О разрешимости групп с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой

Д. Я. ТРЕБЕНКО
Национальный педагогический университет им. М. П. Драгоманова, Украина
e-mail: treben@meta.ua

О. А. ТРЕБЕНКО
Киевская государственная академия водного транспорта им. гетмана П. Конашевича-Сагайдачного, Украина

УДК 512.542

Ключевые слова: конечные группы, дополняемые подгруппы, нильпотентные подгруппы.

Аннотация

Исследуются группы, в которых дополняема каждая подгруппа, содержащая фиксированную конечную нильпотентную подгруппу.

Abstract

D. Ya. Trebenko, O. A. Trebenko, On solvability of groups with a finite nilpotent supercomplemented subgroup, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 229—234.

We investigate groups in which every subgroup containing some fixed finite nilpotent subgroup has a complement.

1. Введение

Напомним, что подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует некоторая подгруппа B, такая что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, впервые были рассмотрены Ф. Холлом [9]. Полное конструктивное описание произвольных групп, в которых все подгруппы дополняемы, было получено Н. В. Черниковой [1, 6]. В [1] такие группы были названы вполне факторизуемыми. Согласно теореме Н. В. Черниковой [1,6] вполне факторизуемые группы разрешимы (более точно, метабелевы) и локально конечны.

Подгруппа H группы G называется сверхдополняемой в G, если каждая подгруппа группы G, содержащая H, дополняема в G (В. А. Крекнин, 2005). В [3, 7] и [8, 11] изучались соответственно локально ступенчатые p-группы и RN-группы со сверхдополняемой циклической p-подгруппой. В частности, были доказаны локальная конечность и разрешимость таких групп. Продолжая исследования [7,8,11], естественно рассмотреть группы с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой.

Напомним также, что группа называется локально ступенчатой, если каждая её неединичная конечно порожденная подгруппа обладает истинной подгруппой конечного индекса (С. Н. Черников, 1970). (Под истинной подгруппой группы G мы понимаем подгруппу, отличную от G.) Класс всех локально ступенчатых групп содержит класс всех RN-групп, также чрезвычайно широкий. К примеру, все разрешимые и локально разрешимые группы, группы всех классов Куроша—Черникова, радикальные (в смысле Б. И. Плоткина) группы являются RN-группами.

Основными результатами настоящей статьи являются теоремы 1—3.

Теорема 1. *Пусть G — RN-группа с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой H. Тогда*

1) *G локально конечна и разрешима*;
2) *G финитно аппроксимируема.*

Следствие 1. *Пусть G — локально гиперабелева группа с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой. Тогда справедливы утверждения* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

Следствие 2. *Пусть G — локально разрешимая группа с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой. Тогда справедливы утверждения* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

Следствие 3. *Пусть G — радикальная* (*в смысле Б. И. Плоткина*) *группа с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой. Тогда справедливы* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

Теорема 2. *Пусть G — периодическая локально ступенчатая группа с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой, $2 \notin \pi(G)$. Тогда справедливы утверждения* 1) *и* 2) *теоремы* 1.

Следствие 4. *Пусть G — периодическая локально конечная группа с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой, $2 \notin \pi(G)$. Тогда G разрешима и финитно аппроксимируема.*

Следствие 5. *Пусть G — периодическая финитно аппроксимируемая группа с конечной нильпотентной сверхдополняемой подгруппой, $2 \notin \pi(G)$. Тогда G локально конечна и разрешима.*

Требование принадлежности группы G классу RN-групп в теореме 1 настоящей статьи и в теореме 1 из [11] и требование отсутствия инволюций в G в случае, когда G — периодическая локально ступенчатая группа, в теореме 2 настоящей статьи являются существенными ввиду следующей теоремы.

