# О структуре относительно свободной алгебры Грассмана*

**А. В. ГРИШИН**
*Московский педагогический государственный университет*
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

**Л. М. ЦЫБУЛЯ**
*Московский педагогический государственный университет*
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

УДК 512.552

**Ключевые слова:** $T$-пространство, $T$-идеал, $n$-слово, $(p, n)$-проблема, унитарная и неунитарная относительно свободные алгебры Грассмана.

**Аннотация**

В работе исследуется $T$-пространственное и мультипликативное строение относительно свободной алгебры $F^{(3)}$ с единицей, соответствующей тождеству $\big[[x_1, x_2], x_3\big] = 0$, над бесконечным полем характеристики $p > 0$. Наибольшее внимание уделяется унитарно замкнутым $T$-пространствам над полем характеристики $p > 2$. Построена диаграмма, содержащая все основные $T$-пространства алгебры $F^{(3)}$, которые образуют бесконечные цепочки включений. Одним из главных результатов является разложение фактор-$T$-пространств, связанных с $F^{(3)}$, в прямую сумму простых компонент. Кроме того, изучаемые $T$-пространства оказываются коммутативными подалгебрами в $F^{(3)}$, что позволяет описать $F^{(3)}$ и некоторые её подалгебры как модули над этими коммутативными алгебрами. Отдельно рассматриваются особенности случая $p = 2$. В приложении изучаются не унитарно замкнутые $T$-пространства, а также случай поля нулевой характеристики.

**Abstract**

*A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, On the structure of a relatively free Grassmann algebra*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 8, pp. 3—93.

We investigate the multiplicative and $T$-space structure of the relatively free algebra $F^{(3)}$ with a unity corresponding to the identity $\big[[x_1, x_2], x_3\big] = 0$ over an infinite field of characteristic $p > 0$. The highest emphasis is placed on unitary closed $T$-spaces over a field of characteristic $p > 2$. We construct a diagram containing all basic $T$-spaces of the algebra $F^{(3)}$, which form infinite chains of the inclusions. One of the main results is the decomposition of quotient $T$-spaces connected with $F^{(3)}$ into a direct sum of simple components. Also, the studied $T$-spaces are commutative subalgebras of $F^{(3)}$; thus, the structure of $F^{(3)}$ and its subalgebras can be described as modules over these commutative algebras. Separately, we consider the specifics of the case $p = 2$. In Appendix, we study nonunitary closed $T$-spaces and the case of a field of zero characteristic.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00625).

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2009, том 15, № 8, с. 3—93.

# Введение

Понятие *$T$-пространства* как линейного подпространства свободной счётно порождённой ассоциативной алгебры $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ над полем $k$, замкнутого относительно подстановок вместо переменных любых элементов этой алгебры, было введено первым автором [7] около двадцати лет назад и уже прочно вошло в обиход современной комбинаторной алгебры и теории PI-колец. С его помощью был решён ряд достаточно долго остававшихся открытыми проблем. Это, в первую очередь, такие проблемы конечной базируемости, как проблема Мальцева и проблема Шпехта в положительной характеристике. Интересно, что аппарат $T$-пространств оказался одинаково эффективным как при доказательстве положительных утверждений, так и при построении контрпримеров.

В 1987 году А. Р. Кемер [24] получил положительное решение *проблемы Шпехта* [47] о конечной порождённости любого $T$-идеала алгебры $F$ над полем нулевой характеристики. Этот факт в некоторой степени повлиял на появление понятия $T$-пространства. Примерно в это же время один из авторов, доказывая конечную базируемость систем обобщённых многочленов (т. е. элементов свободного произведения алгебры матриц и свободной алгебры $F$) в [7], заметил, что в случае поля характеристики нуль достаточно только подстановок и линейных действий (умножения оказались не нужны). Это привело к понятию $T$-пространства в алгебре обобщённых многочленов, а также стимулировало получение аналогичного результата для систем обычных многочленов (т. е. для элементов из алгебры $F$). Немного позднее в [8] вводится понятие *абстрактного $T$-пространства*, существенно обобщающее предыдущее определение $T$-пространства. Под абстрактным $T$-пространством понимается любой унитарный правый $kT$-модуль, где $kT$ — полугрупповая $k$-алгебра полугруппы $T$ эндоморфизмов (подстановок) алгебры $F$. Расширение таким образом понятия $T$-пространства освобождает от необходимости рассматривать только подпространства в свободных алгебрах, можно брать фактор-$T$-пространства, прямые суммы $T$-пространств и т. д. Кроме того, имеется большой запас примеров $T$-пространств иной природы, связанных со следами, квазимногочленами и некоторыми другими специальными конструкциями (см. [8, 43]). Современный взгляд на концепцию $T$-пространства изложен в [12]. Через $S^T$ обозначается $T$-пространство, порождённое подмножеством $S$ некоторого $T$-пространства.

Пусть $I$ — произвольный $T$-идеал алгебры $F$ (возможно, нулевой). Относительно свободная алгебра $F/I$ является, очевидно, циклическим $kT$-модулем, порождённым любой из своих переменных. Согласно результатам [8, 43], если $k$ — поле нулевой характеристики, а идеал $I$ содержит многочлен Капелли

$$c_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 \cdots x_{\sigma(n)} y_n,$$

то этот циклический модуль нётеров. В качестве следствия получается конечная базируемость любого $T$-идеала, содержащего многочлен Капелли. Позже

В. В. Щиголев [39], используя технику и обобщение результатов [8, 23, 24], доказал, что $F = \{x_1\}^T$ — нётеров $kT$-модуль, т. е. всякие условия на $T$-идеал $I$ можно отбросить. Положительное решение проблемы Шпехта [24] является, как нетрудно убедиться, частным случаем этого факта.

Интерес к $T$-пространствам, как представляется, возрос и в связи с тем, что в конце 1997 года первым автором был построен пример не конечно порождённого $T$-пространства над полем положительной характеристики: $T$-пространство, порождённое одночленами $x_1^2 \cdots x_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, над произвольным полем характеристики 2 не является конечно порождённым как $T$-пространство даже по модулю тождества $\big[[x, y], z\big] = 0$, более того, даже если добавить тождество $x^4 = 0$. Примеры не конечно порождённых $T$-пространств над бесконечными полями характеристики $p > 2$ были получены В. В. Щиголевым в [38]. В частности, им было доказано, что $T$-пространство, порождённое элементами $x_1^{p-1} x_2^{p-1} [x_1, x_2] \cdots x_{2n-1}^{p-1} x_{2n}^{p-1} [x_{2n-1}, x_{2n}]$, $n \in \mathbb{N}$, над произвольным бесконечным полем характеристики $p > 2$ не является конечно порождённым, причём это верно и по модулю тождества $\big[[x, y], z\big] = 0$, более того, даже если добавить тождество $x^p = 0$. Особый интерес представляет следующий доказанный В. В. Щиголевым [38] факт: $T$-пространство $\{x^{p^s-1} y^{p^s-1} [x, y] \mid s \in \mathbb{N}\}^T$ не является конечно порождённым для любого простого числа $p$ даже по модулю тождества $\big[[x, y], z\big] = 0$. В [43] В. В. Щиголев построил целый ряд примеров не конечно порождённых $T$-пространств над произвольным полем характеристики $p > 0$, кроме того, им был предложен способ обобщения ранее полученных результатов со случая бесконечного поля на случай произвольного поля путём рассмотрения $T$-пространств с дополнительным условием замкнутости относительно взятия полиоднородных компонент.

В 1998 году практически одновременно первым автором [9], А. Я. Беловым [3] и В. В. Щиголевым [37] были даны первые контрпримеры к аналогу проблемы Шпехта в характеристике $p > 0$. Хотя внешне эти конструкции достаточно различны, по существу, все они основаны на идее $T$-пространства. То же самое можно сказать и о всех контрпримерах, полученных в дальнейшем другими авторами (см. [1, 45]). Естественным аналогом проблемы Шпехта является проблема Мальцева [29]: верно ли, что в свободной счётно порождённой ассоциативной $\mathbb{Z}$-алгебре любой $T$-идеал конечно порождён? Полученные контрпримеры к проблеме Шпехта в положительной характеристике дают отрицательное решение проблемы Мальцева. В [9, 41, 42] впервые даётся пример ассоциативного ниль-кольца индекса 16, не имеющего конечного базиса тождеств.

Нужно отметить, что в случае поля характеристики $p > 0$ результатов в положительном направлении до недавнего времени почти не имелось, за исключением конечной порождённости $T$-пространств в алгебрах коммутативных многочленов над бесконечным полем, доказанной в [9]. Е. А. Киреева [26], используя по аналогии с [9] технику вполне упорядоченных множеств, распространила этот результат на случай произвольного унитарного нётерова коммутативно-ассоциативного кольца коэффициентов.

Были изучены экстремальные свойства $T$-пространств над полями положительной характеристики, связанные с конечной порождённостью. Как уже отмечалось, если поле имеет характеристику $p = 2$, то $T$-пространство, порождённое произведениями квадратов переменных, не является конечно порождённым по модулю $\big[[x,y],z\big] = 0$ и $x^4 = 0$. Однако, как было установлено в [18], если к этим тождествам добавить ещё одно тождество $[x_1,x_2]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}] = 0$, не являющееся следствием из них, то по модулю этих тождеств указанное $T$-пространство оказывается уже конечно порождённым. Кроме того, было показано, что это $T$-пространство обладает интересным экстремальным свойством, связанным с коразмерностями в цепочках подпространств 2-слов. Аналогичным свойством обладают и построенные В. В. Щиголевым в [43] примеры не конечно порождённых $T$-пространств над полями характеристики $p > 2$. Следует отметить также замечательный факт, полученный Е. А. Киреевой совместно с А. Н. Красильниковым [28], который заключается в следующем. Пусть $V_p$ — $T$-идеал алгебры $F$, порождённый $\big[[x,y],z\big]$ и $x_1^m$, где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$. Он экстремален в следующем смысле. Относительно свободная алгебра $F/V_p$ содержит бесконечно базируемые $T$-пространства (это доказано первым автором [9, 42] для $p = 2$, В. В. Щиголевым [38] для $p > 2$), а в [28] показано, что если $I$ — произвольный $T$-идеал, содержащий собственным образом $T$-идеал $V_p$, то $F/I$ — нётерово $T$-пространство.

Доказательство этого результата основано на следующем факте [28], представляющем самостоятельный интерес. $T$-пространство в относительно свободной алгебре над нётеровым коммутативно-ассоциативным кольцом с 1, соответствующей тождеству

$$[x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}] = 0, \tag{1}$$

порождённое многочленами с ограниченными кратностями вхождения переменных, конечно базируемо. Первоначально же первым автором ставился вопрос о конечной базируемости таких $T$-пространств над полем. Исследование этих $T$-пространств представлялось важным, так как В. В. Щиголев показал, что отказ от ограниченности кратности вхождения переменных приводит к примерам $T$-пространств в относительно свободной алгебре с тождеством (1) при $n = 2$, не являющихся конечно порождёнными.

Следующий вопрос, возникающий при исследовании экстремальных свойств $T$-пространств, связан с поиском границы между конечно порождёнными и не конечно порождёнными $T$-пространствами в относительно свободных алгебрах. Е. А. Киреевой [27] был получен следующий результат: пусть $U_p$ — $T$-пространство, порождённое всеми $p$-словами (под *$n$-словом* понимается любой одночлен из алгебры $F$, содержащий каждую из входящих в него переменных с кратностью $n$, $n \in \mathbb{N}$) и $T$-идеалом $V_p$, который был определён выше. Тогда любое $T$-пространство в $F/V_p$, содержащее $U_p/V_p$ собственным образом, является конечно порождённым.

