепей и антицепей данного частично упорядоченного множества определяются топологии Гротендика, строятся соответствующие теории пучковых когомологий и с их помощью изучается исходное частично упорядоченное множество.

Abstract

A. G. Sukhonos, A cohomological characteristic for the length and width of a partially ordered set, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 217—227.

Grothendieck topologies on a poset preset by one set and corresponding sheaf cohomologies are analyzed. The relation between the given cohomologies and the length of a poset is identified. For this purpose, Grothendieck topologies are defined on the set of the chains and antichains of the given poset; the corresponding theories of sheaf cohomologies are formed and with the help of those the poset is analyzed.

Известно, что теория сайтов Гротендика возникла в связи с задачами алгебраической геометрии и именно там нашла основные применения. Тем не менее сама общность этого понятия стимулировала попытки найти применение за пределами алгебраической геометрии. В работах [1, 2, 5] была развита общая теория топологии Гротендика и пучковых когомологий на частичных упорядоченных множествах. Как следствия получены новые результаты и подходы в таких разделах, как когомологическая теория топологических и равномерных пространств, теория пространств Чу (см. [3, 4]).

Теория пучков на топологизированных категориях допускает детальную разработку во многих аспектах (см. [1, 2, 5]). В данной работе стандартная схема построения теории пучков на топологических пространствах реализуется для частично упорядоченных множеств. На частично упорядоченном множестве зада-

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 217—227.

ётся топология Гротендика и описываются понятия «τ-размерность» и «когомологическая размерность». Показывается, что τ-размерность и когомологическая размерность частично упорядоченного множества совпадает с длиной частично упорядоченного множества. Строится когомологическая теория вялой размерности для частично упорядоченных множеств. Вводятся и изучаются понятия вялой размерности и размерности Бредона частично упорядоченного множества, устанавливается связь между данными размерностями и длиной частично упорядоченного множества.

Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Говорят, что его длина (ширина) равна n, если существует цепь (антицепь), содержащая $n+1$ элемент, и нет цепи (антицепи), содержащей большее количество элементов. Множество всех цепей (антицепей) в $(E, \leqslant)$ будем обозначать $\mathcal{C}(E, \leqslant)$ ($\mathcal{AC}(E, \leqslant)$) или просто $\mathcal{C}(E)$ ($\mathcal{AC}(E)$). Через $\mathcal{PC}(E)$ ($\mathcal{PAC}(E)$) будем обозначать множество всех подмножеств $\mathcal{C}(E)$ ($\mathcal{AC}(E)$). Ясно, что множество $\mathcal{PC}(E)$ ($\mathcal{PAC}(E)$) является решёткой относительно операций $\cap$ и $\cup$. Пусть $a, b \in \mathcal{PC}(E)$. Положим

$$\mathcal{C}_b^a = \Big\{c \in \mathcal{C}(E) \;\Big|\; \bigcup b \subseteq c,\ c \in a\Big\}.$$

Множество $\mathcal{C}_b^a$ при $a = \mathcal{C}(E)$ будем обозначать $\mathcal{C}_b$.

Лемма 1. *Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество и $a \in \mathcal{PC}(E)$. Тогда*

1) $\mathcal{C}_c^a = \bigcap\limits_{e \in c} \mathcal{C}_e^a$, *где* $c \in \mathcal{C}(E)$;
2) *для любых различных* $e', e'' \in E$ *выполнено* $\mathcal{C}_{e'}^a \cap \mathcal{C}_{e''}^a \neq \mathcal{C}_{e'}^a$;
3) *множество* $\{\mathcal{C}_e^a \mid e \in \bigcup a\}$ *состоит из максимальных элементов.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Существует такой набор $e_i \in E$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ попарно различных элементов, что $c = \bigcup\limits_{i=0}^{n} e_i$. С одной стороны,

$$\mathcal{C}_c^a = \Big\{c' \in \mathcal{C}(E) \mid \bigcup c \subseteq c',\ c' \in a\Big\} = \Big\{c' \in \mathcal{C}(E) \;\Big|\; \bigcup_{i=0}^{n} e_i \subseteq c',\ c' \in a\Big\}.$$

С другой стороны,

$$\bigcap_{e \in c} \mathcal{C}_e^a = \bigcap_{i=0}^{n} \mathcal{C}_{e_i}^a = \bigcap_{i=0}^{n} \{c' \in \mathcal{C}(E) \mid e_i \subseteq c',\ c' \in a\} = \\ = \Big\{c' \in \mathcal{C}(E) \;\Big|\; \bigcup_{i=0}^{n} e_i \subseteq c',\ c' \in a\Big\}.$$

Таким образом, $\mathcal{C}_c^a = \bigcap\limits_{e \in c} \mathcal{C}_e^a$.

Докажем утверждение 2). Предположим, что существуют такие $e', e'' \in E$, что $\mathcal{C}_{e'}^a \cap \mathcal{C}_{e''}^a = \mathcal{C}_{e'}^a$. Тогда $\mathcal{C}_{e'}^a \subseteq \mathcal{C}_{e''}^a$. Следовательно, цепь e' должна содержаться в $\mathcal{C}_{e''}^a$, но это невозможно, так как $\mathcal{C}_{e''}^a$ состоит из цепей, содержащих элемент e''.