Теорема 3. *Существует неразрешимая локально ступенчатая группа со сверхдополняемой циклической p-подгруппой.*

В дальнейшем $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, $p, q \in \mathbb{P}$; $\pi(G)$ — множество всех $p \in \mathbb{P}$, для которых группа G обладает элементом порядка p. Как обычно, для действительного числа r через $[r]$ обозначается наибольшее целое число, не превышающее r. Если A — подгруппа группы G, то $A_G = \bigcap\limits_{g \in G} A^g$. Для произвольной разрешимой группы X $d(X)$ — ступень разрешимости группы X. Остальные обозначения стандартны.

2. Предварительные результаты

Лемма 1 [11]. *Пусть G — группа со сверхдополняемой подгруппой H и $H \subseteq K \leqslant G$, и пусть φ — гомоморфизм группы K. Тогда группа H^φ сверхдополняема в K^φ.*

Лемма 2 [8]. *Пусть G — группа со сверхдополняемой подгруппой H порядка m. Если элементарная абелева q-подгруппа Q группы G является её минимальной нормальной подгруппой, то либо $m \neq 1$ и $|Q| \leqslant q^{(m-1)m} m^m$, либо $m = 1$ и $|Q| = q$.*

Замечание 1. Ввиду теоремы Цассенхауза для произвольного $n \in \mathbb{N}$ ступени разрешимости разрешимых линейных групп степени не выше n над полями ограничены некоторым натуральным числом $\zeta(n)$, зависящим только от n (см., например, [12, теорема 3.7]).

Предложение 1. *Пусть G — конечная разрешимая группа с нильпотентной сверхдополняемой подгруппой H порядка m. Тогда $d(G) \leqslant \zeta(n) + m! + 1$, где $n = \max\{[m(m-1) + m\log_2 m], 1\}$.*

Доказательство. Если $G = 1$, то предложение справедливо. Пусть $G \neq 1$, и пусть

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s = 1 -$$

главный ряд группы G. G_i/G_{i+1} — элементарная абелева q-группа для некоторого простого числа $q = q(i)$. Поскольку G_i/G_{i+1} — минимальная нормальная подгруппа группы G/G_{i+1} и HG_{i+1}/G_{i+1} — сверхдополняемая подгруппа порядка не выше m группы G/G_{i+1} (см. лемма 1), с учётом леммы 2 получаем, что

$$|G_i/G_{i+1}| \leqslant q^n,$$

где либо $n = 1$, если $m = 1$, либо $n = [m(m-1) + m\log_2 m]$, если $m \neq 1$. Поскольку группа $G/C_G(G_i/G_{i+1})$ изоморфно вложима в $\mathrm{GL}_n(q)$, по теореме Цассенхауза (см. замечание 1)

$$d\big(G/C_G(G_i/G_{i+1})\big) \leqslant \zeta(n).$$

Тогда

$$d\left(G/\bigcap_{i=0}^{s-1} C_G(G_i/G_{i+1})\right) \leqslant \zeta(n). \tag{1}$$

Покажем, что ступень разрешимости группы $F = \bigcap_{i=0}^{s-1} C_G(G_i/G_{i+1})$ не превышает числа $m! + 1$. Ввиду, например, [10, теорема III.4.3] группа F нильпотентна.

Пусть Q — произвольная силовская q-подгруппа группы F, $q \in \mathbb{P}$. По лемме 1 H — сверхдополняемая подгруппа группы QH. Пусть Q_0 — силовская q-подгруппа группы QH, содержащая Q. Ввиду леммы С. Н. Черникова (см., например, [5, лемма 1.8]) $Q_0 = Q(H \cap Q_0)$, где $H \cap Q_0$ — силовская q-подгруппа группы H. Так как группа H нильпотентна, то $H \cap Q_0 \trianglelefteq H$. Тогда, очевидно, $Q_0 \trianglelefteq QH$.

Пусть $N = \{g \in Z(Q_0) \mid g^q = 1\}$. Подгруппа HN обладает некоторым дополнением $M \subseteq Q_0$ в G. Так как группа N элементарная абелева, $H \cap N$ имеет некоторое дополнение D в N. Очевидно,

$$HN = HD, \quad NM = N \times M. \tag{2}$$

Так как Q_0 — конечная q-группа, то каждая её неединичная нормальная подгруппа имеет неединичное пересечение с $Z(Q_0)$, а следовательно, и с N. Однако $M_{Q_0} \trianglelefteq Q_0$ и $M_{Q_0} \cap N = 1$. Значит, $M_{Q_0} = 1$.