Весьма интересные исследования рядов Гильберта для $T$-пространств проведены А. Я. Беловым в [6].

Кроме свободных алгебр счётного ранга, можно рассматривать и свободные алгебры конечного ранга (так называемый *локальный случай*). В этом случае ситуация для $T$-пространств и $T$-идеалов существенно различается. С одной стороны, В. В. Щиголев [38] построил примеры не конечно порождённых $T$-пространств в 2-порождённой алгебре. С другой стороны, А. Р. Кемером [25] доказано, что все $T$-идеалы в свободной алгебре конечного ранга являются конечно порождёнными. Впоследствии А. Я. Белов [4] распространил этот результат на случай произвольного унитарного нётерова коммутативно-ассоциативного кольца коэффициентов. Совсем недавно в [5] он получил далеко идущее обобщение своих результатов.

Естественно возникает вопрос о построении структурной теории пространств. При этом наиболее содержательная теория связана с $T$-пространствами, удовлетворяющими некоторым специальным условиям. Например, можно рассмотреть все пространства, лежащие в конкретной относительно свободной алгебре, и связанные с ними теоретико-модульные конструкции. Одной из наиболее важных и интересных таких алгебр, дающей, по существу, все основные известные контрпримеры, является унитарная *относительно свободная алгебра Грассмана* над полем характеристики $p>0$, т. е. алгебра

$$F^{(3)} = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / T^{(3)},$$

где $T^{(3)}$ — $T$-идеал, порождённый «тройным коммутатором» $\big[[x,y],z\big]$ (так называемое тождество Грассмана). Мы рассматриваем и неунитарную алгебру

$$F^{(3)^*} = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / T^{(3)},$$

которую также называем относительно свободной алгеброй Грассмана. Название объясняется тем, что многообразие $k$-алгебр, заданное тождеством $\big[[x,y],z\big]=0$, в случае $p\neq 2$ порождается алгеброй Грассмана (см. [36]), а в случае $p=2$ — алгеброй $\Phi_2$, впервые введённой одним из авторов и являющейся аналогом алгебры Грассмана (см. [9, 18, 43]). Всюду ниже через $T$ обозначается полугруппа эндоморфизмов свободной ассоциативной алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ с единицей, а через $T^*$ — полугруппа эндоморфизмов её подалгебры $k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ без единицы (ясно, что $T^*$ — подполугруппа в $T$). Отметим, что $kT^* \subset kT$, поэтому $T^*$-пространство $V^*$ в $F^{(3)^*}$, порождённое теми же многочленами, что и $T$-пространство $V$ в $F^{(3)}$, вообще говоря, меньше. Образы свободных переменных в алгебре $F^{(3)}$ (в алгебре $F^{(3)^*}$) будем обозначать так же, как и сами переменные. В дальнейшем (за исключением приложения) $k$ — *бесконечное* поле характеристики $p>0$.

При построении контрпримеров в характеристике $p$ чрезвычайно важную роль играет $T$-пространство $W_n$, порождённое в $F^{(3)}$ всевозможными $n$-словами. Из бесконечно базируемых $T$-пространств, построенных в $W_n$, потом конструируются бесконечно базируемые $T$-идеалы. Основными объектами исследования для нас будут $T$-пространства $W_n$ и $W_n^*$, а также алгебры $F^{(3)}$ и $F^{(3)^*}$.

Весьма актуальной представляется следующая задача ($(p,n)$-проблема): найти неприводимые системы порождающих $T$-пространств $W_n$ для любых пар $p$ и $n$ (см. [1]). Для взаимно простых $n$ и $p$ ответ прост: $W_n = F^{(3)}$. Но если $n$ делится на $p$, то возникает достаточно содержательная, на наш взгляд, теория, имеющая свою специфику в характеристике $p = 2$. Аналогичная задача решается нами для $T^*$-пространства $W_n^*$ как в случае поля характеристики $p$, так и в случае поля нулевой характеристики.

Как правило, рассматриваемые $T$-пространства обладают ещё и мультипликативной структурой. Как выясняется в дальнейшем, основные $T$-пространства в $F^{(3)}$ оказываются её коммутативными подалгебрами или идеалами в этих подалгебрах. Более того, как показал первый автор [13, 14], $W_p$ — центр алгебры $F^{(3)}$. Поэтому интерес вызывают вопросы о строении этих подалгебр и некоторых модулей в $F^{(3)}$ над этими подалгебрами, а также аналогичные вопросы в алгебре $F^{(3)^*}$.

Цель работы заключается в исследовании $T$-пространственной и мультипликативной структуры относительно свободной алгебры $F^{(3)}$. Как будет видно из дальнейшего, между этими двумя структурами имеется интересная взаимосвязь. Также мы изучаем строение $W_n^*$ как $T^*$-пространства и как подалгебры в $F^{(3)^*}$. При этом в работе используются методы комбинаторной алгебры, структурной теории колец и модулей, а также результаты более ранних исследований по теории $T$-пространств.

В каждом разделе своя нумерация утверждений и формул. Например, теорема 3.2.1 является первой теоремой второго параграфа третьего раздела.

Первый раздел целиком посвящён вычислительным аспектам в алгебре $F^{(3)}$. Одним из основных инструментов исследования является так называемый *канонический базис*. Ранее аналогичный базис, правда для полилинейных многочленов, рассматривался В. Н. Латышевым в [30]. Раздел содержит три параграфа, где всюду, за исключением последнего параграфа, предполагается, что $p > 2$. В конце параграфа 1.3 (см. замечание 1.3.2) даётся комментарий к ситуации в характеристике $p = 2$, которая в некотором смысле является особенной. В параграфе 1.1 приводятся необходимые предварительные определения и обозначения, а также основные соотношения в $F^{(3)}$, используемые при вычислениях. Как будет следовать из результатов раздела 2 (см. также [19]), $W_n = F^{(3)}$ при $(n,p) = 1$ и $W_n = W_{p^l}$ при $n = p^l n_1$, где $(n_1,p) = 1$, $n_1, l \in \mathbb{N}$. Более того, для всех $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$. Здесь $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T$ — нётерово $T$-пространство, называемое ещё *диагональной компонентой* $T$-пространства $W_{p^l}$, а $CD_{p^l}$ (*коммутаторная компонента* $T$-пространства $W_{p^l}$) — бесконечно базируемое $T$-пространство, имеющее неприводимую систему порождающих

$$\bigl\{g_{m,l} = c_{m,l} z_1^{p^l} \mid c_{m,l} = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1}[x_1,y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m,y_m],\ m \in \mathbb{N}\bigr\}.$$

Отметим, что $T$-пространство $C_{p^l}$ (*чисто коммутаторная компонента* $T$-пространства $W_{p^l}$), порождённое всеми многочленами $c_{m,l}$, — собственное подпространство в $CD_{p^l}$. Если $p = 2$, $l = 1$, то $T$-пространство $W_2$ совпадает с $T$-пространством $D_2 = \{x_1^2 \cdots x_s^2 \mid s \in \mathbb{N}\}^T$ — первым примером не конечно базируемого $T$-пространства в характеристике 2 (см. [9]). Потом появились примеры бесконечно базируемых $T$-пространств в характеристике $p > 0$ в других подпространствах $W_{p^l}$ (см. [38, 43]). Поэтому интересно более подробно изучить не только строение этих подпространств в $W_{p^l}$, но и связь между ними.

Легко убедиться, что $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$ — бесконечные суммы $T$-пространств $C_{p^l}^{(m)} = \{c_{m,l}\}^T$ и $CD_{p^l}^{(m)} = \{g_{m,l}\}^T$ соответственно.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения. Если $l = 0$, то $C_1^{(m)} = \{[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]\}^T$ и $C^{(m)} = ([x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m])^T$ — $T$-пространство и $T$-идеал в алгебре $F^{(3)}$ соответственно, если $m = 1$, то $C_1^{(1)} = C_1$ и $C^{(1)} = C$.

Связь между введёнными таким образом $T$-пространствами $C_{p^l}$, $CD_{p^l}$, $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$ выражается следующей диаграммой:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \ldots & \supset & C^{(m)} & \supset & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_p & = & CD_p^{(1)} & + & CD_p^{(2)} & + & \ldots & + & CD_p^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_{p^l} & = & CD_{p^l}^{(1)} & + & CD_{p^l}^{(2)} & + & \ldots & + & CD_{p^l}^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_{p^l} & = & C_{p^l}^{(1)} & + & C_{p^l}^{(2)} & + & \ldots & + & C_{p^l}^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_p & = & C_p^{(1)} & + & C_p^{(2)} & + & \ldots & + & C_p^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \ldots & \supset & C_1^{(m)} & \supset & \ldots
\end{array} \tag{2}
$$

В этой диаграмме все включения строгие. Это следует из так называемой *теоремы о независимости* (см. теорему 3.1.1). Эта теорема утверждает, что никакие $T$-пространства $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$ не зависят (т. е. не исчезают после факторизации) от всех остальных, кроме тех, что находятся выше по столбцу.

Среди основных результатов первого раздела, приведённых в параграфе 1.2, укажем две так называемые *теоремы о выравнивании* (теоремы 1.2.1 и 1.2.2), которые позволяют говорить о том, что $T$-пространства в $W_p$ в значительной степени сводятся к $T$-пространствам из диаграммы (2). Далее в параграфе 1.3

с помощью первой теоремы о выравнивании доказывается *теорема о мономиальности* (теорема 1.3.1), которую можно сформулировать следующим образом: произвольное действие алгебры $kT$ на многочлены $c_{m,l}$ и $g_{m,l}$ по модулю $T$-пространств $C^{(m)}_{p^{l-1}}$ и $C^{(m)}_{p^l}$ соответственно сводится к мономиальным подстановкам в эти многочлены. Теоремы о выравнивании и о мономиальности используются в дальнейшем для изучения структурных вопросов.

Во втором разделе исследуется $T$-пространство $W_n$ с точки зрения нахождения его неприводимой системы порождающих ($(p,n)$-проблема). Ответ на эту проблему следующий:

1) если $(n,p)=1$, то $W_n = F^{(3)}$;
2) если $n = p^l n_1$, $(n_1,p)=1$, $l \in \mathbb{N}$, то $W_n = W_{p^l}$;
3) $T$-пространство $W_{p^l}$ для любых $p$ и $l$, кроме $p=2$, $l=1$, распадается в прямую сумму своих диагональной и коммутаторной компонент, т. е. $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$, и имеет следующую бесконечную неприводимую систему порождающих:

$$\{x_1^{p^l}, x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]z_1^{p^l}, \ldots, x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]\cdots x_i^{p^l-1}y_i^{p^l-1}[x_i,y_i]z_1^{p^l}, \ldots\};$$

4) если $p=2$, $l=1$, то $W_2 = D_2 = \{x_1^2, \ldots, x_1^2\cdots x_i^2, \ldots\}^T$.

В параграфе 2.1 этого раздела показано (см. следствия 2.1.1 и 2.1.2), что $T$-пространства $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$ по модулю не унитарно замкнутого $T^*$-идеала $I_m^*$ в алгебре $F^{(3)^*}$, порождённого одночленом $x^m$, где $m=p$, если $p>2$, и $m=4$, если $p=2$, являются бесконечно базируемыми. Отметим, что при доказательстве этих утверждений существенно используются результаты предыдущего раздела, в частности теорема о мономиальности. В 2002 г. В. В. Щиголевым [43] была доказана бесконечная базируемость указанных $T$-пространств, но без условия «по модулю $I_m^*$» при $l>1$ (для $l=1$ доказательство по модулю $I_p^*$ приведено им в [38]). Кроме того, данное им доказательство не содержало случая $p=2$, $l=1$, тогда как полученные в этом параграфе результаты охватывают и этот случай.