Утверждение 3) следует из утверждения 1). $\square$

Пусть K — нижняя полурешётка. Говорят, что на K задана *топология Гротендика*, если для любого $a \in K$ зафиксирован класс $\tau(a)$ таких семейств $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$, что выполнены следующие условия:

$\tau1)$ $\{a\} \in \tau(a)$;

$\tau2)$ если $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ и $b \leqslant a$, то $\alpha \wedge b = \{a_i \wedge b \in K \mid i \in I\} \in \tau(b)$;

$\tau3)$ если $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ и $\alpha_i = \{a_{ij} \in K \mid j \in J_i\} \in \tau(a_i)$ $(i \in I)$, то $\beta = \{a_{ij} \in K \mid i \in I,\ j \in J\} \in \tau(a)$;

$\tau4)$ если $\beta = \{b_j \leqslant a \mid j \in J\}$ и существует такое $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$, что $\alpha \prec \beta$, то $\beta \in \tau(a)$.

Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество и $a \in \mathcal{PC}(E)$. Введём топологию Гротендика τ на $\mathcal{PC}(E)$. Определим класс $\tau(a)$, полагая $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PC}(E) \mid i \in I\} \in \tau(a)$ в том и только том случае, когда $\{\mathcal{C}^a_{\bigcup b} \mid b \subseteq a\} \prec \alpha$ и $a_i \leqslant a$ для любого $i \in I$. Нетрудно убедиться, что это топология Гротендика.

Лемма 2. *Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Класс $\{\tau(a) \mid a \in \mathcal{PC}(E)\}$ определяет топологию Гротендика на $\mathcal{PC}(E)$.*

Доказательство. Проверим аксиомы топологии Гротендика.

Пусть $\alpha = \{a\}$. Так как $\bigcup\limits_{b \subseteq a} \mathcal{C}^a_b = a$, то $\alpha = \{a\} \in \tau(a)$. Значит, выполнена аксиома $\tau1)$.

Пусть $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PC}(E) \mid i \in I\} \in \tau(a)$ и $d \subseteq a$. Чтобы проверить $\tau2)$, надо показать, что $\beta = \{a_i \cap d \mid i \in I\} \in \tau(d)$. Если $b \subseteq d$, то $b \subseteq a$. Значит, существует такое $i \in I$, что $\mathcal{C}^a_b \subseteq a_i$. Так как

$$\mathcal{C}^a_b \cap d = \Big\{c \in \mathcal{C}(E) \;\Big|\; \bigcup b \subseteq c,\ c \in a\Big\} \cap d =$$
$$= \Big\{c \in \mathcal{C}(E) \;\Big|\; \Big(\bigcup b\Big) \subseteq c,\ c \in a \cap d\Big\} = \Big\{c \in \mathcal{C}(E) \;\Big|\; \Big(\bigcup b\Big) \subseteq c,\ c \in a \cap d\Big\} = \mathcal{C}^d_b,$$

то $\mathcal{C}^d_b \subseteq a_i \cap d$.

Проверим аксиому $\tau3)$. Пусть $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PC}(E) \mid i \in I\} \in \tau(a)$, $\alpha_i = \{a_{ij} \in \mathcal{PC}(E) \mid j \in J_i\} \in \tau(a_i)$, $\gamma = \{a_{ij} \mid i \in I,\ j \in J_i\}$. Если $b \subseteq a$, то, поскольку $\alpha \in \tau(a)$, существует такое $i \in I$, что $\mathcal{C}^a_b \subseteq a_i$. Следовательно, $\mathcal{C}^a_b = \mathcal{C}^{a_i}_b$. Так как $\alpha_i \in \tau(a_i)$, то существует такое $j \in J_i$, что $\mathcal{C}^{a_i}_b \subseteq a_{ij}$. Отсюда $\gamma \in \tau(a)$.

Аксиома $\tau4)$ очевидна. $\square$

Данную топологию мы будем обозначать τ. Через β_E будем обозначать $\{\mathcal{C}^a_e \mid e \in E\}$.

Теорема 3. *Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Тогда*

1) *$\beta_E \in \tau(1)$ и покрытие β_E вписано в любое покрытие $\alpha \in \tau(1)$, где $1 = \mathcal{C}(E)$;*
2) *$\{\mathcal{C}_c\} \in \tau(\mathcal{C}_c)$ и покрытие $\{\mathcal{C}_c\}$ вписано в любое покрытие $\alpha \in \tau(\mathcal{C}_c)$, где $c \in \mathcal{C}(E)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PC}(E) \mid i \in I\} \in \tau(1)$. Так как для любого $e \in E$ существует такое $i \in I$, что $\mathcal{C}_e \subseteq a_i$, то $\beta_E \prec \alpha$. Поскольку для любого $b \in \mathcal{PC}(E)$ существует такое $e \in E$, что $e \in \bigcup b$, то из леммы 1 следует, что $\mathcal{C}_b \subseteq \mathcal{C}_e$. Таким образом, $\beta_E \in \tau(1)$.

