Радикалы и l-модули

Н. Е. ШАВГУЛИДЗЕ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nathalia_s@mail.ru

УДК 512.555.4+512.555.6

Ключевые слова: решёточно упорядоченное кольцо, решёточно упорядоченный модуль, специальный класс l-модулей, специальный радикал l-кольца, первичный радикал l-кольца.

Аннотация

В статье изучается специальный класс l-модулей и показывается, что он связан со специальным классом l-колец. Специальный радикал l-кольца R представляется в виде пересечения l-аннуляторов l-модулей над R, принадлежащих специальному классу. Первичный радикал l-кольца представляется в виде пересечения l-аннуляторов всех l-первичных l-модулей над R.

Abstract

N. E. Shavgulidze, Radicals and l-modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 7, pp. 235—243.

We show that for any special class of l-modules, we can define a special class of l-rings. We prove that the special radical of an l-ring R can be represented as the intersection of the l-annihilators of l-modules over R belonging to the special class. The prime radical of an l-ring R can be represented as the intersection of the l-annihilators of l-prime l-modules over R.

В работе [1] вводится определение специального класса модулей и показывается, что этот класс задаёт радикал и связан со специальным классом колец. Если задан специальный класс колец, специальный радикал кольца R представляется в виде пересечения аннуляторов R-модулей из соответствующего специального класса модулей. В [1] также приводятся примеры специальных классов модулей, одним из которых является класс всех первичных модулей.

В данной работе доказываются утверждения из работы [8], а именно показывается, что утверждения, аналогичные утверждениям из [1], можно доказать для решёточно упорядоченных колец (l-колец) и решёточно упорядоченных модулей (l-модулей). Мы изучаем решёточно упорядоченные модули, специальные классы l-модулей и их связь со специальными классами l-колец. Мы доказываем, что специальный радикал l-кольца R представляется в виде пересечения l-аннуляторов l-модулей над R из соответствующего специального класса. В частности,

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 7, с. 235—243.

первичный радикал l-кольца R представляется в виде пересечения l-аннуляторов всех l-первичных l-модулей над R.

В работе все кольца считаются ассоциативными, не обязательно с единицей. Терминология и обозначения аналогичны терминологии из [2,4], В [2,4] можно найти и необходимые сведения об l-кольцах. Приведём некоторые определения и факты.

Пусть R — ассоциативное решёточно упорядоченное кольцо (l-кольцо). Введём обозначения $R_+ = \{r \in R \mid r \geqslant 0\}$, $|r| = r \vee 0 - r \wedge 0$, где $a \vee b$ — наименьшая верхняя грань элементов $a, b \in R$, а $a \wedge b$ — наибольшая нижняя грань. Для любых $a, b \in R$ выполняются неравенства

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad |ab| \leqslant |a|\,|b|, \quad |a \vee b| \leqslant |a| + |b|.$$

(Правый) идеал I l-кольца R называется (правым) l-идеалом, если для любых $a \in I$, $x \in R$, $|x| \leqslant |a|$, имеем $x \in I$. То, что I является (правым) l-идеалом l-кольца R, мы будем обозначать $I \lhd R$ ($I \lhd_{\mathrm{r}} R$).

Пусть R, S — l-кольца. Гомоморфизм колец $f\colon R \to S$ называется l-гомоморфизмом, если для любых $a, b \in R$ выполняются равенства

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Если $I \lhd R$, то фактор-кольцо R/I (с отношением порядка, заданным следующим правилом: $a + I \leqslant b + I$ тогда и только тогда, когда $a' \leqslant b'$ для некоторых $a' \in a + I$, $b' \in b + I$) является l-кольцом, а естественный гомоморфизм $\pi\colon R \to R/I$ является l-гомоморфизмом.