Результаты этого раздела, кроме того что они дают ответ на вопрос о неприводимой системе порождающих $W_n$, позволяют построить как бесконечно убывающие, так и бесконечно возрастающие цепочки строгих включений $T$-подпространств в $W_n$ (см. диаграммы включений, приведённые в параграфе 2.5, а также диаграмму (2)). Например, в $D_p$ имеется следующая бесконечная строго убывающая цепочка включений $T$-подпространств:

$$D_p \supset D_{p^2} \supset \ldots \supset D_{p^l} \supset \ldots .$$

Более того, показано (см. теорему 2.3.2), что любое подпространство в $D_p$, $p>2$, совпадает с $D_{p^l}$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $D_p$ — нётерово $T$-пространство. Таким образом, из теоремы 2.3.2 непосредственно получаем, что $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ для любого $l \in \mathbb{N}$ является простым $T$-пространством.

Третий раздел посвящён дальнейшему исследованию $T$-пространственной структуры алгебры $F^{(3)}$. Этот раздел содержит четыре параграфа. Везде, кроме параграфа 3.4, предполагается, что $p > 2$. Как видно из диаграммы (2), указанные в ней суммы $T$-подпространств не являются прямыми (см. самую нижнюю строку). Однако $C_{p^l}/C_{p^{l-1}}$ и $CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$ уже распадаются в прямые суммы. Следующие результаты представляются центральными в работе (см. следствия 3.3.2 и 3.3.4).

**Утверждение 1.** *Для любого $l \in \mathbb{N}$*

$$C_{p^l}/C_{p^{l-1}} \cong \bigoplus_{m=1}^{\infty} C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)},$$

*где $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ — простое $T$-пространство.*

**Утверждение 2.** *Для любого $l \in \mathbb{N}$*

$$CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}} \cong \bigoplus_{m=1}^{\infty} CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)},$$

*где $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ — простое $T$-пространство.*

В параграфе 3.4 рассматривается вопрос о возможности перенесения полученных в предыдущих параграфах этого раздела результатов на случай $p = 2$.

В четвёртом разделе изучается мультипликативная структура алгебры $F^{(3)}$, при этом весьма важную роль играет следующее обстоятельство: основные $T$-пространства в $F^{(3)}$ оказываются к тому же её коммутативными подалгебрами или даже идеалами в этих подалгебрах. В параграфе 4.1 описана структура $T$-алгебры $W_{p^l}$ (см. теорему 4.1.2). Алгебра $W_{p^l}$ коммутативна. Для всех $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $W_{p^l}$ распадается в прямую сумму $T$-пространств: $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$, где $CD_{p^l}$ — радикал алгебры $W_{p^l}$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса $p$, причём $W_{p^l}/CD_{p^l} \cong D_{p^l}$ — алгебра коммутативных многочленов $k[1, x_1^{p^l}, \ldots, x_i^{p^l}, \ldots]$. Если $p = 2$, $l = 1$, то $W_2 = D_2$ и $D_2$ распадается в прямую сумму $k$-алгебр $D_2 = k[1, x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots] \oplus CD_2$, где $CD_2$ — радикал алгебры $D_2$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса 2, и $D_2/CD_2 \cong k[1, x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots]$ — алгебра коммутативных многочленов.

В параграфе 4.2 мы полагаем, что $p > 2$. Этот параграф посвящён вопросу о строении $F^{(3)}$ и её подалгебр как модулей над коммутативными алгебрами. Так, в теореме 4.2.1 описаны бесконечные неприводимые системы порождающих для $W_p$-модулей $F^{(3)}$ и $CD_p$. Кроме того, $F^{(3)}$ является несвободным $W_p$-модулем ранга 1 (см. замечание 4.2.1). Но если $F^{(3)}$ рассматривать как $D_p$-модуль, то он оказывается свободным бесконечного ранга (см. теорему 4.2.2). В свою очередь, $CD_p$ как $D_p$-модуль является прямой суммой свободного $D_p$-модуля $M$ бесконечного ранга, порождённого всеми многочленами

$$x_{j_1}^{p-1} x_{j_2}^{p-1} \cdots x_{j_{2m-1}}^{p-1} x_{j_{2m}}^{p-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}],$$

и $D_p$-модуля $C_1$ (см. теорему 4.2.3). Следовательно, $W_p$ — прямая сумма $D_p$-модулей: $W_p = D_p \oplus M \oplus C_1$. Далее в этом же параграфе изучаются модульные конструкции, связанных с $T$-идеалами алгебры $W_p$, порождёнными элементами диаграммы (2). В параграфе 4.3 исследуется вопрос о возможности перенесения результатов, полученных в предыдущем параграфе, на случай $p = 2$. Выявляется специфика этого случая.

Наконец, в приложении изучается строение $T^*$-пространства $W_n^*$ и его компонент в алгебре $F^{(3)^*}$ над бесконечным полем характеристики $p$ или характеристики нуль. В первом параграфе приложения мы полагаем, что характеристика поля равна $p$ и $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$. Дан полный ответ на вопрос о неприводимой системе порождающих для $W_n^*$ (см. теорему П.1.1): для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $T^*$-пространство $W_n^*$ порождается бесконечной неприводимой системой многочленов

$$\{x_1^n,\ c_1(n), c_2(n), \ldots, c_m(n), \ldots,\ c_1(n)z_1^n, c_2(n)z_1^n, \ldots, c_m(n)z_1^n, \ldots\},$$

где

$$c_i(n) = x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1, y_1] \cdots x_i^{n-1}y_i^{n-1}[x_i, y_i], \quad i \in \mathbb{N},$$

причём $W_n^* = D_n^* \oplus (CD_n^* + C_n^*)$. Если $p = 2$, $l = 1$, то $W_n^* = D_n^* = \{x_1^n \cdots x_s^n \mid s \in N\}^{T^*}$, при этом выполнено строгое включение $(C_n^* + CD_n^*) \subset D_n^*$. $T^*$-пространства $CD_n^*$ и $C_n^*$ не связаны никакими включениями, и их пересечение ненулевое для всех $p$ и $l$.

Во втором параграфе приложения показано (см. теорему П.2.1), что в случае поля характеристики $p$ при $(n, p) = 1$, а также в случае поля нулевой характеристики $W_n^* = D_n^* = \{x_1^n\}^{T^*}$, при этом выполнено строгое включение $(C_n^* + CD_n^*) \subset D_n^*$. В свою очередь, $C_n^* = \{x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1, y_1]\}^{T^*}$ и $CD_n^* = \{x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1, y_1]z_1^n\}^{T^*}$; эти $T^*$-пространства не связаны никакими включениями и их пересечение ненулевое.

Отметим также, что изучено строение $T^*$-пространства $W_n^*$ как подалгебры в $F^{(3)^*}$ в зависимости от значений, принимаемых $n$ и $p$. Были получены следующие результаты.

I. Случай поля характеристики $p$ и $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$.

1. Если $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$, то алгебра $W_n^*$ коммутативна и распадается в прямую сумму: $W_n^* = D_n^* \oplus (C_n^* + CD_n^*)$, где $C_n^* + CD_n^*$ — радикал алгебры $W_n^*$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса $p$, причём $W_n^*/(C_n^* + CD_n^*) \cong D_n^*$, а $D_n^*$ изоморфно вкладывается в алгебру коммутативных многочленов

$$k[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots] = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle/([x_1, x_2])^{T^*}.$$

2. Если $p = 2$, $l = 1$, то алгебра $W_n^*$ коммутативна и $W_n^* = D_n^*$. $D_n^* \cap C^*$ — радикал алгебры $D_n^*$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса 2, причём фактор-алгебра $D_n^*/D_n^* \cap C^*$ изоморфно вкладывается в алгебру $k[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots]$.

Отметим, что в следующих двух случаях алгебра $W_n^*$ уже не является коммутативной. Она содержит подалгебру $k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle$, изоморфную, как показано в [11], алгебре $F^{(3)^*}$.

II. Случай поля характеристики $p$ и $(n,p)=1$.

1. Если $p>2$, то $W_n^* = D_n^*$. $D_n^* \cap C^*$ — радикал алгебры $D_n^*$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса $p$, причём фактор-алгебра $D_n^*/D_n^* \cap C^*$ изоморфно вкладывается в алгебру $k[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots]$.
2. Если $p=2$, то $W_n^* = D_n^*$, $D_n^* \cap C^*$ — радикал алгебры $D_n^*$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй *индекса* 4, причём фактор-алгебра $D_n^*/D_n^* \cap C^*$ изоморфно вкладывается в алгебру $k[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots]$.

III. Случай поля характеристики 0.

$W_n^* = D_n^*$, $D_n^* \cap C^*$ — радикал алгебры $D_n^*$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй неограниченного индекса, причём фактор-алгебра $D_n^*/D_n^* \cap C^*$ изоморфно вкладывается в алгебру $k[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots]$.

# 1. Базовые сведения

## 1.1. Основные определения, обозначения и утверждения

Пусть $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная счётно порождённая ассоциативная алгебра с единицей (для обозначения переменных мы иногда будем использовать символы $y$ и $z$) над бесконечным полем $k$ характеристики $p>0$ и $T$ — полугруппа эндоморфизмов (подстановок) алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$.

Эндоморфизм $\tau$ алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$, определяемый соответствием $x_j \mapsto g_j$, где $g_j \in k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$, $j=1,2,\ldots$, будем называть *подстановкой типа* $(x_1, \ldots, x_j, \ldots) \mapsto (g_1, \ldots, g_j, \ldots)$. В тех случаях, когда применяется подстановка типа $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, g_j, x_{j+1}, \ldots)$, мы будем писать для краткости $\tau\colon x_j \mapsto g_j$, $\tau \in T$. Через $f^\tau$ обозначим образ многочлена $f$ из алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ относительно подстановки $\tau$. Подстановки вида $x \mapsto \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r + \alpha$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha$ — произвольные элементы из поля $k$, назовём *линейными*. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем использовать линейные подстановки вида $x \mapsto x_1 + \ldots + x_r + \alpha$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — произвольный многочлен, $u_1, \ldots, u_n \in k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — произвольные одночлены. Будем говорить, что многочлен $f(u_1, \ldots, u_n)$ получен *мономиальной подстановкой* из многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$. В полугруппе $T$ можно также рассматривать подполугруппы подстановок различных типов: регулярные, симметрические и т. д. (см. [8, 43]).

Следуя [7, 8], векторное подпространство $V$ алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ назовём *$T$-пространством*, если $V$ замкнуто относительно подстановок (т. е. из $f \in V$ и $\tau \in T$ следует, что $f^\tau \in V$). Через $S^T$ обозначается $T$-пространство, порождённое подмножеством $S$ некоторого $T$-пространства. Другими словами,

$S^T$ есть минимальное $T$-пространство, содержащее $S$. Назовём $T$-пространство *конечно порождённым*, если для некоторого его конечного подмножества $S$ оно совпадает с $S^T$.

По определению *$T$-идеал* алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — это её идеал, являющийся одновременно и $T$-пространством.

Хорошо известно взаимно-однозначное соответствие между многообразиями ассоциативных алгебр, $T$-идеалами алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ и относительно свободными алгебрами, т. е. фактор-алгебрами алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ по соответствующему $T$-идеалу.