Докажем утверждение 2). Пусть $c \in \mathcal{C}(E)$, $\alpha \in \tau(\mathcal{C}_c)$. Тогда $\{\mathcal{C}_b^{\mathcal{C}_c} \mid b \in \mathcal{C}_c\} \prec \alpha$. Поскольку $b \in \mathcal{C}_c$, то $\bigcup c \subset \bigcup b$. Из леммы 1 следует, что $\mathcal{C}_b^{\mathcal{C}_c} \subseteq \mathcal{C}_c^{\mathcal{C}_c}$ для любого $\bigcup c \subseteq \bigcup b$. Таким образом, $\{\mathcal{C}_c^{\mathcal{C}_c}\} \in \tau(\mathcal{C}_c)$ и $\{\mathcal{C}_c^{\mathcal{C}_c}\}$ вписано в любое покрытие α. $\square$

Если K — нижняя полурешётка с нулём, то *кратностью* $\text{кр}\,\alpha$ семейства $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$ называется такое минимальное целое число n, что если мощность множества $\sigma \subseteq I$ больше n, то $\bigcap\{a_i \mid i \in \sigma\} = \varnothing$. Число n называется *τ-размерностью a* [1—3], если в каждое τ-покрытие можно вписать τ-покрытие a кратности не выше $n+1$ и имеется τ-покрытие a кратности $n+1$, в которое нельзя вписать τ-покрытие a меньшей кратности.

Определение 4. Если $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, τ — топология Гротендика на $\mathcal{PC}(E)$, $a \in \mathcal{PC}(E)$, то *τ-размерность элемента a* будем обозначать через $\tau \operatorname{Dim} a$. Число $\tau \operatorname{Dim} \mathcal{C}(E)$ называется *τ-размерностью частично упорядоченного множества* $(E, \leqslant)$. Если $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PC}(E) \mid i \in I\} \in \tau(a)$, то *кратностью* $\text{кр}_c\,\alpha$ *семейства α в $c \in \mathcal{C}(E)$* назовём мощность множества $\{i \in I \mid c \in a_i\}$. Ясно, что если кратность α конечна, то она совпадает с максимумом кратностей $\text{кр}_c\,\alpha$ по всем точкам $c \in \mathcal{C}(E)$.

Теорема 5. *Для частично упорядоченного множества $(E, \leqslant)$ следующие условия эквивалентны*:

1) *длина $(E, \leqslant)$ равна n*;
2) $\tau \operatorname{Dim} \mathcal{C}(E) = n$;
3) $\text{кр}\,\beta_E = n + 1$.

Доказательство. Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Так как $\text{кр}\,\beta_E = n + 1$, то существует набор $e_0, \ldots, e_n$ попарно различных элементов из E, таких что $\bigcap\limits_{i=0}^{n} \mathcal{C}_{e_i} \neq \varnothing$. Следовательно, существует такая цепь $c \in a$, что $\{e_0, \ldots, e_n\} \in c$. Таким образом, длина цепи c больше или равна $n+1$. Так как для любого $e \in E$, отличного от элементов $e_0, \ldots, e_n$, выполнено $\Bigl(\bigcap\limits_{i=0}^{n} \mathcal{C}_{e_i}\Bigr) \cap \mathcal{C}_e = \varnothing$, то длина цепи c равна $n + 1$. Таким образом, длина $(E, \leqslant)$ равна n.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Так как существует цепь $c = \{e_0, \ldots, e_n\}$, то $\bigcap\limits_{i=0}^{n} \mathcal{C}_{e_i} \neq \varnothing$. Поскольку не существует цепи, длина которой больше $n + 1$, то $\bigcap\limits_{i=0}^{n+k} \mathcal{C}_{e_i} = \varnothing$, где $k > 0$. Таким образом, $\text{кр}\,\beta_E = n + 1$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\text{кр}\,\beta_E = n + 1$. Так как для любого $\alpha \in \tau(1)$ имеем $\beta_E \prec \alpha$, то $\tau \operatorname{Dim} \mathcal{C}(E) \leqslant n$. Поэтому для доказательства равенства $\tau \operatorname{Dim} \mathcal{C}(E) = n$ достаточно доказать, что в β_E нельзя вписать покрытие, кратность которого меньше $n+1$. Для этого убедимся, что для любого $\alpha \in \tau(1)$, такого что $\alpha \prec \beta_E$, $\text{кр}_e\,\alpha \geqslant \text{кр}_e\,\beta_E$. Заметим, что все элементы β_E, содержащие цепь e, принадлежат покрытию α. Таким образом, $\text{кр}_e\,\alpha \geqslant \text{кр}_e\,\beta_a$. $\square$

Отметим, что во многих случаях размерность $\tau\,\mathrm{Dim}$ монотонна.

Теорема 6. *Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Тогда $\tau\,\mathrm{Dim}\,a \leqslant \tau\,\mathrm{Dim}\,\mathcal{C}(E)$ для любого $a \subseteq \mathcal{C}(E)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{PC}(E)$, $a \neq \mathcal{C}(E)$. Тогда $\bigcup a \subseteq E$ и $\bigcup a \neq E$. Предположим, что $\tau\,\mathrm{Dim}\,\mathcal{C}(E) < \tau\,\mathrm{Dim}\,a$. Тогда $\text{кр}\,\beta_E < \text{кр}\,\beta_a$. Следовательно, $E \subseteq \bigcup a$. Противоречие. Таким образом, $\tau\,\mathrm{Dim}\,a \leqslant \tau\,\mathrm{Dim}\,\mathcal{C}(E)$. $\square$

Заметим, что при рассмотрении размерности и когомологий некоторого элемента $a \subseteq \mathcal{C}(E)$ мы можем (и в дальнейшем будем) предполагать, что $\bigcup a = E$. Действительно, если рассмотреть частично упорядоченное множество $\mathcal{C}\big(\bigcup a, \leqslant\big)$ и обозначить топологию Гротендика на $\mathcal{C}\big(\bigcup a, \leqslant\big)$ через $\tau_{\bigcup a}$, то для любого элемента $b \subseteq \mathcal{C}\big(\bigcup a, \leqslant\big)$ выполняется равенство $\tau(b) = \tau_{\bigcup a}(b)$.