Первая теорема об l-изоморфизме. *Если $f\colon R \to S$ — сюръективный l-гомоморфизм l-колец R и S, то l-кольца S и $R/\operatorname{Ker} f$ l-изоморфны.*

Вторая теорема об l-изоморфизме. *Если I и J — l-идеалы l-кольца R и $I \subset J$, то $R/J \cong (R/I)/(J/I)$.*

Третья теорема об l-изоморфизме. *Пусть R — l-кольцо, A, I — l-идеалы l-кольца R. Тогда $A + I$ — l-кольцо, $A \cap I$ — l-идеал l-кольца A, I — l-идеал l-кольца $A + I$ и $(A + I)/I \cong I/(A \cap I)$.*

Определение (см. [6,10]). Класс $\mathcal{K}$ ассоциативных l-первичных l-колец называется *специальным*, если выполнены следующие условия:

$$\text{если } R \in \mathcal{K} \text{ и } 0 \neq B \lhd R, \text{ то } B \in \mathcal{K}, \tag{A}$$

$$\text{если } 0 \neq B \in \mathcal{K},\ B \lhd R \text{ и } R \text{ — } l\text{-первичное } l\text{-кольцо, то } R \in \mathcal{K}. \tag{B}$$

Определение. Модуль M_R над l-кольцом R называется *l-модулем*, если M — l-группа и для любых $r \in R$, $a, b \in M$, таких что $r > 0$, $a \leqslant b$, выполняется неравенство $ar \leqslant br$. Введём обозначение $M_+ = \{m \in M \mid m \geqslant 0\}$.

Напомним, что *аннулятором* (см. [1]) R-модуля M_R называется множество

$$(0 : M)_R = \{r \in R \mid Mr = 0\}.$$

Модуль M_R называется *первичным* (см. [1]), если $MR \neq 0$ и для любых $x \in M$, $x \neq 0$, и идеала B кольца R из $xB = 0$ следует, что $B \subseteq (0 : M)_R$.

Определение. *l-аннулятором* l-модуля M_R называется множество

$$(0 : M)_R = \{r \in R \mid M|r| = 0\}.$$

Здесь и далее $(0 : M)_R$ будет обозначать l-аннулятор l-модуля M_R.

Лемма 1. *l-аннулятор l-модуля M_R является l-идеалом l-кольца R.*

Доказательство. Пусть $a, b \in (0 : M)_R$, $x \in M_+$. Так как

$$x|a + b| \leqslant x|a| + x|b| = 0,$$

то $x|a + b| = 0$. Из того что любой элемент $y \in M$ можно представить в виде $y = y_+ - y_-$, $y_+, y_- \in M_+$, следует, что $a + b \in (0 : M)_R$.

Пусть $r \in R$. Тогда

$$x|ar| \leqslant x|a|\,|r| = 0 * |r| = 0, \quad x|ra| \leqslant x|r|\,|a| = (x|r|)|a| = 0.$$

Следовательно, $x|ar| = 0$ и $x|ra| = 0$. Поэтому $ar \in (0 : M)_R$ и $ra \in (0 : M)_R$.

Если $|r| \leqslant |a|$, то

$$x|r| \leqslant x|a| = 0,$$

т. е. $x|r| = 0$. Следовательно, $r \in (0 : M)_R$. Лемма доказана. □

Определение. l-модуль M_R называется *l-первичным*, если $MR \neq 0$ и для любых $0 < x \in M$ и $B \lhd R$ из $xB = 0$ следует, что $B \subseteq (0 : M)_R$.

Из определений вытекает, что всякий первичный l-модуль является l-первичным. В качестве примера l-первичного, но не первичного l-модуля можно привести l-кольцо R примера 1 работы [5], рассматриваемое как l-модуль над собой.

Для того чтобы ввести определение специального класса l-модулей нам потребуется несколько лемм.

Лемма 2. *Пусть A — l-идеал l-кольца R, $\bar{R} = R/A$ и M — l-модуль над $\bar{R}$. Определим $mr = m(r + A)$ для любых $m \in M$, $r \in R$. Тогда M — l-модуль над R и $(0 : M)_{\bar{R}} = \big((0 : M)_R\big)/A$.*

Доказательство. Из определения следует, что $A \subseteq (0 : M)_R$. Следовательно, A является l-идеалом l-кольца $(0 : M)_R$. По определению

$$(0 : M)_{\bar{R}} = \{r + A \mid M|r + A| = 0\}, \quad (0 : M)_R = \{r \mid M|r| = 0\}.$$

Легко убедиться, что

$$\big((0 : M)_R\big)/A = \{r + A \mid M|r| = 0\} = \{r + A \mid M|r + A| = 0\} = (0 : M)_{\bar{R}},$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 3 [9, лемма 2]. *Если I — l-идеал l-кольца R, J — l-идеал в I, то*

$$(\langle J\rangle_R)^3 \subseteq J,$$

где $\langle J\rangle_R$ — l-идеал в R, порождённый J.