Поскольку $G = HNM$ и $HN \cap M = 1$, то с учётом (2) получаем, что

$$G = (HD)M = H(DM), \quad H \cap (DM) = 1.$$

Отсюда вытекает, что $|G : DM| = |H| = m$, и поэтому $|Q_0 : DM|$ делит m. Тогда ввиду [2, предложение 12.2.2] $|Q_0 : (DM)_{Q_0}|$ делит $m!$. Так как $D \subseteq N \subseteq Z(Q_0)$, то, очевидно, $D \subseteq (DM)_{Q_0}$. Тогда ввиду леммы С. Н. Черникова, упомянутой выше, для некоторой $L \leqslant M$ имеем $(DM)_{Q_0} = D \times L$. Поэтому для произвольного $g \in Q_0$

$$(DM)_{Q_0} = (DM)_{Q_0}^g = (D \times L)^g = D \times L^g.$$

Тогда $(DM)_{Q_0}/L^g \simeq D$, т. е. $(DM)_{Q_0}/L^g$ — элементарная абелева группа. Ввиду теоремы Ремака $(DM)_{Q_0}/\bigcap_{g \in Q_0} L^g$ — элементарная абелева группа. Однако $\bigcap_{g \in Q_0} L^g \subseteq M_{Q_0} = 1$. Таким образом, $(DM)_{Q_0}$ — элементарная абелева нормальная подгруппа группы Q_0 индекса, делящего $m!$. Поэтому $d(Q_0) \leqslant m!+1$, откуда $d(Q) \leqslant m! + 1$.

Таким образом, F разлагается в прямое произведение разрешимых подгрупп ступени разрешимости не выше $m! + 1$. Поэтому

$$d(F) \leqslant m! + 1. \tag{3}$$

Из (1) и (3) выводим, что

$$d(G) \leqslant \zeta(n) + m! + 1,$$

где

$$n = \max\{[m(m-1) + m \log_2 m], 1\}.$$

Предложение доказано. □

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Предположим, что каждая конечно порождённая подгруппа G^* группы G, содержащая H, конечна и разрешима. Тогда группа G локально конечна. Пусть $|H| = m$. По предложению 1

$$d(G^*) \leqslant \zeta(n) + m! + 1,$$

где

$$n = \max\{[m(m-1) + m\log_2 m], 1\}.$$

Тогда группа G разрешима и

$$d(G) \leqslant \zeta(n) + m! + 1.$$

Следовательно, доказательство сводится к случаю, когда группа G является конечно порождённой.

Пусть K — пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G, что фактор-группа G/N разрешима и конечна. По лемме 1 и предложению 1

$$d(G/N) \leqslant \zeta(n) + m! + 1.$$

Отсюда следует, что группа G/K разрешима и

$$d(G/K) \leqslant \zeta(n) + m! + 1.$$

Тогда ввиду [8, лемма 5] группа G/K конечна.

Покажем, что $K = 1$. Предположим противное. Пусть $K \neq 1$. Так как $|G : K| < \infty$ и G является конечно порождённой, по теореме Шрейера—Дика [4] RN-группа K также является конечно порождённой. Пусть M — некоторое конечное порождающее множество группы K, $\mathcal{A}$ — нормальная система с абелевыми факторами группы K и $U = \bigcup\limits_{T \neq K} T$, $T \in \mathcal{A}$. Так как для каждой $T \in \mathcal{A}$, $T \neq K$, конечное множество M не содержится в T, очевидно, что U не содержит M. Поэтому $U \neq K$. Легко убедиться, что $U \lhd K$ и фактор-группа K/U абелева. Следовательно,

$$K' \neq K. \tag{4}$$

Если $|K : K'| < \infty$, то группа G/K' конечна и разрешима, следовательно, $K' \supseteq K$. Но это противоречит (4). Таким образом, индекс $|K : K'|$ бесконечен. Возьмём произвольное простое число p. Так как фактор-группа K/K' бесконечная, абелева и конечно порождённая, $(K/K')^p \neq K/K'$. Пусть $(K/K')^p = L/K'$. Тогда $L \trianglelefteq G$, $L \subseteq K$ и фактор-группа K/L неединичная конечная абелева. Отсюда получаем, что G/L конечна и разрешима, что противоречит выбору K.