Напомним определения, связанные с предпучками и топологией Гротендика [3, 5].

Пусть K — нижняя полурешётка и для любого $a \in K$ зафиксирована абелева группа $\mathcal{A}(a)$, такая что для любых $a, b \in K$, где $b \leqslant a$, существует гомоморфизм $\rho^a_b\colon \mathcal{A}(a) \to \mathcal{A}(b)$ и выполняются следующие условия:

pF1) если $a, b, c \in K$ такие, что $c \leqslant b \leqslant a$, то $\rho^a_c = \rho^b_c \circ \rho^a_b$;

pF2) $\rho^a_a = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(a)\colon \mathcal{A}(a) \to \mathcal{A}(a)$ — тождественное отображение.

Тогда $\mathcal{A}$ называют *абелевым предпучком на K*. Гомоморфизм ρ^a_b называется *гомоморфизмом ограничения*. Элемент $\rho^a_b(s) \in \mathcal{A}(b)$, где $s \in \mathcal{A}(a)$, будем обозначать $s|b$.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — предпучки на K. Отображение $u\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется *гомоморфизмом предпучков*, если для любых $a, b \in K$, таких что $b \leqslant a$, выполнено $\rho^a_b \circ u(b) = u(a) \circ \rho^a_b$, где $u(a)\colon \mathcal{A}(a) \to \mathcal{B}(a)$ — гомоморфизм абелевых групп.

Совокупность подгрупп $\mathcal{B}(k) \subset \mathcal{A}(k)$ $(k \in K)$ называется подпредпучком $\mathcal{A}$, если для любых $a \leqslant b$ $(a, b \in K)$, $s \in \mathcal{B}(a)$ выполнено $s|b \in \mathcal{B}(b)$. Таким образом, подпредпучок является также предпучком, а отображения ограничения в нём определяются так, чтобы включения $\mathcal{B}(k) \to \mathcal{A}(k)$ задавали гомоморфизм предпучков.

Пусть $u\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — гомоморфизм предпучков. Подпредпучок $\ker u$ предпучка $\mathcal{A}$ называется ядром гомоморфизма предпучков, если

$$(\ker u)(a) = \ker\big(u(a)\big)\colon \mathcal{A}(a) \to \mathcal{B}(a).$$

Подпредпучок $\mathrm{im}\,u$ предпучка $\mathcal{B}$ называется образом гомоморфизма предпучков, если $(\mathrm{im}\,u)(a) = \mathrm{im}\big(u(a)\big)\colon \mathcal{A}(a) \to \mathcal{B}(a)$.

Говорят, что последовательность предпучков

$$\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C}$$

точна, если последовательность абелевых групп

$$\mathcal{A}(a) \xrightarrow{u(a)} \mathcal{B}(a) \xrightarrow{v(a)} \mathcal{C}(a)$$

точна для любого $a \in K$.

Пусть $\mathcal{A}$ — предпучок на K, $a \in K$ и $s \in \mathcal{A}(a)$. Если существует такое $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$, что для любого $i \in I$ выполнено $s|a_i = 0$, то элемент s называется *τ-нулевым*. Если для любого $a \in K$ все $s \in \mathcal{A}(a)$ τ-нулевые, то *предпучок* $\mathcal{A}$ называется *τ-нулевым*.

Подпредпучок $\mathcal{A}$ предпучка $\mathcal{B}$ называется *τ-плотным* в предпучке $\mathcal{B}$, если для любых $a \in K$, $s \in B(a)$ существуют такие покрытие $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ и семейство $\{t_i \in \mathcal{A}(a_i) \mid i \in I\}$, что $t_i = s|a_i$ для любого $i \in I$.

Говорят, что последовательность предпучков

$$\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C}$$

τ-точна, если для любого $a \in K$ выполняются следующие условия:

1) для любого $s \in \mathcal{A}(a)$ элемент $(v \circ u)(s)$ τ-нулевой;
2) для любого $t \in \mathcal{B}(a)$, такого что $v(t) = 0$, существуют такие $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ и $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) \mid i \in I\}$, что для любого $i \in I$ выполнено $u(s_i) = t|a_i$.

Семейство $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) \mid i \in I\}$ называется *согласованным*, если $s_i|a_i \wedge a_j = s_j|a_i \wedge a_j$ для любых $i, j \in I$. Предпучок $\mathcal{A}$ на K называются *τ-пучком*, если для любого $a \in K$ выполняются следующие условия:

$\tau F1)$ для любых $s, t \in \mathcal{A}(a)$ и $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ из того, что $s|a_i = t|a_i$ для любого $i \in I$, следует $s = t$;

$\tau F2)$ для любого $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ и для любого согласованного семейства $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) \mid i \in I\}$ существует такой элемент $s \in \mathcal{A}(a)$, что $s|a_i = s_i$ для любого $i \in I$.