Очевидным образом определяется правое действие полугруппы $T$ на любой относительно свободной алгебре, на которой, следовательно, также можно ввести понятие $T$-пространства.

Ясно, что любое $T$-пространство в относительно свободной алгебре естественным образом наделяется структурой унитарного правого $kT$-модуля ($kT$ — полугрупповая $k$-алгебра). Это приводит к следующему определению, существенно обобщающему предыдущее определение $T$-пространства.

Назовём (*абстрактным*) *$T$-пространством* над полем $k$ любой унитарный правый $kT$-модуль. Соответственно, морфизмами $T$-пространств являются гомоморфизмы их как $kT$-модулей.

Как и выше, через $S^T$ обозначается $T$-пространство, порождённое подмножеством $S$ в некотором $T$-пространстве.

Расширяя таким образом понятие $T$-пространства, мы освобождаемся от необходимости рассматривать только подпространства в относительно свободных алгебрах. Можно рассматривать ещё и фактор-$T$-пространства, прямые суммы и т. д. Кроме того, имеется большой запас примеров $T$-пространств иной природы, связанных со следами, квазимногочленами и некоторыми другими специальными конструкциями (см. [8, 43]). Современный взгляд на концепцию $T$-пространства изложен в [12].

Как правило, рассматриваемые $T$-пространства обладают ещё и мультипликативной структурой. В связи с этим введём следующие определения. Алгебру $A$ над полем $k$ назовём *$T$-алгеброй*, если $A$ — унитарный правый $kT$-модуль (т. е. $T$-пространство), на котором элементы полугруппы $T$ действуют как эндоморфизмы алгебры $A$. Идеалы алгебры $A$, являющиеся $T$-алгебрами, будем называть *$T$-идеалами*. Ясно, что данные определения обобщают классические понятия свободной алгебры и $T$-идеала. В дальнейшем слова «$T$-пространство» и «$kT$-модуль» будут для нас синонимами.

Как уже отмечалось во введении, все $T$-пространства рассматриваются в унитарной относительно свободной алгебре Грассмана $F^{(3)} = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / T^{(3)}$, где $T^{(3)}$ — $T$-идеал, порождённый многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$ (так называемое тождество Грассмана), где под $[x_1, x_2]$ традиционно понимается разность $x_1x_2 - x_2x_1$. В приложении мы рассматриваем также неунитарную относительно свободную алгебру Грассмана $F^{(3)^*} = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle / T^{(3)}$. Название объясняется тем, что многообразие

$k$-алгебр, заданное тождеством $\big[[x,y],z\big]=0$, в случае $p\neq 2$ порождается алгеброй Грассмана (см. [36]), а в случае $p=2$ — алгеброй $\Phi_2$, впервые введённой одним из авторов и являющейся аналогом алгебры Грассмана (см. [9, 18, 43]). Эта алгебра строится следующим образом. Пусть $A=k[\ldots\alpha_{ij}\ldots]$ — коммутативная $k$-алгебра, порождённая элементами $\alpha_{ij}$, где $i,j\in\mathbb{N}$, $i\neq j$, $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$, $(1+\alpha_{ij})(1+\alpha_{il})=0$, $(1+\alpha_{ij})(1+\alpha_{mn})=(1+\alpha_{im})(1+\alpha_{jn})$. Тогда $\Phi_2=A\langle x_1,\ldots,x_i,\ldots\rangle/J$, где $J$ — идеал свободной $A$-алгебры $A\langle x_1,\ldots,x_i,\ldots\rangle$, порождённый элементами $x_ix_j+\alpha_{ij}x_jx_i$. Алгебра $F^{(3)}$ является относительно свободной алгеброй многообразия, порождённого алгеброй $\Phi_2$.

Алгебра $F^{(3)^*}$ естественным образом наделяется структурой $kT^*$-модуля, где $kT^*$ — полугрупповая $k$-алгебра полугруппы $T^*$ эндоморфизмов алгебры $k\langle x_1,\ldots,x_i,\ldots\rangle$ (ясно, что $T^*$ — подполугруппа в $T$). Отметим, что $kT^*\subset kT$, поэтому $T^*$-пространство $V^*$ в $F^{(3)^*}$, порождённое теми же элементами, что и $T$-пространство $V$ в $F^{(3)}$, вообще говоря, меньше. Образы свободных переменных в алгебре $F^{(3)}$ (в алгебре $F^{(3)^*}$) будем обозначать так же, как и сами переменные.

Под *одночленом* в алгебре $F^{(3)}$ и во всех её фактор-объектах мы подразумеваем произвольное произведение переменных $x_i$ (возможно, с кратностями). Всякий многочлен из $F^{(3)}$ является линейной комбинацией своих одночленов, и это представление, вообще говоря, неоднозначно. Так, например, одночлен может быть равен линейной комбинации некоторых других одночленов с теми же кратностями вхождения переменных.

В силу бесконечности поля $k$, если многочлен принадлежит $T$-пространству ($T^*$-пространству), то и любая полиоднородная компонента данного многочлена принадлежит этому $T$-пространству ($T^*$-пространству).

Отметим основные соотношения, применяемые при вычислениях в алгебрах $F^{(3)}$ и $F^{(3)^*}$ (см. [43]).

I. *Коммутаторные соотношения.*

$$[x_1,x_2][x_1,x_3]=0,\quad [x_1,x_2][x_3,x_4]=-[x_1,x_3][x_2,x_4],$$

$$\begin{aligned}&[x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r},y]=\\&\quad=n_1x_1^{n_1-1}[x_1,y]x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}+n_2x_2^{n_2-1}[x_2,y]x_1^{n_1}x_3^{n_3}\cdots x_r^{n_r}+\ldots+\\&\quad+n_rx_r^{n_r-1}[x_r,y]x_1^{n_1}\cdots x_{r-1}^{n_{r-1}},\quad n_i\in\mathbb{N},\quad i=\overline{1,r}.\end{aligned}$$

В частности, из последнего соотношения следует, что

$$[xy^n,y]=y^n[x,y],\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\quad [x^n,y]=nx^{n-1}[x,y],\quad n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, $p$-я степень переменной коммутирует с любым элементом алгебры $F^{(3)}$, т. е. $[x^p,y]=0$.

II. *Соотношения Фробениуса.*

$$(x_1+\ldots+x_r)^{p^l}=x_1^{p^l}+\ldots+x_r^{p^l},\quad (x_1\ldots x_r)^{p^l}=x_1^{p^l}\ldots x_r^{p^l},$$

где $p>2$, $l\in\mathbb{N}$ или $p=2$, $l>1$.

Приведём доказательства соотношений Фробениуса, из которых станет ясно, почему случай $p = 2$, $l = 1$ имеет свои особенности.

Итак, рассмотрим первое равенство из соотношений II для случая $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$. Достаточно доказать его справедливость для двух переменных при $l = 1$. В этом случае однородный многочлен $b = (x_1 + x_2)^p$ можно представить в виде суммы $b = \sum\limits_m b_m$, где $b_m$ — сумма одночленов фиксированного типа $(p - m, m)$, $m \in \{0, \ldots, p\}$.

Докажем, что $b_m = 0$ для любого $m = \overline{1, p-1}$. Для $m = 1$, как нетрудно проверить, при $p > 2$ выполняются равенства

$$b_1 = x_1^{p-1}x_2 + x_1^{p-2}x_2x_1 + \ldots + x_1x_2x_1^{p-2} + x_2x_1^{p-1} = \\ = px_1^{p-1}x_2 + \frac{p(p-1)}{2}x_1^{p-2}[x_2, x_1] = 0.$$

Линеаризуя соотношение

$$x_1^{p-1}x_2 + x_1^{p-2}x_2x_1 + \ldots + x_1x_2x_1^{p-2} + x_2x_1^{p-1} = 0,$$

получаем

$$\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)} = 0.$$

Осуществим ряд подстановок в многочлен $\sum\limits_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)}$: $x_i \mapsto x_1$, $i = \overline{1, p-m}$, $x_j \mapsto x_2$, $j = \overline{p-m+1, p}$ (на $p - m$ мест, которые занимают первые $p - m$ переменных, ставится $x_1$, на остальные $m$ мест, которые занимают следующие $m$ переменных, ставится $x_2$). После такой замены, как легко убедиться, получается многочлен $(p-m)!\, m!\, b_m$. Так как $(m, p) = 1$, то, используя приведённые выше равенства, получаем, что $b_m = 0$ для любого $m = \overline{1, p-1}$ при $p > 2$. Отсюда следует, что

$$(x_1 + x_2)^p = x_1^p + x_2^p.$$

Пусть теперь $p = 2$, $l > 1$. Нетрудно убедиться, что при $l = 2$ имеет место равенство $(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + x_2^4$. Далее индукцией по $l$ легко показать, что $(x_1 + x_2)^{2^l} = x_1^{2^l} + x_2^{2^l}$.

Рассмотрим второе равенство из соотношений II. Достаточно показать, что оно справедливо для двух переменных. Несложно проверяется, что в алгебрах $F^{(3)}$ и $F^{(3)^*}$ выполняется равенство

$$x_1^n x_2^n = (x_1x_2)^n + \frac{n(n-1)}{2}x_1^{n-1}x_2^{n-1}[x_1, x_2] \tag{1.1}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Из этого равенства при $n = p^l$ для любой характеристики $p$ и любого натурального значения $l$, кроме случая $p = 2$, $l = 1$, получаем, что второе из соотношений Фробениуса для двух переменных выполнено.

**Замечание 1.1.1.** В случае $p = 2$, $l = 1$ получим

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + [x_1, x_2], \quad (x_1 x_2)^2 = x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 [x_1, x_2],$$

т. е. соотношения Фробениуса места не имеют.

Приведённые выше рассуждения фактически и объясняют специфику случая характеристики 2.

С помощью коммутаторных соотношений нетрудно проверить, что любой элемент $f$ из алгебры $F^{(3)}$ (и, следовательно, из алгебры $F^{(3)^*}$) можно представить с точностью до переобозначения переменных в виде линейной комбинации многочленов следующего вида:

$$h_{a,b} = x_1^{a_1 - 1} y_1^{a_1' - 1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{a_m - 1} y_m^{a_m' - 1} [x_m, y_m] z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s},$$

где $a = (a_1, a_1', \ldots, a_m, a_m')$ — набор произвольных натуральных чисел, а $b = (b_1, \ldots, b_s)$ — набор произвольных целых неотрицательных чисел, переменные $y_i$, $z_j$ отличны от переменных $x_1, \ldots, x_m$, $m, s \in \mathbb{N}$. В том случае, когда в многочленах $h_{a,b}$ отсутствуют коммутаторы, будем считать, что $m = 0$, и использовать для таких многочленов обозначение $d_b$. Если $b_j = 0$ для любого $j = \overline{1, s}$, то для многочлена $h_{a,b}$ используется обозначение $c_a$. Таким образом, $h_{a,b} = c_a d_b$. При $m = 0$ и $b_j = 0$ для любого $j = \overline{1, s}$ многочлен $h_{a,b}$ по определению равен 1. В дальнейшем, если задана пара наборов $a$ и $b$, многочлен $h_{a,b}$ и числа $m$ и $s$ по этой паре определяются однозначно.