Таким образом, $K = 1$. Тогда группа G конечна и разрешима. Утверждение 1) доказано.

Возьмём произвольный элемент $1 \neq g \in G$. Рассмотрим подгруппу $R = \langle H, g\rangle$. Ввиду утверждения 1) подгруппа R конечна. Поскольку H сверхдополняема в G, то R дополняема в G. Пусть T — некоторое дополнение к R в G.

Так как $|G : T| < \infty$, то по теореме Пуанкаре существует нормальная подгруппа N группы G, такая что $N \subseteq T$ и $|G : N| < \infty$. Очевидно, что $g \notin N$. Ввиду произвольности g группа G финитно аппроксимируема. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Так как периодическая группа G без инволюций локально ступенчата тогда и только тогда, когда она является RN-группой (см. [11, предложение 4]), в силу теоремы 1 утверждение доказываемой теоремы справедливо. $\square$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим проективную специальную линейную группу $\mathrm{PSL}_2(7)$ порядка 168. Её максимальные подгруппы могут быть изоморфны только группе S_4 и группе Фробениуса порядка 21. В одной из подгрупп, изоморфных группе Фробениуса порядка 21, выберем подгруппу H порядка 7 и покажем, что H сверхдополняема в G.

Любая подгруппа группы $\mathrm{PSL}_2(7)$, изоморфная S_4, очевидно, дополняет H в G. Группа Фробениуса порядка 21, содержащая H, дополняется силовскими 2-подгруппами группы $\mathrm{PSL}_2(7)$. Группа $\mathrm{PSL}_2(7)$ не содержит подгрупп порядков 14, 28, 42, 56, 84, поскольку в противном случае они содержались бы в некоторой максимальной подгруппе, отличной от S_4 и группы Фробениуса порядка 21. Таким образом, каждая подгруппа группы $\mathrm{PSL}_2(7)$, содержащая H, дополняема, следовательно, H сверхдополняема в $\mathrm{PSL}_2(7)$. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Баева (Черникова) Н. В. Вполне факторизуемые группы // ДАН СССР. — 1953. — Т. 92, № 5. — С. 877—880.

[2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.

[3] Крекнін В. А. Локально ступінчасті 2-групи з наддоповнюваною циклічною підгрупою // Зб. праць Інст. мат. НАН України. — 2005. — Т. 2, № 3. — С. 137—209.

[4] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[5] Черников Н. С. Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. — Киев: Наукова думка, 1987.

[6] Черникова Н. В. Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. — 1956. — Т. 39, № 3. — С. 273—292.

[7] Chernikov N. S., Kreknin V. A., Trebenko O. O. A generalization of completely factorizable groups // Matem. Stud. — 2005. — Vol. 23, no. 2. — P. 129—135.

[8] Chernikov N. S., Trebenko O. O. RN-groups with a supercomplemented cyclic p-subgroup // Bull. Univ. Kiev. Ser. Phys. Math. — 2007. — No. 1. — P. 46—49.

[9] Hall Ph. Complemented groups // J. London Math. Soc. — 1937. — Vol. 12, no. 3. — P. 201—204.

[10] Huppert B. Endliche Gruppen. I. — Berlin: Springer, 1967.

[11] Trebenko O. O. On groups with a supercomplemented subgroup // Trans. Inst. Math. NAS Ukraine. — 2006. — Vol. 3, no. 4. — P. 153—164.

[12] Wehrfritz B. A. F. Infinite Linear Groups. — Berlin: Springer, 1973.