Под *категорией пучков* понимается полная подкатегория категории предпучков, состоящая из пучков.

Категория абелевых пучков является абелевой. Она содержит достаточно много инъективных объектов и удовлетворяет аксиоме Гротендика [5].

Последовательность τ-пучков $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ точна тогда и только тогда, когда она τ-точна как последовательность предпучков, ядро $\operatorname{Ker} u$ гомоморфизма пучков $u\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ совпадает с $\ker u$ в категории предпучков, а $\operatorname{Im} u$ определяется следующим образом: $s \in (\operatorname{Im} u)(a)$ в том и только том случае, когда существует такое $\{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$, что $s|a_i \in (\operatorname{im} u)(a_i)$ для любого $i \in I$. Отметим, что v является эпиморфизмом τ-пучков тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность τ-пучков, т. е. для любых $a \in K$, $s \in \mathcal{C}(a)$ существуют $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$ и семейство $\{r_i \in \mathcal{A}(a_i) \mid i \in I\}$, такое что $v(r_i) = s|a_i$ для любого $i \in I$. u — мономорфизм τ-пучков тогда и только тогда, когда $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B}$ — точная последовательность τ-пучков [5].

Известно, что для любого предпучка $\mathcal{A}$ существует такой гомоморфизм $u\colon \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$, что $\ker u$ — τ-нулевой предпучок, образ $\operatorname{im} u$ τ-плотен в $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ —

τ-пучок. Такой пучок $\tilde{\mathcal{A}}$ определён с точностью до изоморфизма и называется τ-пучком, порождённым предпучком $\mathcal{A}$.

Пусть $a \in K$, $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$ — семейство элементов и $\mathcal{A}$ — предпучок на K. Стандартным образом (см. [5]) строится цепной комплекс $C^*(\alpha, \mathcal{A})$, т. е. последовательность вида

$$0 \to C^0(\alpha, \mathcal{A}) \xrightarrow{d^0} C^1(\alpha, \mathcal{A}) \xrightarrow{d^1} C^2(\alpha, \mathcal{A}) \to \dots,$$

где $d^k \circ d^{k-1} = 0$. А именно для любого $p \geqslant 0$ полагаем

$$C^p(\alpha, \mathcal{A}) = \prod \{\mathcal{A}(a_s) \mid s \in I^{n+1}\},$$

где $a_s = a_{i_0} \cap \ldots \cap a_{i_n}$ для $s = (i_0, \ldots, i_n)$. Таким образом, $\delta \in C^p(\alpha, \mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $\delta = \{\delta_s \in \mathcal{A}(a_s) \mid s \in I^{n+1}\}$. *Кограничное отображение*

$$d^p \colon C^p(\alpha, \mathcal{A}) \to C^{p+1}(\alpha, \mathcal{A})$$

задаётся равенством

$$(d^p\delta)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \delta_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{p+1}} | a_{i_0,\ldots,i_{p+1}},$$

где $\hat{i}_k$ означает, что данный индекс пропускается. Будем обозначать через $H^p(\alpha, \mathcal{A}) = H^p\big(C^*(\alpha, \mathcal{A})\big)$ *p-ю группу когомологий цепного комплекса* $C^*(\alpha, \mathcal{A})$. *Когомологии Александрова—Чеха элемента a с коэффициентами в τ-пучке* $\mathcal{A}$ определяются равенством

$$\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = \varinjlim_{\tau(a)} H^n(\alpha, \mathcal{A}).$$

Когомологии Гротендика $H^n_\tau(a, \mathcal{A})$ — это $R^n\Gamma_a$, где R^n — правый производный функтор и Γ_a — такой функтор из категории τ-пучков в категорию абелевых групп, что $\Gamma_a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$.

Пусть $a \in K$. Покрытие $\beta \in \tau(a)$, которое можно вписать в любое покрытие $\alpha \in \tau(a)$, назовём минимальным покрытием элемента a. Заметим, что если β — минимальное покрытие, то для любого предпучка $\mathcal{A}$ выполняется равенство $\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = H^n_\tau(\beta, \mathcal{A})$.

Лемма 7. *Пусть K — нижняя полурешётка, τ — топология Гротендика на K и каждый элемент $a \in K$ обладает минимальным τ-покрытием β_a. Предпучок $\mathcal{A}$ на K является τ-нулевым в том и только том случае, если $s|b = 0$ для любых $a \in K$, $s \in \mathcal{A}(a)$ и элемента b покрытия β_a. В частности, если $\{b\}$ является минимальным покрытием b, то $\mathcal{A}(b) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $a \in K$, $s \in \mathcal{A}(a)$. Так как предпучок $\mathcal{A}$ τ-нулевой, то существует такое покрытие $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\} \in \tau(a)$, что для любого $i \in I$ выполнено $s|a_i = 0$. Поскольку $\beta_a \prec \alpha$, то для любого элемента $b \in \beta_a$ существует такое $i \in I$, что $b \leqslant a_i$. Следовательно, для любого $b \in \beta_a$ справедливо $s|b = s|a_i|b = 0$.