Доказательство. Пусть

$$M = \{a \in R \mid |a| \leqslant a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4,\ a_i \in J_+,\ r_i \in\ R_+,\ i = 1,2,3,4\}.$$

Мы утверждаем, что $M = \langle J \rangle_R$. Действительно, очевидно, что это множество содержит J. Докажем, что оно является l-идеалом l-кольца R.

Пусть $a, b \in R$, $|a| \leqslant a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4$, $|b| \leqslant b_1 + b_2 s_1 + s_2 b_3 + s_3 b_4 s_4$, $a_i, b_i \in J_+$, $r_i, s_i \in R_+$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4 + b_1 + b_2 s_1 + s_2 b_3 + s_3 b_4 s_4 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)(r_1 + s_1) + (r_2 + s_2)(a_3 + b_3) + (r_3 + s_3)(a_4 + b_4)(r_4 + s_4),$$

т. е. $a + b \in M$.

Если $r \in R$, то

$$|ar| \leqslant |a|\,|r| \leqslant (a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4)|r| \leqslant$$
$$\leqslant (a_1 + a_2)(|r| + r_1|r|) + (r_2 + r_3)(a_3 + a_4)(|r| + r_4|r|),$$

т. е. $ar \in M$. Аналогично $ra \in M$.

Если $|r| \leqslant |a|$, то

$$|r| \leqslant |a| \leqslant a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4,$$

т. е. $r \in M$.

Мы доказали, что $M \lhd R$. Поэтому $\langle J \rangle_R = M$.

Пусть $a \in \langle J \rangle_R$, $|a| \leqslant a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4$, $a_i \in J_+$, $r_i \in R_+$, $i = 1, 2, 3, 4$. Заметим, что $(\langle J \rangle_R)^3 \subseteq I(\langle J \rangle_R)I$. Для любых $b_1, b_2 \in I$ получим

$$|b_1 a b_2| \leqslant |b_1|\,|a|\,|b_2| \leqslant |b_1|(a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4)|b_2|.$$

Но

$$|b_1|(a_1 + a_2 r_1 + r_2 a_3 + r_3 a_4 r_4)|b_2| \in J,$$

так как $ba \in J$, $ab \in J$, $br \in I$, $rb \in I$ для любых $a \in J$, $b \in I$, $r \in R$. Следовательно, $(\langle J \rangle_R)^3 \subseteq I(\langle J \rangle_R)I \subseteq J$. $\square$

Лемма 4. *Если M_R — l-первичный l-модуль и $B \lhd R$, причём $MB \neq 0$, то M — l-первичный B-модуль и $(0 : M)_R \cap B = (0 : M)_B$.*

Доказательство. Имеем, что M_B — l-модуль и $MB \neq 0$. Равенство l-аннуляторов очевидно. Пусть $xC = 0$ для некоторых $0 < x \in M$, $C \lhd B$. Пусть A — наименьший l-идеал l-кольца R, содержащий C.

Если $xA = 0$, то $MA = 0$, так как M_R — l-первичный R-модуль.

Теперь рассмотрим случай, когда $xA \neq 0$. Тогда существует $a \in A$, такое что $xa \neq 0$. Следовательно, $0 \neq |xa| \leqslant |x|\,|a| = x|a|$, т. е. $x|a| > 0$. Если $xA^2 = 0$, то $(x|a|)A \subseteq xA^2 = 0$, т. е. $(x|a|)A = 0$, откуда получаем $MA = 0$ в силу l-первичности l-модуля M_R.

Осталось рассмотреть случай, когда $xA^2 \neq 0$. Тогда существуют такие $a_1, a_2 \in A$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, что $xa_1a_2 \neq 0$, точнее $xa_1a_2 > 0$. По лемме 3

$A^3 \subseteq C$. Следовательно, $xa_1a_2A \subseteq xA^3 \subseteq xC = 0$, т. е. $(xa_1a_2)A = 0$. В силу l-первичности l-модуля M_R получаем, что $MA = 0$.