С многочленами $h_{a,b}$ связан *канонический базис* $k$-алгебры $F^{(3)}$ (см. [30, 43]):

$$x_{j_1}^{n_{j_1} - 1} x_{j_2}^{n_{j_2} - 1} \cdots x_{j_{2t-1}}^{n_{j_{2t-1}} - 1} x_{j_{2t}}^{n_{j_{2t}} - 1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2t-1}}, x_{j_{2t}}] x_{i_1}^{m_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{m_{i_s}}, \tag{1.2}$$

где $j_1 < \ldots < j_{2t}$, $i_1 < \ldots < i_s$, $n_{j_\beta}$, $m_{i_\alpha}$ — произвольные натуральные числа, множества индексов $\{j_\beta \in \mathbb{N} \mid \beta = \overline{1, 2t}\}$, $\{i_\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha = \overline{1, s}\}$ не пересекаются, $t, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При $t = s = 0$ многочлен (1.2) равен 1.

*Кратностью* многочлена $h_{a,b}$ назовём число входящих в него коммутаторов.

Всюду ниже, если специально не оговаривается, мы полагаем $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Будем говорить, что переменная в произвольном полиоднородном многочлене из $F^{(3)}$ имеет *уровень* $l$, если кратность её вхождения в этот многочлен равна $p^l q$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$, не делящегося на $p$ ($l = 0$ означает, что переменная входит с кратностью, не делящейся на $p$).

Многочлен $h_{a,b}$ будем называть *$p$-многочленом*, если кратности вхождения всех его переменных делятся на $p$, и *1-многочленом*, если кратность вхождения хотя бы одной из его переменных не делится на $p$.

Введём следующую систему обозначений. Положим для любых $r, s \in \mathbb{N}$

$$c_{(r,s)}(x, y) = x^{r-1} y^{s-1} [x, y]. \tag{1.3}$$

Таким образом,

$$c_a = c_{(a_1, a_1')}(x_1, y_1) \cdots c_{(a_m, a_m')}(x_m, y_m).$$

Многочлен $c_{(a_i, a_i')}(x_i, y_i)$ будем называть *$i$-м блоком* многочлена $c_a$, $i = \overline{1, m}$.

Рассмотрим следующие $T$-подпространства в алгебре $F^{(3)}$:

$$D_b = \{d_b\}^T, \quad C_a = \{c_a\}^T, \quad CD_{a,b} = \{c_a d_b\}^T;$$

$W_n$ — $T$-пространство, порождённое всеми одночленами, содержащими каждую переменную с кратностью $n$, $n \in \mathbb{N}$ (так называемыми *$n$-словами*).

$T$-пространство $W_n$ играет важную роль в относительно свободной алгебре Грассмана $F^{(3)}$. Такую же роль в относительно свободной алгебре Грассмана $F^{(3)^*}$ играет $T^*$-пространство $W_n^*$, порождённое в алгебре $F^{(3)^*}$ всевозможными $n$-словами. Именно в этих пространствах были построены первые примеры бесконечно базируемых пространств (первый автор [9,42] сделал это для $p = 2$, В. В. Щиголев [38] для $p > 2$). Таким образом, основными объектами исследования будут $T$-пространство $W_n$ и $T^*$-пространство $W_n^*$, а также относительно свободные алгебры Грассмана $F^{(3)}$ (унитарная) и $F^{(3)^*}$ (неунитарная).

Согласно сказанному выше любое $n$-слово в алгебре $F^{(3)}$ (в алгебре $F^{(3)^*}$) представляется в виде линейной комбинации многочленов $h_{a,b}$, у которых

$$a_1 = \ldots = a_m = a'_1 = \ldots = a'_m = b_1 = \ldots = b_s = n,$$

т. е. многочленов вида

$$x_1^{n-1} y_1^{n-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{n-1} y_m^{n-1} [x_m, y_m] z_1^n \cdots z_s^n.$$

При $m = 0$ эти многочлены превращаются в одночлены, которые мы будем называть *чисто степенными* или *диагональными* и обозначать через $d_s(n)$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При $m \in \mathbb{N}$ и $s = 0$ указанные многочлены назовём *чисто коммутаторными* и обозначим через $c_m(n)$. Кроме того, выделим так называемые *коммутаторные* многочлены $c_m(n) d_s(n)$, где $m, s \in \mathbb{N}$.

Одночлены $d_s(n)$ диагональны в смысле следующих определений.

Пусть $w$ — произвольное $n$-слово от $s$ переменных в алгебре $F^{(3)}$. Назовём *$j$-й координатой переменной $x_i$*, $i = \overline{1, s}$, число переменных в $n$-слове, отличных от $x_i$ и стоящих до $j$-го вхождения переменной $x_i$. $n$-слово $w$ по переменной $x_i$ определяется набором из $n$ $j$-х координат $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, переменных $x_i$, стоящих на $j$-х местах слова $w$. Числа $a_1, \ldots, a_n$ будем называть *координатами $n$-слова $w$ по переменной $x_i$* или будем говорить, что *$n$-слово $w$ имеет координаты* $(a_1, \ldots, a_n)$ *по переменной* $x_i$ и писать $w_{x_i} = (a_1, \ldots, a_n)_{x_i}$. Например, если $w = x_1^2 x_2 x_3 x_2 x_3$ — 2-слово, то $w_{x_1} = (0, 0)_{x_1}$, $w_{x_2} = (2, 3)_{x_2}$, $w_{x_3} = (3, 4)_{x_3}$. Слова, которые имеют равные координаты по каждой из входящих в них переменных $x_i$, мы называем *диагональными*. Ясно, что $n$-слово $w$ является диагональным тогда и только тогда, когда имеет вид $w = x_1^n \cdots x_s^n$.

Рассмотрим следующие $T$-подпространства в $W_n$:

$C_n = \{c_m(n) \mid m \in \mathbb{N}\}^T$ — чисто коммутаторная компонента;
$D_n = \{d_s(n) \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}^T$ — диагональная компонента;
$CD_n = \{c_m(n) d_s(n) \mid m, s \in \mathbb{N}\}^T$ — коммутаторная компонента.

Легко убедиться, что $C_n$ содержится в $CD_n$. Из сказанного выше следует, что любой элемент из $W_n$ является суммой $f+g$, где $f \in D_n$, $g \in CD_n$, т. е.

$$W_n = D_n + CD_n. \tag{1.4}$$

Строение $T^*$-пространства $W_n^*$ и его компонент

$$D_n^* = \{d_s(n) \mid s \in \mathbb{N}\}^{T^*},$$

$$C_n^* = \{c_m(n) \mid m \in \mathbb{N}\}^{T^*}, \quad CD_n^* = \{c_m(n)d_s(n) \mid m, s \in \mathbb{N}\}^{T^*}$$

во многом совпадает со строением аналогичных $T$-пространств $W_n$, $D_n$, $C_n$, $CD_n$. Однако есть и свои особенности: в частности, будет показано, что $C_n^*$ и $CD_n^*$ не связаны никакими включениями. Строение $W_n^*$, $D_n^*$, $C_n^*$ и $CD_n^*$, причём как над полем характеристики $p$, так и над полем нулевой характеристики, изучается в приложении.

Всюду ниже (за исключением приложения) мы рассматриваем $T$-пространство $W_n$, алгебру $F^{(3)}$ и связанные с ними теоретико-модульные конструкции.

Во втором разделе мы исследуем $T$-пространство $W_n$ с точки зрения нахождения его неприводимой системы порождающих в зависимости от значений, принимаемых $n$ и $p$ ($(p,n)$-проблема). Неприводимость системы элементов в разделе 2 означает, что каждый следующий элемент системы нельзя получить путём $kT$-действий из предыдущих элементов. Однако результаты второго раздела вместе с теоремой о независимости, доказанной в разделе 3, показывают, что система порождающих для $W_n$ неприводима в общепринятом смысле, т. е. никакой элемент системы нельзя получить путём $kT$-действий из других элементов. Хотя заметим, что в силу специфики характеристики 2 неприводимость систем порождающих для $D_2$ и $CD_2$ понимается в том же смысле, что и во втором разделе.

Если $(n,p)=1$, то $W_n = F^{(3)} = \{x_1\}^T$ — циклический $kT$-модуль. Если $n = p^l n_1$, где $(n_1,p)=1$, $n_1, l \in \mathbb{N}$, то, как будет показано во втором разделе, $W_n = W_{p^l}$. Существенную роль в алгебре $F^{(3)}$ играют именно $T$-пространства $W_{p^l}$. К таким $T$-пространствам сводятся многие структурные вопросы алгебры $F^{(3)}$. Это будет следовать из приводимых ниже теорем о выравнивании.

Если $n = p^l$, то для $c_m(n)$ используется обозначение

$$c_{m,l} = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]$$

и этот многочлен называется *коммутаторным многочленом кратности $m$ уровня $l$*, а для многочлена $c_m(n)d_s(n)$ при $s=1$ используется обозначение

$$g_{m,l} = c_{m,l} z_1^{p^l}.$$

Отметим, что из второго соотношения Фробениуса следует, что все порождающие $c_m(n)d_s(n)$ коммутаторной компоненты $CD_n$ при $n = p^l$ в случае $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$ получаются подходящими подстановками из многочленов $g_{m,l}$. В этом случае коммутаторная компонента $T$-пространства $W_{p^l}$ имеет вид

$$CD_{p^l} = \{g_{m,l} \mid m \in \mathbb{N}\}^T,$$

а в случае $p = 2$, $l = 1$

$$CD_2 = \{c_m(2)d_s(2) \mid m, s \in \mathbb{N}\}^T.$$

Для любых простых $p$ и натуральных $l$ чисто коммутаторная компонента имеет вид $C_{p^l} = \{c_{m,l} \mid m \in \mathbb{N}\}^T$, а диагональная компонента — $D_{p^l} = \{d_s(p^l) \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}^T$.

Введённые таким образом $T$-пространства $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$ раскладываются в бесконечные суммы циклических $kT$-модулей $C_{p^l}^{(m)} = \{c_{m,l}\}^T$ и $CD_{p^l}^{(m)} = \{g_{m,l}\}^T$, которые будем называть *элементарными составляющими* $T$-пространств $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$ соответственно. В случае $p = 2$, $l = 1$, как будет показано во втором разделе, $T$-пространство $CD_2$ на самом деле имеет неприводимую систему порождающих $\{c_{1,1}z_1^2 \cdots z_s^2 \mid s \in \mathbb{N}\}$ и раскладывается в бесконечную сумму $T$-пространств $CD_2^{(1,s)} = \{c_{1,1}z_1^2 \cdots z_s^2\}^T$. Эти циклические $kT$-модули мы по аналогии с вышесказанным назовём *элементарными составляющими* $T$-пространства $CD_2$.

Коммутаторный многочлен $c_{m,0}$ кратности $m$ уровня 0 — это многочлен $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$, и соответствующее $T$-пространство $C_{p^0}^{(m)} = \{c_{m,0}\}^T$ обозначается через $C_1^{(m)}$. Ясно, что $T$-пространство $CD_{p^0}^{(m)} = \{c_{m,0}z_1\}^T$ является $T$-идеалом в $F^{(3)}$, порождённым $c_{m,0}$. Этот $T$-идеал будем обозначать через $C^{(m)} = (c_{m,0})^T$. Положим $C_1^{(1)} = C_1$ и $C^{(1)} = C$. Очевидно, что $C_1^{(m)} \subset C_1$, $C^{(m)} \subset C$ для любого $m \in \mathbb{N}$. $T$-пространства $C_1^{(m)}$ и $C^{(m)}$ также будем называть *элементарными составляющими* $C_1$ и $C$ соответственно.

Начнём с некоторых вспомогательных обозначений и фактов, которые потребуются в дальнейшем.