Достаточность очевидна. □

Теорема 8. *Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество и $\mathcal{A}$ — τ-нулевой предпучок на $\mathcal{PC}(E)$. Тогда $\check{H}^n_\tau(\mathcal{C}(E), \mathcal{A}) = 0$ для любого $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Покажем, что если β_E — минимальное покрытие, то $H^n(\beta_E, \mathcal{A}) = 0$. Точнее, убедимся, что $C^n(\beta_E, \mathcal{A}) = 0$. Пусть $\delta \in C^n(\beta_E, \mathcal{A}) = 0$, $s = (i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$, $\delta_s \in \mathcal{A}\Bigl(\bigcap\limits_{j=0}^{n} \mathcal{C}_{e_{i_j}}\Bigr)$, где $c = \{e_{i_0}, \dots, e_{i_n}\}$. Из леммы 1 следует, что $\bigcap\limits_{j=0}^{n} \mathcal{C}_{e_{i_j}} = \mathcal{C}_c$. Заметим, что $\{\mathcal{C}_c\}$ — минимальное τ-покрытие $\mathcal{C}_c$. Тогда по лемме 7 $\mathcal{A}(\mathcal{C}_c) = 0$. Таким образом, $\delta_s = 0$ во всех случаях, а значит, $C^n(\beta_E, \mathcal{A}) = 0$. □

Теорема 9. *Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $\tilde{\mathcal{A}}$ — τ-пучок, порождённый $\mathcal{A}$. Тогда*

1) *$\check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A}) = H^n_\tau(a, \tilde{\mathcal{A}})$ для любого $a \in \mathcal{PC}(E)$;*
2) *для любого предпучка $\mathcal{A}$ на $\mathcal{PC}(E)$ выполняется*
$$H^n_\tau(\mathcal{C}(E), \tilde{\mathcal{A}}) = \check{H}^n_\tau(\mathcal{C}(E), \mathcal{A}) = H^n(\beta_E, \mathcal{A});$$
если $\mathcal{A}(0) = 0$, то все эти группы равны $\check{H}^n_\tau(\mathcal{C}(E), \tilde{\mathcal{A}})$;
3) *если $n = \tau \operatorname{Dim} \mathcal{C}(E)$, то для любого $m > n$ и для любого абелева предпучка $\mathcal{A}$ справедливо $\check{H}^m_\tau(\mathcal{C}(E), \mathcal{A}) = H^m(\beta_E, \mathcal{A}) = 0$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Равенство $H^n_\tau(a, \tilde{\mathcal{A}}) = \check{H}^n_\tau(a, \mathcal{A})$ можно получить из теоремы 6 и спектральной последовательности, связывающей когомологии Чеха и Гротендика [5]. Необходимые детали для случая полурешёток можно найти в [3, 4].

Докажем утверждение 2). Из 1) получаем $H^n_\tau(\mathcal{C}(E), \tilde{\mathcal{A}}) = \check{H}^n_\tau(\mathcal{C}(E), \mathcal{A})$. Равенство $\check{H}^n_\tau(\mathcal{C}(E), \mathcal{A}) = H^n(\beta_E, \mathcal{A})$ очевидно.

Утверждение 3) следует из 2) и того факта, что семейства элементов нижней полурешётки с коэффициентами в любом предпучке с условием $\mathcal{A}(0) = 0$ равны нулю, когда m — число, большее чем кратность β (см., например, [3, 4]). □

Покажем, что для частично упорядоченного множества размерность характеризуется когомологически.

Лемма 10. *Пусть $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Существует такой предпучок $\mathcal{A}$ на $\mathcal{PC}(E)$, что $H^n(\beta_E, \mathcal{A}) \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим предпучок $\mathcal{A}$, такой что $\mathcal{A}(\mathcal{C}_{e_0} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{e_n}) = \mathcal{C}$ и $\mathcal{A}(b) = 0$ для остальных $b \in \mathcal{PC}(E)$ и $\rho^c_d = 0$ при $c \neq d$. Когомологии Чеха можно вычислять по кососимметрическим коцепям (см. [5]), т. е. по коцепному комплексу $C^*_a(\beta_E, \mathcal{A}) \subset C^*(\beta_E, \mathcal{A})$, поэтому если $\delta \in C^*(\beta_E, \mathcal{A})$, то $\delta_s = 0$ для любого $s \in I^{n+1}$, содержащего повторяющиеся индексы.

Покажем, что существует такой набор попарно различных элементов $\{\mathcal{C}_{e_0}, \dots, \mathcal{C}_{e_n}\} \subseteq \beta_E$, что пересечение любого набора попарно различных элементов из β_E при $k \neq n$ не равно $\mathcal{C}_{e_0} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{e_n} \neq 0$.

Предположим, что

$$\mathcal{C}_{e_{i_0}} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{e_{i_k}} = \mathcal{C}_{e_0} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{e_n} \neq 0,$$

где $k \neq n$ и $e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}$ — набор попарно различных элементов. Пусть $k < n$ и $c \in \mathcal{C}_{e_{i_0}} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{e_{i_k}}$ такой, что $c = \{e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}\}$. Тогда существует такое i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, что элемент $e_i \in E$ отличен от $e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}$. Так как $c \in \mathcal{C}_{e_0} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{e_n}$, то $e_i \in c$, что противоречит выбору c.