Итак, во всех случаях $MA = 0$. Следовательно, $MC = 0$, т. е. M — l-первичный B-модуль. Лемма 4 доказана. $\square$

Лемма 5. *Пусть R — l-кольцо, $A \lhd R$ и $\bar{R} = R/A$. Тогда*

1) *если M — l-первичный l-модуль над $\bar{R}$, то можно рассмотреть M как l-модуль над R ($mr = m(r + A)$ для любых $m \in M$, $r \in R$), тогда M_R — l-первичный l-модуль;*
2) *если M — l-первичный l-модуль над R и $A \subseteq (0 : M)_R$, то M — l-первичный l-модуль над $\bar{R}$ ($m(r + A) = mr$ для любых $m \in M$, $r \in R$).*

Доказательство. Пусть $xB = 0$ для некоторых $0 < x \in M$ и $B \lhd R$. По определению M_R имеем $xA = 0$. Сумма l-идеалов является l-идеалом, поэтому $A+B \lhd R$. Легко убедиться, что $A \lhd (A+B)$ и $(A+B)/A \lhd \bar{R}$. Так как $x(A+B) = 0$, то $x(A + B)/A = 0$ и $M\big((A + B)/A\big) = 0$ в силу l-первичности $M_{\bar{R}}$. Поэтому $M(A + B) = 0$ и $BM = 0$, т. е. M — l-первичный R-модуль.

Пусть $x\bar{B} = 0$ для некоторых $0 < x \in M$ и $\bar{B} \lhd \bar{R}$. Тогда существует такой идеал $B \lhd R$, что $\bar{B} = B/A$. По определению l-модуля $M_{\bar{R}}$ из $x\bar{B} = 0$ следует, что $xB = 0$. Из того что M_R — l-первичный l-модуль, получаем $MB = 0$. Следовательно, $M\bar{B} = 0$ по определению M_R, т. е. M — l-первичный $\bar{R}$-модуль. $\square$

Определение. l-модуль M_R называется *l-точным*, если его l-аннулятор равен нулю.

Каждому l-кольцу R поставим в соответствие некоторый класс l-модулей над ним Σ_R.

Определение. Класс l-модулей $\Sigma = \bigcup\limits_R \Sigma_R$ называется *специальным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

S1) если $M \in \Sigma_R$, то M — l-первичный l-модуль;
S2) если $M \in \Sigma_{\bar{R}}$, где $\bar{R} = R/A$, $A \lhd R$, то $M \in \Sigma_R$. Обратно, если $M \in \Sigma_R$ и $A \lhd R$, $A \subseteq (0 : M)_R$, то $M \in \Sigma_{\bar{R}}$ ($xr = x\bar{r}$);
S3) если $M \in \Sigma_R$, $B \lhd R$, $MB \neq 0$, то $M \in \Sigma_B$;
S4) если $0 \neq B \lhd R$, где R — l-первичное l-кольцо, и существует l-точный l-модуль $M_B \in \Sigma_B$, то существует l-точный l-модуль $N_R \in \Sigma_R$.

Корректность определения следует из лемм 4 и 5.

Покажем, что специальный класс l-модулей связан со специальным классом l-колец. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *l-кольцо R l-первично тогда и только тогда, когда над ним существует l-точный l-первичный l-модуль M.*

Доказательство. Пусть R — l-первичное l-кольцо. Покажем, что l-модуль R_R l-точен и l-первичен. Если $x \in (0 : R)_R$, то $R|x| = 0$. Пусть $0 < y \in R$. Тогда $yR|x| = 0$. Вследствие l-первичности R имеем, что $x = 0$ по [5, лемма 1], т. е. $(0 : R)_R = 0$.

Пусть $0 < x \in R$ и $xB = 0$, где $B \lhd R$. Рассмотрим множество

$$\langle x\rangle = \{y \in R \mid |y| \leqslant nx + r_1x + xr_2 + r_3xr_4,\ n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{Z},\ r_i \in R_+\}.$$

Докажем, что $\langle x\rangle$ — l-идеал, порождённый элементом x.