Применим к каждой переменной многочлена

$$c_{m,l} = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]$$

линейные подстановки. Через $c_i$ обозначим полиоднородные многочлены фиксированных типов, выделенные соответственно из сомножителей $x_i^{p^l-1} y_i^{p^l-1}[x_i, y_i]$ многочлена $c_{m,l}$ после действия на них линейных подстановок. Будем считать, что $c_1, \ldots, c_m$ зависят от непересекающихся наборов переменных и $\{x_1, \ldots, x_t\}$ — объединение этих наборов. Обозначим через $c$ произведение многочленов $c_1 \cdots c_m$. Таким образом из многочлена $c_{m,l}$ с помощью линейных подстановок и $k$-линейных действий выделен (с учётом бесконечность поля $k$) некоторый многочлен $c(x_1, \ldots, x_t)$.

Имеет место следующее утверждение (см. [43]).

**Лемма 1.1.1.** *Пусть $u_1, \ldots, u_t$ — такие одночлены из алгебры $F^{(3)}$, что в многочлен $c(u_1, \ldots, u_t)$ все переменные входят с кратностью $p^{l+1}$. Тогда $c(u_1, \ldots, u_t) = 0$.*

Также нам понадобится следующая лемма (см. [9, 38]).

**Лемма 1.1.2.** $[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_m, y_m] \neq 0$ *в алгебре $F^{(3)}$ для любого $m \in \mathbb{N}$.*

Ниже рассматриваются соотношения, связывающие введённые $T$-подпространства алгебры $F^{(3)}$.

Следующая лемма достаточно очевидна.

**Лемма 1.1.3.** *Имеют место следующие цепочки включений*:

$$C_1 = C_1^{(1)} \underset{\neq}{\supset} C_1^{(2)} \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} C_1^{(m)} \underset{\neq}{\supset} \dots,$$
$$C = C^{(1)} \underset{\neq}{\supset} C^{(2)} \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} C^{(m)} \underset{\neq}{\supset} \dots .$$

Ниже нам потребуется следующая техническая лемма.

**Лемма 1.1.4.**

1. $\binom{p^l n-1}{p^l-1}$ *не делится на* $p$ *ни для какого* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Если* $(n,p)=1$, *то* $\binom{p^l n}{p^l}$ *не делится на* $p$.

**Доказательство.** 1. Для $l=0$ получаем $\binom{p^l n-1}{p^l-1}=1$, откуда следует утверждение 1 данной леммы. Для $l>0$

$$\binom{p^l n-1}{p^l-1} = \frac{p^l n-1}{p^l-1}\cdot\frac{p^l n-2}{p^l-2}\cdots\frac{p^l n-1-(p^l-2)}{p^l-1-(p^l-2)}.$$

Это число содержит как дроби, числитель и знаменатель которых не делятся ни на какую степень числа $p$, так и дроби с противоположным свойством. Рассмотрим последние. Легко убедиться, что такие дроби имеют вид $\frac{p^l n-p^s n_1}{p^l-p^s n_1}$, где $p^l > p^s n_1$, $(n_1,p)=1$, т. е. содержат в числителе и знаменателе одну и ту же степень числа $p$, равную $p^s$, $s\in\mathbb{N}$. Сокращая на $p^s$, получаем, что числитель и знаменатель этих дробей не делятся на $p$. Отсюда следует, что $\binom{p^l n-1}{p^l-1}$ не делится на $p$.

2. Для $l=0$ имеем $\binom{p^l n}{p^l}=n$. Отсюда и из $(n,p)=1$ следует утверждение 2 данной леммы. Для $l>0$

$$\binom{p^l n}{p^l} = \frac{p^l n}{p^l}\cdot\frac{p^l n-1}{p^l-1}\cdots\frac{p^l n-(p^l-1)}{p^l-(p^l-1)}.$$

Аналогично предыдущему среди дробей в правой части этого равенства рассмотрим дроби, числитель и знаменатель которых делятся на некоторую степень числа $p$. Такие дроби, очевидно, имеют вид $\frac{p^l n-p^s n_1}{p^l-p^s n_1}$, где $p^l>p^s n_1$, $(n_1,p)=1$, $s\in\mathbb{N}$, и, сокращая на $p^s$, получаем, что числитель и знаменатель этих дробей не делятся на $p$. Отсюда и из $(n,p)=1$ следует, что $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на $p$. □

Далее часто будет использоваться следующий достаточно очевидный принцип: если $f\in\{g\}^T$ и многочлены $g$ и $h_1h_2$ зависят от непересекающихся множеств переменных, то $h_1fh_2\in\{h_1gh_2\}^T$.

Рассмотрим многочлен $c_{(p^l n_1, p^l n_1')}(x_1,y_1) = x_1^{p^l n_1-1}y_1^{p^l n_1'-1}[x_1,y_1]$, где $n_1, n_1'\in\mathbb{N}$ (см. обозначение (1.3)). Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.1.5.**

1. $c_{1,l} \in \left\{c_{(p^l n_1, p^l n_1')}(x_1, y_1)\right\}^T$.
2. *Если* $(n,p) = 1$, *то* $x^{p^l} \in \left\{x^{p^l n}\right\}^T$.

**Доказательство.** 1. Применим подстановку $x \mapsto x+1$ к каждой из входящих в многочлен $c_{(p^l n_1, p^l n_1')}(x_1, y_1)$ переменных и выделим полиоднородный многочлен степени $p^l$ по всем переменным. Получим многочлен, равный $\alpha c_{1,l}$, где $\alpha = \binom{p^l n_1 - 1}{p^l - 1}\binom{p^l n_1' - 1}{p^l - 1}$. Из утверждения 1 леммы 1.1.4 следует, что $\alpha$ не делится на $p$.

2. Как и выше, применяем подстановку $x \mapsto x+1$ к одночлену $x^{p^l n}$ и выделяем полиоднородный многочлен степени $p^l$ по переменной $x$. Получим одночлен $\binom{p^l n}{p^l} x^{p^l}$. Согласно утверждению 2 леммы 1.1.4 число $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на $p$. Отсюда следует, что $x^{p^l} \in \left\{x^{p^l n}\right\}^T$. □

Свойства, доказанные в лемме 1.1.5, в дальнейшем будут часто использоваться. Метод доказательства, использующий эти свойства, для удобства назовём «*методом спуска*». Такое название естественно, так как в результате применения этого метода из многочлена с определёнными кратностями вхождения его переменных получается многочлен с меньшими кратностями вхождения этих переменных.

Следующая теорема говорит о взаимосвязи элементарных составляющих.

**Теорема 1.1.1.**

1. *Пусть* $r > l$. *Тогда* $C_{p^l}^{(m)} \underset{\neq}{\subset} C_{p^r}^{(m)}$ *и* $CD_{p^r}^{(m)} \underset{\neq}{\subset} CD_{p^l}^{(m)}$.
2. $C_{p^l}^{(m)} \underset{\neq}{\subset} CD_{p^r}^{(m)}$ *для любых* $l$ *и* $r$.

**Доказательство.** Строгость всех включений будет следовать из теоремы о независимости элементарных составляющих (см. теоремы 3.1.1 и 3.4.1). Покажем, что все включения выполнены.

1. Для доказательства включения $C_{p^l}^{(m)} \subset C_{p^r}^{(m)}$ при $r > l$ применяется метод спуска аналогично тому, как это было сделано в доказательстве утверждения 1 леммы 1.1.5. Покажем, что выполнено включение $CD_{p^r}^{(m)} \subset CD_{p^l}^{(m)}$. Для этого к многочлену $g_{m,l}$ применим подстановку

$$z_1 \mapsto z_1^{p^{r-l}} x_1^{p^{r-l}-1} y_1^{p^{r-l}-1} \cdots x_r^{p^{r-l}-1} y_r^{p^{r-l}-1}.$$

Такая подстановка корректна в силу $r > l$. После этой замены и использования коммутаторных соотношений получим многочлен $g_{m,r}$, откуда следует выполнение указанного включения.

2. Подставляя 1 вместо $z_1$ в многочлене $g_{m,l}$ получим, что $C_{p^l}^{(m)} \subset CD_{p^l}^{(m)}$. Отсюда и из утверждения 1 этой теоремы вытекает следующая диаграмма включений:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C_1^{(m)} & \subset & C_p^{(m)} & \subset & C_{p^2}^{(m)} & \subset & \ldots & \subset & C_{p^l}^{(m)} & \subset & \ldots \\
\cap & & \cap & & \cap & & \ldots & & \cap & & \\
C^{(m)} & \supset & CD_p^{(m)} & \supset & CD_{p^2}^{(m)} & \supset & \ldots & \supset & CD_{p^l}^{(m)} & \supset & \ldots .
\end{array}$$

Из этой диаграммы следует, что для любых $l$ и $r$ выполнено включение $C_{p^l}^{(m)} \subset$ $\subset CD_{p^r}^{(m)}$. □

С этого момента всюду ниже в этом разделе для удобства изложения мы полагаем, что $p > 2$, за исключением последнего замечания (см. замечание 1.3.2), где даётся комментарий к ситуации в характеристике 2.

Связь между введёнными выше $T$-пространствами $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$, а также их элементарными составляющими $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$ согласно теореме 1.1.1 и лемме 1.1.3 выражается следующей диаграммой строгих включений (см. также [17, 19, 20]).

Диаграмма 1

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \ldots & \supset & C^{(m)} & \supset & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_p & = & CD_p^{(1)} & + & CD_p^{(2)} & + & \ldots & + & CD_p^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_{p^l} & = & CD_{p^l}^{(1)} & + & CD_{p^l}^{(2)} & + & \ldots & + & CD_{p^l}^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_{p^l} & = & C_{p^l}^{(1)} & + & C_{p^l}^{(2)} & + & \ldots & + & C_{p^l}^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & & & \ldots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_p & = & C_p^{(1)} & + & C_p^{(2)} & + & \ldots & + & C_p^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \ldots & \supset & C_1^{(m)} & \supset & \ldots
\end{array}$$

## 1.2. Теоремы о выравнивании

Напомним, что мы используем обозначения

$$c_a = x_1^{a_1-1} y_1^{a_1'-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{a_m-1} y_m^{a_m'-1} [x_m, y_m]$$

и

$$h_{a,b} = c_a d_b = c_a z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s},$$

где $a = (a_1, a'_1, \ldots, a_m, a'_m)$ — набор натуральных чисел и $b = (b_1, \ldots, b_s)$ — набор целых неотрицательных чисел.

Следующие две теоремы показывают, что при определённых условиях $T$-пространства $C_a$ и $CD_{a,b}$, порождённые многочленами $c_a$ и $h_{a,b}$ с «невыровненными» кратностями вхождения переменных, совпадают с $C_{p^l}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$ соответственно. Это даёт основание полагать, что $T$-пространства в $W_p$ в значительной степени сводятся к $T$-пространствам из диаграммы 1.

**Теорема 1.2.1 (первая теорема о выравнивании).**

1. *Пусть в многочлене $c_a$ одна из его переменных имеет уровень $l$, а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный $l$. Тогда*
$$C_a = C_{p^l}^{(m)}.$$
2. *Пусть в многочлене $h_{a,b}$ одна из его переменных $x_i$, $y_i$, $i = \overline{1,m}$, имеет уровень $l$, а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный $l$, причём переменные $z_j$ имеют уровень, больший $l$, для любого $j = \overline{1,s}$. Тогда*
$$CD_{a,b} = C_{p^l}^{(m)}.$$

**Доказательство.** В силу коммутаторных соотношений все переменные в многочлене $c_a$ абсолютно равноправны, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что переменная $x_1$ имеет уровень $l$, т. е. кратность её вхождения равна $p^l n_1$, где $n_1$ не делится на $p$.