Таким образом, группы $C_a^{n-1}(\beta_E, \mathcal{A})$ и $C_a^{n+1}(\beta_E, \mathcal{A})$ нулевые, $C_a^n(\beta_E, \mathcal{A}) \neq 0$. Поэтому $H^n(\beta_E, \mathcal{A}) \neq 0$. □

Определение 11. Для частично упорядоченного множества $(E, \leqslant)$ определим когомологическую размерность элемента $a \in \mathcal{PC}(E)$ следующим образом:

$$c\tau D_{\mathcal{A}} a \leqslant n \iff \check{H}_\tau^{n+k}(a, \mathcal{A}) = 0 \ \text{ для любого } \ k > 0,$$
$$c\tau D a \leqslant n \iff \check{H}_\tau^{n+k}(a, \mathcal{A}) = 0 \ \text{ для любых предпучков } \mathcal{A} \text{ и } k > 0.$$

Следующий результат — следствие леммы 10 и теоремы 5.

Теорема 12. *Если $(E, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, то существует предпучок $\mathcal{A}$ на $\mathcal{PC}(E)$, такой что $H^n(\beta_E, \mathcal{A}) \neq 0$ и $\tau \operatorname{Dim} \mathcal{C}(E) = c\tau D\mathcal{C}(E)$.*

По аналогии с соответствующими топологическими понятиями определим вялую размерность и размерность Бредона частично упорядоченного множества.

Определение 13. Пусть $\mathcal{A}$ — τ-пучок на $\mathcal{PC}(E)$, где τ — топология Гротендика на $\mathcal{PC}(E)$, $a \in \mathcal{PC}(E)$. Пучок $\mathcal{A}$ назовём *a-вялым*, если отображение ограничения $\mathcal{A}(a) \to \mathcal{A}(b)$ является эпиморфизмом для любого $b \subseteq a$.

Резольвентой τ-пучка $\mathcal{A}$ на K (обозначение $\mathcal{A}^*$) называют точную последовательность

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}^2 \to \ldots,$$

где для любого $k \geqslant 0$ $\mathcal{A}^k$ — τ-пучки на K.

Если τ-пучок обладает a-вялой резольвентой длины n и не обладает резольвентой меньшей длины, то говорят, что *вялая размерность* $\mathcal{A}$ равна n (обозначение $\operatorname{Bd}_{\mathcal{A}} a = n$). Максимум $\operatorname{Bd}_{\mathcal{A}} a = n$ по всем τ-пучкам $\mathcal{A}$ называется *размерностью Бредона* $\operatorname{Bd} a$ элемента a.

Следующая лемма — частный случай результата из [2].

Лемма 14. *Пусть K — нижняя полурешётка, τ — топология Гротендика на K, $a \in S \subseteq K_a$, где $K_a = \{c \in K \mid c \leqslant a\}$. Если всякий вялый τ-пучок $\mathcal{A}$ ацикличен и существует такое $m \geqslant 0$, что для любого τ-пучка $\mathcal{B}$ справедливо $H_\tau^n(\mathcal{C}(E), \tilde{\mathcal{B}}) = 0$, где $b \in S$ и $n \geqslant m+1$, то $\operatorname{Bd} u \leqslant m+1$.*

Напомним определение когомологий пары [3, 4]. Если K — нижняя полурешётка, $a, b \in K$, $b \leqslant a$, $\mathcal{A}$ — τ-пучок, то имеется точная последовательность

$$0 \to \Gamma_{a,b}(\mathcal{A}) \to \Gamma_a(\mathcal{A}) \to \Gamma_b(\mathcal{A}),$$

где $\Gamma_a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$, $\Gamma_{a,b}(\mathcal{A}) = \ker\bigl(\mathcal{A}(a) \to \mathcal{A}(b)\bigr)$. В этом случае $(R^n\Gamma_{a,b})(\mathcal{A})$, где R^n — n-й правый производный функтор, обозначается через $H^n(a,b,\mathcal{A})$. Известно [3, 4], что имеется точная последовательность пары (a,b):

$$\ldots \to H^k(a,b,\mathcal{A}) \to H^k(a,\mathcal{A}) \to H^k(b,\mathcal{A}) \to H^{k+1}(a,b,\mathcal{A}) \to \ldots .$$

В [3, 4] рассмотрены характеристики вялой размерности, относящиеся к произвольным сайтам Гротендика, которые для случая частично упорядоченного множества могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 15. *Пусть $\mathcal{A}$ — τ-пучок на $\mathcal{PC}(E)$ и a — фиксированный элемент $\mathcal{PC}(E)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}\, a \leqslant n$;
2) *для любой резольвенты $\mathcal{A}$ длины n*
$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}^0 \to \ldots \to \mathcal{A}^n \to 0$$
из того что для любого $0 \leqslant i \leqslant n-1$ τ-пучок $\mathcal{A}^i$ a-вялый, следует, что τ-пучок $\mathcal{A}^n$ a-вялый;
3) $H^{n+1}(a,b,\mathcal{A}) = 0$ *для любого $b \leqslant a$*;
4) $H^k(a,b,\mathcal{A}) = 0$ *для любых $b \leqslant a$, $k > n$*;
5) $H^n(a,\mathcal{A}) \to H^n(b,\mathcal{A})$ — *эпиморфизм для любого $b \leqslant a$*;
6) $H^{n+1}(a,b,\mathcal{A}) \to H^{n+1}(a,\mathcal{A})$ — *мономорфизм для любого $b \leqslant a$.*

Следующая теорема определяет связь между вялой размерностью и размерностью частично упорядоченных множеств.