Пусть $a, b \in R$, $|a| \leqslant mx + r_1x + xr_2 + r_3xr_4$, $|b| \leqslant nx + \tilde{r}_1x + x\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3x\tilde{r}_4$, $m, n \in \mathbb{N} \cup 0$, $r_i, \tilde{r}_i \in R_+$. Тогда

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \leqslant mx + r_1x + xr_2 + r_3xr_4 + nx + \tilde{r}_1x + x\tilde{r}_2 + \tilde{r}_3x\tilde{r}_4 \leqslant \\ \leqslant (m+n)x + (r_1 + \tilde{r}_1)x + x(r_2 + \tilde{r}_2) + (r_3 + \tilde{r}_3)x(r_4 + \tilde{r}_4),$$

т. е. $a + b \in \langle x\rangle$.

Пусть $r \in R$. Тогда

$$|ra| \leqslant |r|\,|a| \leqslant |r|(mx + r_1x + xr_2 + r_3xr_4) \leqslant (m|r| + |r|r_1)x + (|r| + |r|r_3)x(r_2 + r_4),$$

т. е. $ra \in \langle x\rangle$. Аналогично $ar \in \langle x\rangle$.

Если $|r| \leqslant |a|$, то

$$|r| \leqslant |a| \leqslant mx + r_1x + xr_2 + r_3xr_4,$$

т. е. $r \in \langle x\rangle$. Следовательно, $\langle x\rangle$ — l-идеал l-кольца R.

Пусть $b \in B$, $y \in \langle x\rangle$, $|y| \leqslant nx + r_1x + xr_2 + r_3xr_4$, $n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $r_i \in R_+$. Тогда

$$|yb| \leqslant |y|\,|b| \leqslant nx|b| + r_1x|b| + xr_2|b| + r_3xr_4|b| = xr_2|b| + r_3xr_4|b| = 0,$$

так как $r_2b, r_4b \in B$. Следовательно, $yb = 0$. Так как это равенство выполняется для любых $b \in B$ и $y \in \langle x\rangle$, то $\langle x\rangle B = 0$. Из l-первичности R получаем, что $B = 0$.

Обратно, пусть M — l-точный l-первичный l-модуль над R. Тогда если $B \lhd R$, $C \lhd R$, $B \neq 0$, $BC = 0$, $0 < x \in M$, то $xB \neq 0$ и существует такое $b \in B$, что $xb \neq 0$. Но тогда $x|b| > 0$ и $x|b|C \subseteq x(BC) = 0$. Вследствие l-точности и l-первичности M имеем, что $C = 0$, и R — l-первичное кольцо. Лемма доказана. □

Теорема 1.

1. *Пусть $\Sigma = \bigcup \Sigma_R$ — специальный класс l-модулей и $\mathcal{K}_\Sigma$ — класс l-колец со свойством*

$$R \in \mathcal{K}_\Sigma \iff \text{существует такой } l\text{-модуль } M \in \Sigma_R, \text{ что } (0 : M)_R = 0. \quad \text{(K)}$$

Тогда $\mathcal{K}_\Sigma$ — специальный класс l-колец.

2. *Если $\mathcal{K}$ — специальный класс l-колец, то класс l-модулей $\Sigma^{\mathcal{K}} = \bigcup \Sigma^{\mathcal{K}}_R$ со свойством*

$$M \in \Sigma^{\mathcal{K}}_R \iff R/(0 : M)_R \in \mathcal{K} \text{ и } M - l\text{-первичный } R\text{-модуль} \quad \text{(S)}$$

является специальным классом l-модулей.

Доказательство.

1. Пусть $\Sigma = \bigcup \Sigma_R$ — специальный класс l-модулей и $\mathcal{K}_\Sigma$ — класс l-колец со свойством (K).

Из леммы 6 следует, что $\mathcal{K}_\Sigma$ — класс l-первичных l-колец. Если $B \lhd R$, $B \neq 0$ и $R \in \mathcal{K}_\Sigma$, то существует такой l-модуль $M \in \Sigma_R$, что $(0 : M)_R = 0$. Можно рассмотреть M как l-модуль над B. Так как для любого $b \in B$ выполнено $Mb \neq 0$, то $(0 : M)_B = 0$. Так как $MB \neq 0$, то из условия S3) следует, что $M \in \Sigma_B$. Следовательно, $B \in \mathcal{K}_\Sigma$ и условие (A) специального класса для $\mathcal{K}_\Sigma$ выполнено.