1. Так как все переменные в многочлене $c_a$ по условию имеют уровень, больший либо равный $l$, то этот многочлен можно записать в виде
$$c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n'_m - 1}[x_m, y_m],$$
где $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,m}$, $(n_1, p) = 1$.

Применяя метод спуска к многочлену $c_a$ аналогично тому, как это было проделано в доказательстве утверждения 1 леммы 1.1.5, получим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\{c_{m,l}\}^T \subset \{c_a\}^T$.

Теперь докажем, что для любого $m \in \mathbb{N}$
$$\{c_a\}^T \subset \{c_{m,l}\}^T. \tag{1.5}$$
Для доказательства включения (1.5) при $m = 1$ покажем, что многочлен $c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[x_1, y_1]$ получается с помощью некоторых подстановок из многочлена $c_{1,l} = x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l - 1}[x_1, y_1]$. Действительно, сначала повысим степень переменной $y_1$. Для этого в многочлене $c_{1,l}$ осуществим подстановку $x_1 \mapsto x_1 y_1^{n'_1 - 1}$. После этой подстановки, пользуясь коммутаторными соотношениями, получим многочлен
$$x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - n'_1 - p^l + 1 + p^l - 1 + n'_1 - 1}[x_1, y_1],$$
равный после упрощения
$$x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[x_1, y_1].$$

Остаётся повысить степень переменной $x_1$. Для этого к полученному многочлену применим подстановку $x_1 \mapsto x_1^{n_1}$ и воспользуемся коммутаторными соотношениями. В результате получим

$$(x_1^{n_1})^{p^l-1} y_1^{p^l n_1'-1}[x_1^{n_1}, y_1] = n_1 x_1^{p^l n_1 - n_1 + n_1 - 1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1].$$

Правая часть равенства есть многочлен $n_1 c_a$, где $(n_1, p) = 1$. Таким образом, $c_a \in \{c_{1,l}\}^T$.

Теперь покажем, что при $m = 2$ включение (1.5) также выполнено. Для этого опишем способ получения многочлена

$$c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1] x_2^{p^l n_2 - 1} y_2^{p^l n_2' - 1}[x_2, y_2]$$

с помощью подстановок из многочлена

$$c_{2,l} = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1}[x_1, y_1] x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2].$$

Шаг 1. Повышение степеней переменных $y_1$, $y_2$. В многочлене $c_{2,l}$ осуществим подстановки $x_1 \mapsto x_1 y_1^{n_1'-1}$, $x_2 \mapsto x_2 y_2^{n_2'-1}$. После этих подстановок, пользуясь коммутаторными соотношениями, получим многочлен

$$x_1^{p^l-1} y_1^{p^l n_1' - n_1' - p^l + 1 + p^l - 1 + n_1' - 1}[x_1, y_1] x_2^{p^l-1} y_2^{p^l n_2' - n_2' - p^l + 1 + p^l - 1 + n_2' - 1}[x_2, y_2],$$

равный после упрощения

$$x_1^{p^l-1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1] x_2^{p^l-1} y_2^{p^l n_2' - 1}[x_2, y_2].$$

Шаг 2. Повышение степени переменной $x_2$. Из коммутаторных соотношений следует, что полученный многочлен равен

$$-x_1^{p^l-1} x_2^{p^l-1}[x_1, x_2] y_1^{p^l n_1' - 1} y_2^{p^l n_2' - 1}[y_1, y_2].$$

В этом многочлене сделаем замену $x_1 \mapsto x_1 x_2^{n_2-1}$ и воспользуемся коммутаторными соотношениями. После всех преобразований получится многочлен

$$-x_1^{p^l-1} x_2^{p^l n_2 - 1}[x_1, x_2] y_1^{p^l n_1' - 1} y_2^{p^l n_2' - 1}[y_1, y_2].$$

Применим к последнему многочлену коммутаторные соотношения, в итоге получим многочлен $c_{(p^l, p^l n_1')}(x_1, y_1) c_{(p^l n_2, p^l n_2')}(x_2, y_2)$ (см. обозначение (1.3)).

Шаг 3. Повышение степени переменной $x_1$. Осуществим в многочлене $c_{(p^l, p^l n_1')}(x_1, y_1) c_{(p^l n_2, p^l n_2')}(x_2, y_2)$ ту же подстановку, которую применяли для повышения степени переменной $x_1$ в многочлене $x_1^{p^l-1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1]$. В результате получится многочлен $n_1 c_a$, где $(n_1, p) = 1$. Отсюда следует, что $c_a \in \{c_{2,l}\}^T$.

Пусть теперь $m \geqslant 2$. Докажем включение (1.5). Чтобы получить нужные степени переменных $y_i$, применим указанные в шаге 1 подстановки ко всем переменным $x_i$, $i = \overline{1, m}$, многочлена $c_{m,l}$. Мы получим многочлен

$$c_{(p^l, p^l n_1')}(x_1, y_1) c_{(p^l, p^l n_2')}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l, p^l n_m')}(x_m, y_m).$$

Чтобы у последнего многочлена повысить степени переменных $x_i$, $i = \overline{2,m}$, нужно последовательно повышать их для каждого его $i$-го блока $c_{(p^l,p^l n_i')}(x_i,y_i)$, $i = \overline{2,m}$, используя первый блок $c_{(p^l,p^l n_1')}(x_1,y_1)$, как это было описано в шаге 2. В итоге мы получим многочлен

$$c_{(p^l,p^l n_1')}(x_1,y_1)c_{(p^l n_2,p^l n_2')}(x_2,y_2)\cdots c_{(p^l n_m,p^l n_m')}(x_m,y_m).$$

К этому многочлену применим шаг 3, чтобы повысить степень переменной $x_1$. В результате получим многочлен $n_1 c_a$, где $(n_1,p)=1$, значит, $c_a \in \{c_{m,l}\}^T$. Таким образом, включение (1.5) выполняется для любого $m \in \mathbb{N}$. Из доказанных включений следует равенство $C_a = C_{p^l}^{(m)}$.

Может случиться так, что среди переменных $x_i$, $y_i$, $i = \overline{1,m}$, имеется несколько переменных уровня $l$. На подстановках, указанных в шагах 1 и 2, это никак не отражается, и утверждение остаётся справедливым.

2. Рассмотрим $T$-пространство $CD_{a,b} = \{h_{a,b}\}^T = \{c_a d_b\}^T$. Подставляя 1 вместо всех переменных одночлена $d_b$, получим, что $c_a \in \{c_a d_b\}^T$. Согласно только что доказанному $\{c_{m,l}\}^T = \{c_a\}^T$, значит, $\{c_{m,l}\}^T \subset \{c_a d_b\}^T$. Обратное включение также выполняется. В самом деле, по условию все переменные $z_j$ имеют уровень, больший $l$, поэтому $d_b = z_1^{p^l q_1}\cdots z_s^{p^l q_s}$, где $q_j$ делится на $p$ для любого $j = \overline{1,s}$. Осуществим в $c_{m,l}$ подстановку $x_1 \mapsto x_1 z_1^{q_1}\cdots z_s^{q_s}$. Получим следующий многочлен:

$$(x_1 z_1^{q_1}\cdots z_s^{q_s})^{p^l-1} y_1^{p^l-1}[x_1 z_1^{q_1}\cdots z_s^{q_s}, y_1]\cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m,y_m].$$

Учитывая, что $q_j$ делится на $p$, применим коммутаторные соотношения к этому многочлену. После всех преобразований придём к многочлену $c_{m,l} z_1^{p^l q_1}\cdots z_s^{p^l q_s}$, равному $c_{m,l} d_b$. Таким образом, $c_{m,l} d_b \in \{c_{m,l}\}^T$. Согласно доказанному утверждению 1 этой теоремы $c_a \in \{c_{m,l}\}^T$. Тогда $c_a d_b \in \{c_{m,l} d_b\}^T$. Значит, $c_a d_b \in$ $\in \{c_{m,l}\}^T$. Следовательно, $\{c_a d_b\}^T \subset \{c_{m,l}\}^T$. □

**Замечание 1.2.1.** Если действовать по отдельности на каждый блок коммутаторного многочлена $c_{2,l}$ подстановками, аналогичными приведённым выше для доказательства включения (1.5) при $m = 1$, то, в частности, в многочлене $c_{2,l}$ осуществляются подстановки $x_1 \mapsto x_1^{n_1}$ и $x_2 \mapsto x_2^{n_2}$. Первая подстановка не превратит $c_{2,l}$ в 0, так как по условию $x_1$ в многочлене $c_a$ имеет уровень $l$, т. е. $(n_1,p)=1$. Вторая подстановка может обратить $c_{2,l}$ в 0, поскольку в общем случае переменная $x_2$ в многочлене $c_a$ может иметь уровень, больший $l$, т. е. $n_2$ может делиться на $p$. Поэтому для $m = 2$ в доказательстве был предложен другой способ получения многочлена $c_a$ из $c_{2,l}$ с помощью некоторых подстановок, который позволил избежать обращения многочлена $c_{2,l}$ в 0.

Также отметим, что в предложенном способе повышение степени переменной $x_1$ выполняется в последнюю очередь, а шаги 1 и 2 можно выполнять в любом порядке. Это связано с тем, что повышение степеней остальных переменных (см. шаги 1 и 2) осуществляется с помощью переменной $x_1$. При этом нет необходимости повышать сначала степени переменных $y_1$ и $y_2$, а затем переменной $x_2$. Например, можно было бы повысить степени переменных $x_2$ и $y_1$, используя подстановки, аналогичные указанным в шаге 1, а затем повысить степень оставшейся переменной $y_2$, пользуясь способом, описанным в шаге 2.

**Теорема 1.2.2 (вторая теорема о выравнивании).** *Пусть в многочлене $h_{a,b}$ одна из его переменных $z_j$, $j = \overline{1,s}$, имеет уровень $l$, а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный $l$. Тогда*

$$CD_{a,b} = CD_{p^l}^{(m)}.$$

**Доказательство.** В силу коммутаторных соотношений все переменные $z_i$ в многочлене $h_{a,b}$ абсолютно равноправны, поэтому без ограничения общности можно считать, что переменная $z_1$ имеет уровень $l$. Из условия следует, что числа в наборах $a$ и $b$ можно представить в следующем виде: $a_i = p^l n_i$, $a'_i = p^l n'_i$, $b_j = p^l q_j$, $n_i, n'_i, q_j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,s}$, причём $(q_1, p) = 1$. Применим к многочлену $c_a d_b \in CD_{a,b}$ подстановки $z_j \mapsto 1$, $j = \overline{2,s}$. С помощью метода спуска (см. доказательство леммы 1.1.5) нетрудно показать, что $CD_{p^l}^{(m)} \subset CD_{a,b}$. Для доказательства обратного включения осуществим в $g_{m,l}$ подстановку

$$z_1 \mapsto z_1^{q_1} z_2^{q_2} \cdots z_s^{q_s} x_1^{n_1 - 1} y_1^{n'_1 - 1} \cdots x_m^{n_m - 1} y_m^{n'_m - 1}.$$

Воспользовавшись коммутаторными соотношениями и вторым из соотношений Фробениуса, из многочлена $g_{m,l}$ получим многочлен

$$x_1^{p^l - 1 + p^l n_1 - p^l} y_1^{p^l - 1 + p^l n'_1 - p^l} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l - 1 + p^l n_m - p^l} y_m^{p^l - 1 + p^l n'_m - p^l} [x_m, y_m] \times \\ \times z_1^{p^l q_1} z_2^{p^l q_2} \cdots z_s^{p^l q_s}.$$

Этот многочлен после упрощения станет равным $c_a d_b$. Значит, выполняется обратное включение $CD_{a,b} \subset CD_{p^l}^{(m)}$. □

**Замечание 1.2.2.** В утверждении 2 первой теоремы о выравнивании существенно, что все переменные $z_j$, $j = \overline{1,s}$, имеют уровень, больший $l$. Иначе из второй теоремы о выравнивании следовало бы равенство $C_{p^l}^{(m)} = CD_{p^l}^{(m)}$, что невозможно по утверждению 2 теоремы 1.1.1.