Теорема 16. *Пусть $(E,\leqslant)$ — частично упорядоченное множество, $a \in \mathcal{PC}(E)$, τ — топология Гротендика на $\mathcal{PC}(E)$. Тогда*

1) $\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}\, a \leqslant c\tau D_{\mathcal{A}} a + 1$;
2) $\mathrm{Bd}\,\mathcal{C}(E) \leqslant \tau\,\mathrm{Dim}\,\mathcal{C}(E) + 1$.

Доказательство. По теореме 6 $\tau\,\mathrm{Dim}\, b \leqslant \tau\,\mathrm{Dim}\, a$. Поэтому если $\tau\,\mathrm{Dim}\, a = n$, то $H^{n+k}_\tau(a,\mathcal{A}) = H^{n+k}_\tau(b,\mathcal{A})$ для любых $\mathcal{A}$ и $k \geqslant 1$. Из точной последовательности пары (a,b) получаем, что $H^{n+k}_\tau(a,b,\mathcal{A}) = 0$ при $k \geqslant 2$. По теореме 15 это влечёт $\mathrm{Bd}_{\mathcal{A}}\, a \leqslant n+1 \leqslant c\tau D_{\mathcal{A}} a + 1$.

Утверждение 2) следует из 1). □

Все результаты, доказанные для множества $\mathcal{C}(E)$ будут справедливы для множества $\mathcal{AC}(E)$. Сформулируем результаты для антицепей.

Пусть $(E,\leqslant)$ — частично упорядоченное множество и $a, b \in \mathcal{APC}(E)$. Тогда через $\mathcal{AC}^a_b$ будем обозначать множество $\bigl\{c \in \mathcal{AC}(E) \mid \bigcup b \subseteq c,\ c \in a\bigr\}$. Множество $\mathcal{AC}^a_b$ при $a = \mathcal{AC}(E)$ будем обозначать $\mathcal{AC}_b$. Введём топологию Гротендика τ' на $\mathcal{PAC}(E)$. Определим класс $\tau'(a)$, полагая $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PAC}(E) \mid i \in I\} \in \tau'(a)$ в том и только том случае, когда $\{\mathcal{AC}^a_{\bigcup b} \mid b \subseteq a\} \prec \alpha$ и $a_i \leqslant a$ для любого $i \in I$. Нетрудно убедиться, что это топология Гротендика. Через β'_E будем обозначать семейство $\{\mathcal{AC}^a_e \mid e \in E\}$.

Через $\tau' \operatorname{Dim} a$ будем обозначать *τ'-размерность элемента* a. Число $\tau' \operatorname{Dim} \mathcal{AC}(E)$ будем называть *τ'-размерностью частично упорядоченного множества* $(E, \leqslant)$.

Теорема 5′. *Для частично упорядоченного множества* $(E, \leqslant)$ *следующие условия эквивалентны*:

1) *ширина* $(E, \leqslant)$ *равна* n;
2) $\tau' \operatorname{Dim} \mathcal{AC}(E) = n$;
3) кр $\beta'_E = n + 1$.

Определение 11′. Для частично упорядоченного множества $(E, \leqslant)$ определим когомологическую размерность элемента $a \in \mathcal{PAC}(E)$ следующим образом:

$$c\tau' D_{\mathcal{A}} a \leqslant n \Longleftrightarrow \check{H}^{n+k}_{\tau'}(a, \mathcal{A}) = 0 \text{ для любого } k > 0,$$

$$c\tau' D a \leqslant n \Longleftrightarrow \check{H}^{n+k}_{\tau'}(a, \mathcal{A}) = 0 \text{ для любых предпучков } \mathcal{A} \text{ и } k > 0.$$

Теорема 12′. *Если* $(E, \leqslant)$ — *частично упорядоченное множество, то существует предпучок* $\mathcal{A}$ *на* $\mathcal{PAC}(E)$, *такой что* $H^n(\beta'_E, \mathcal{A}) \neq 0$ *и* $\tau' \operatorname{Dim} \mathcal{AC}(E) = c\tau' D\mathcal{AC}(E)$.

Теорема 16′. *Пусть* $(E, \leqslant)$ — *частично упорядоченное множество,* τ' — *топология Гротендика на* $\mathcal{PAC}(E)$, $a \in \mathcal{PAC}(E)$. *Тогда*

1) $\operatorname{Bd}_{\mathcal{A}} a \leqslant c\tau' D_{\mathcal{A}} a + 1$;
2) $\operatorname{Bd} \mathcal{AC}(E) \leqslant \tau' \operatorname{Dim} \mathcal{AC}(E) + 1$.

Литература

[1] Скурихин Е. Е. Пучковые когомологии и размерность частично упорядоченных множеств // Тр. ММО. — 2002. — Т. 239. — С. 289—317.

[2] Скурихин Е. Е. Пучковые когомологии и размерность частично упорядоченных множеств. — Владивосток: Дальнаука, 2004.

[3] Скурихин Е. Е. Когомологии и размерности топологических и равномерных пространств. — Владивосток: Дальнаука, 2008.

[4] Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г. Топология Гротендика на пространствах Чу // Мат. тр. — 2008. — Т. 11, № 2. — С. 159—186.

[5] Artin M. Grothendieck Topologies. — Amer. Math. Soc., 1962.