Пусть теперь $0 \neq B \lhd R$, $B \in \mathcal{K}_\Sigma$, R — l-первичное l-кольцо. Тогда из условия S4) получаем, что $R \in \mathcal{K}_\Sigma$, т. е. выполнено условие (B) специального класса l-колец. Таким образом, $\mathcal{K}_\Sigma$ — специальный класс l-колец.

2. Обратно, пусть $\mathcal{K}$ — специальный класс l-колец и $\Sigma^{\mathcal{K}}$ — класс l-модулей со свойством (S). Тогда $\Sigma^{\mathcal{K}}_R$ — класс l-первичных R-модулей.

Если $A \lhd R$, $\bar{R} = R/A$ и $M \in \Sigma^{\mathcal{K}}_{\bar{R}}$, то M — l-первичный $\bar{R}$-модуль и $\bar{R}/(0 : M)_{\bar{R}} \in \mathcal{K}$. По лемме 2 получаем, что M — l-модуль над R, причём $(0 : M)_{\bar{R}} = \big((0 : M)_R\big)/A$, и по лемме 5 M — l-первичный R-модуль.

Так как по теореме об l-изоморфизме

$$R/(0 : M)_R \cong (R/A)/\big((0 : M)_R/A\big) = \bar{R}/(0 : M)_{\bar{R}},$$

то $R/(0 : M)_R \in \mathcal{K}$, и следовательно, $M \in \Sigma^{\mathcal{K}}_R$.

Аналогично доказывается обратная часть для условия S2).

Проверим S3). Пусть $M \in \Sigma^{\mathcal{K}}_R$, $B \lhd R$, $MB \neq 0$. По лемме 4 M — l-первичный B-модуль и $(0 : M)_B = (0 : M)_R \cap B$. Отсюда по теореме о l-изоморфизме получаем, что

$$\bar{B} = B/(0 : M)_B = B/\big((0 : M)_R \cap B\big) \cong (B + (0 : M)_R)/(0 : M)_R.$$

Так как $B \not\subseteq (0 : M)_R$, то

$$0 \neq (B + (0 : M)_R)/(0 : M)_R \lhd R/(0 : M)_R.$$

Из условия (A) специального класса l-колец вытекает, что

$$\bar{B} = B/(0 : M)_B \in \mathcal{K},$$

т. е. $M \in \Sigma^{\mathcal{K}}_B$.

Пусть, наконец, $0 \neq B \lhd R$, где R — l-первичное l-кольцо, и существует l-точный B-модуль $M \in \Sigma^{\mathcal{K}}_B$. Так как $(0 : M)_B = 0$, то $B \in \mathcal{K}$. Из условия (B) определения специального класса l-колец получаем, что $R \in \mathcal{K}$.

Заметим, что $(0 : R)_R = 0$. Действительно, так как для любых $x \in R$ и $r \in (0 : R)_R$ имеем $|xr| \leqslant |x|\,|r| = 0$ по определению l-аннулятора, то $xr = 0$, т. е. $R(0 : R)_R = 0$. Так как $R \neq 0$ — l-первичное l-кольцо и $(0 : R)_R \lhd R$, то $(0 : R)_R = 0$. Поэтому $R/(0 : R)_R \cong R \in \mathcal{K}$ и $R \in \Sigma^{\mathcal{K}}_R$. Условие S4) выполнено. Теорема доказана. $\square$

Предложение 1. *Пусть* $\Sigma = \bigcup \Sigma_R$ — *специальный класс* l*-модулей и* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ — *соответствующий специальный класс* l*-колец. Тогда* l*-идеал* $P \lhd R$ *равен* $(0 : M)_R$ *для некоторого* $M \in \Sigma_R$ *в том и только в том случае, когда* $R/P \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть $M \in \Sigma_R$ — такой l-модуль, что $P = (0 : M)_R$, M_R — l-первичный l-модуль. Следовательно, по свойству S2) $M \in \Sigma_{R/P}$. Из леммы 2 получаем, что

$$(0 : M)_{(R/P)} = \big((0 : M)_R\big)/P = P/P = 0,$$

т. е. $R/P \in \mathcal{K}$.

Обратно, пусть $R/P \in \mathcal{K}$. Это означает, что существует l-модуль $M \in \Sigma_{R/P}$, такой что $(0 : M)_{(R/P)} = 0$. По свойству S2) $M \in \Sigma_R$, $mr = m(r + P)$ для любых $m \in M$, $r \in R$. Следовательно, $P \subseteq (0 : M)_R$. Но $(0 : M)_{R/P} = 0$, т. е. $P = (0 : M)_R$. Предложение доказано. □

Предложение 2. *Если* $\Sigma = \bigcup \Sigma_R$ — *специальный класс* l*-модулей и* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ — *специальный класс* l*-колец, определённый свойством* (K) *из теоремы* 1, *то соответствующий специальный радикал можно представить в виде*

$$\rho(R, \mathcal{K}) = \bigcap_{M_\alpha \in \Sigma_R} \{(0 : M_\alpha)_R\}.$$

Доказательство. По определению

$$\rho(R, \mathcal{K}) = \bigcap \{P_\alpha \mid P_\alpha \lhd R,\ R/P_\alpha \in \mathcal{K}\}.$$

По предложению 1 получаем, что из $R/P_\alpha \in \mathcal{K}$ следует, что существует l-модуль $M \in \Sigma_R$, такой что $P_\alpha = (0 : M)_R$. Следовательно,

$$\bigcap_{M_\alpha \in \Sigma_R} \{(0 : M_\alpha)_R\} \subseteq \rho(R, \mathcal{K}).$$

Если $M_\alpha \in \Sigma_R$, то $\bar{R} = R/(0 : M_\alpha)_R \in \mathcal{K}$, так как $M \in \Sigma_{\bar{R}}$ по свойству S2) и $(0 : M)_{\bar{R}} = 0$. Следовательно,

$$\bigcap_{M_\alpha \in \Sigma_R} \{(0 : M_\alpha)_R\} = \rho(R, \mathcal{K}).$$

Предложение доказано. □

Приведём пример специального класса l-модулей. Напомним, что класс всех l-первичных l-колец является специальным и задаёт первичный радикал $N_1(R)$ (см. [3, 10]). По доказанному $N_1(R)$ можно представить в виде пересечения l-аннуляторов l-первичных l-модулей над R.

Рассмотрим класс $\Sigma = \bigcup \Sigma_R$ всех l-первичных l-модулей. Это специальный класс l-модулей. Действительно, свойство S1) очевидно, S2) следует из леммы 5, S3) следует из леммы 4, а S4) следует из леммы 6. Из леммы 6 также вытекает, что $\mathcal{K}_\Sigma$ в этом случае состоит из всех l-первичных l-колец. Отсюда и из предложения 2 получаем следующее утверждение.

Предложение 3. *Для любого l-кольца R выполняется равенство*

$$\rho(R,\mathcal{K}) = N_1 = \bigcap_{M_\alpha \in \Sigma_R} \{(0 : M_\alpha)_R\},$$

где Σ_R — класс всех l-первичных R-модулей.

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Специальные модули и специальные радикалы // ДАН СССР. — 1962. — Т. 147. — С. 1274—1277.

[2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Мир, 1984.

[3] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сб. работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[4] Фукс Л. Упорядоченные алгебраические системы. — М.: Наука, 1965.

[5] Шавгулидзе Н. Е. Радикалы l-колец и односторонние l-идеалы // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 169—181.

[6] Шавгулидзе Н. Е. Специальные классы l-колец // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 157—173.

[7] Шавгулидзе Н. Е. Специальные классы l-колец и лемма Андерсона—Дивинского—Сулинского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2009.

[8] Шавгулидзе Н. Е. Радикалы l-колец и специальные классы l-модулей // Успехи мат. наук. — 2010.

[9] Шаталова М. А. l_A- и l_I-кольца // Сиб. мат. журн. — 1966. — Т. 7, № 6. — С. 1383—1389.

[10] Шаталова М. А. К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах // Мат. заметки. — 1968. — Т. 4, № 6. — С. 639—648.