Рассмотрим многочлены $c_\alpha$, $h_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'_m)$ — набор натуральных чисел, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ — набор целых неотрицательных чисел. Через $\lambda(h_{\alpha,\beta})$ обозначим наименьший уровень среди всех уровней, которые имеют переменные $x$ и $y$ многочлена $h_{\alpha,\beta}$, а через $\mu(h_{\alpha,\beta})$ — наименьший уровень среди всех уровней, которые имеют переменные $z$ многочлена $h_{\alpha,\beta}$. Тогда $\mu(c_\alpha) = 0$. Следующая теорема показывает, что $\lambda$ и $\mu$ являются определяющими характеристиками $T$-пространств $C_\alpha$ и $CD_{\alpha,\beta}$, порождённых соответственно многочленами $c_\alpha$ и $h_{\alpha,\beta}$.

**Теорема 1.2.3.**

1. *Если* $\lambda(c_\alpha) = \lambda(c_\gamma)$, *то* $\{c_\alpha\}^T = \{c_\gamma\}^T$. *Если* $\lambda(c_\alpha) < \lambda(c_\gamma)$, *то* $\{c_\alpha\}^T \underset{\neq}{\subset} \{c_\gamma\}^T$.

2. *Предположим, что* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\alpha,\beta})$ *и* $\lambda(h_{\gamma,\delta}) < \mu(h_{\gamma,\delta})$. *Если* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) = \lambda(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$. *Если* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \lambda(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\alpha,\beta}\}^T \underset{\neq}{\subset} \{h_{\gamma,\delta}\}^T$.
3. *Предположим, что* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) \geqslant \mu(h_{\alpha,\beta})$ *и* $\lambda(h_{\gamma,\delta}) \geqslant \mu(h_{\gamma,\delta})$. *Если* $\mu(h_{\alpha,\beta}) = \mu(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$. *Если* $\mu(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\gamma,\delta}\}^T \underset{\neq}{\subset} \{h_{\alpha,\beta}\}^T$.

**Доказательство.** 1. По утверждению 1 первой теоремы о выравнивании имеем, что $\{c_\alpha\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(c_\alpha)}}\right\}^T$ и $\{c_\gamma\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(c_\gamma)}}\right\}^T$, и равенство $\{c_\alpha\}^T = \{c_\gamma\}^T$ очевидно. Из $\lambda(c_\alpha) < \lambda(c_\gamma)$ по теореме 1.1.1 следует, что $\{c_\alpha\}^T \underset{\neq}{\subset} \{c_\gamma\}^T$.

2. По утверждению 2 первой теоремы о выравнивании имеем, что $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(h_{\alpha,\beta})}}\right\}^T$ и $\{h_{\gamma,\delta}\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(h_{\gamma,\delta})}}\right\}^T$, и равенство $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$ очевидно. Из $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \lambda(h_{\gamma,\delta})$ по теореме 1.1.1 следует, что $\{h_{\alpha,\beta}\}^T \underset{\neq}{\subset} \{h_{\gamma,\delta}\}^T$.

3. По второй теореме о выравнивании имеем $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \left\{CD_{p^{\mu(h_{\alpha,\beta})}}\right\}^T$ и $\{h_{\gamma,\delta}\}^T = \left\{CD_{p^{\mu(h_{\gamma,\delta})}}\right\}^T$, и равенство $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$ очевидно. Из $\mu(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\gamma,\delta})$ по теореме 1.1.1 следует, что $\{h_{\gamma,\delta}\}^T \underset{\neq}{\subset} \{h_{\alpha,\beta}\}^T$. □

**Замечание 1.2.3.** Функция $\lambda$ задаёт отношение эквивалентности как на множестве многочленов вида $c_\alpha$, так и на множестве многочленов вида $h_{\alpha,\beta}$ с условием $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\alpha,\beta})$ и разбивает их на классы эквивалентности. Эти классы совпадают, если значения этой функции от различных многочленов равны, а это означает, что соответствующие $T$-пространства совпадают. Эти классы не пересекаются, если значения этой функции различны, а это означает, что одно из соответствующих $T$-пространств строго содержится в другом. Функция $\mu$ имеет тот же смысл, что и функция $\lambda$, но на множестве многочленов вида $h_{\alpha,\beta}$ с условием $\lambda(h_{\alpha,\beta}) \geqslant \mu(h_{\alpha,\beta})$.

Непосредственно из теорем о выравнивании и теоремы 1.1.1 получаем следствие.

**Следствие 1.2.1.** *Если* $h_{a,b}$ — $p$*-многочлен кратности* $m \in \mathbb{N}$, *то* $h_{a,b}$ *лежит в* $CD_p^{(m)}$.

## 1.3. Теорема о мономиальности

В этом разделе будет доказано, что по модулю $T$-пространств $C_{p^l}^{(m)}$ и $C_{p^{l-1}}^{(m)}$ действие алгебры $kT$ на $g_{m,l}$ и $c_{m,l}$ сводится к мономиальным подстановкам в этих многочленах.

Для доказательства основного результата нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 1.3.1.**

$$(x_1+x_2)^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1+x_2,y_1]z^{p^l}\equiv$$
$$\equiv x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]z^{p^l}+x_2^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1]z^{p^l}\ (\mathrm{mod}\ C^{(1)}_{p^{l-1}}).$$

**Доказательство.** Согласно коммутаторным соотношениям левую часть доказываемого сравнения запишем следующим образом:

$$(x_1+x_2)^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1+x_2,y_1]z^{p^l}=$$
$$=\left(x_1^{p^l-1}+\binom{p^l-1}{1}x_1^{p^l-2}x_2+\ldots+\binom{p^l-1}{n-1}x_1^{p^l-n}x_2^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\binom{p^l-1}{n}x_1^{p^l-n-1}x_2^{n}+\ldots+\binom{p^l-1}{p^l-2}x_1x_2^{p^l-2}+x_2^{p^l-1}\right)\times$$
$$\times([x_1,y_1]+[x_2,y_1])y_1^{p^l-1}z^{p^l}.$$

Поэтому, как нетрудно убедиться, однородный многочлен

$$f=(x_1+x_2)^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1+x_2,y_1]z^{p^l}$$

представляется в виде суммы

$$f=x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]z^{p^l}+\sum_n f_nz^{p^l}+x_2^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1]z^{p^l},$$

где

$$f_n=\binom{p^l-1}{n-1}x_1^{p^l-n}x_2^{n-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1]+\binom{p^l-1}{n}x_1^{p^l-n-1}x_2^{n}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1] \tag{1.6}$$

есть полиоднородный многочлен типа $(p^l-n,n,p^l)$, $n\in\{1,\ldots,p^l-1\}$, выделенный из однородного многочлена $(x_1+x_2)^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1+x_2,y_1]$. Для доказательства леммы нужно показать, что $f_nz^{p^l}\in C^{(1)}_{p^{l-1}}$ для любого $n=\overline{1,p^l-1}$.

Заметим, что коэффициенты в правой части равенства (1.6) связаны соотношением

$$\binom{p^l-1}{n-1}+\binom{p^l-1}{n}=\binom{p^l}{n}$$

при $n=\overline{1,p^l-1}$, причём $\binom{p^l}{n}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ p)$. Поэтому многочлен $f_n$ примет вид $f_n=\binom{p^l-1}{n}\varphi_n$, где

$$\varphi_n=x_1^{p^l-n-1}x_2^{n}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]-x_1^{p^l-n}x_2^{n-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1].$$

Теперь достаточно показать, что $\varphi_nz^{p^l}\in C^{(1)}_{p^{l-1}}$ для любого $n=\overline{1,p^l-1}$.

Рассмотрим произвольное $n$ из множества $\{1,\ldots,p^l-1\}$. Тогда $n$ можно представить в виде $p^{l_1}n_1$, где $(n_1,p)=1$, причём $p^{l_1}n_1<p^l$. Отсюда следует, что $l_1$ — это некоторое число из множества $\{0,\ldots,l-1\}$. Сначала покажем, что $\varphi_n$ получается некоторыми подстановками из многочлена

$x_1^{p^{l_1}-1}y_1^{p^{l_1}-1}[x_1,y_1] \in C^{(1)}_{p^{l_1}}$ для указанного $n$. Действительно, из этого многочлена подстановкой $x_1 \mapsto x_1 y_1^{p^{l-l_1}-1}$ и применением коммутаторных соотношений получим многочлен $x_1^{p^{l_1}-1}y_1^{p^{l}-1}[x_1,y_1]$. Такая подстановка возможна, поскольку $l_1 < l$. Подставим теперь $x_1x_2$ вместо переменной $x_1$ полученного многочлена. Используя очевидное равенство $[x_1x_2,y_1] = x_1[x_2,y_1] + x_2[x_1,y_1]$, после такой подстановки мы приходим к многочлену

$$x_1^{p^{l_1}}x_2^{p^{l_1}-1}y_1^{p^{l}-1}[x_2,y_1] + x_2^{p^{l_1}}x_1^{p^{l_1}-1}y_1^{p^{l}-1}[x_1,y_1].$$

Осуществим подстановки $x_1 \mapsto x_1^{p^{l-l_1}-n_1}$, $x_2 \mapsto x_2^{n_1}$ в последний многочлен. Они корректны, так как $n_1 > 0$ и $p^{l-l_1} - n_1 = p^l/p^{l_1} - n/p^{l_1} = (p^l - n)/p^{l_1} > 0$ по условию $n \in \{1,\ldots,p^l-1\}$.

В результате указанных подстановок получим, что

$$(x_1^{p^{l-l_1}-n_1})^{p^{l_1}}(x_2^{n_1})^{p^{l_1}-1}y_1^{p^{l}-1}[x_2^{n_1},y_1] + \\ + (x_2^{n_1})^{p^{l_1}}(x_1^{p^{l-l_1}-n_1})^{p^{l_1}-1}y_1^{p^{l}-1}[x_1^{p^{l-l_1}-n_1},y_1].$$

Согласно коммутаторным соотношениям этот многочлен приводится к виду

$$n_1x_1^{p^l-n}x_2^{n-n_1+n_1-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1] + \\ + (p^{l-l_1}-n_1)x_2^n x_1^{p^l-n-p^{l-l_1}+n_1+p^{l-l_1}-n_1-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1].$$

Поскольку $p^{l-l_1} - n_1 \equiv -n_1 \pmod p$ при $l_1 < l$, полученный многочлен после упрощения станет равным многочлену $n_1\varphi_n$. Так как $(n_1,p)=1$, то $\varphi_n \in \{c_{m,l_1}\}^T$. Отсюда следует, что $\varphi_n z^{p^l} \in \{c_{m,l_1}z^{p^l}\}^T$. Из утверждения 2 первой теоремы о выравнивании получаем, что $c_{m,l_1}z^{p^l} \in \{c_{m,l_1}\}^T$, поэтому $\varphi_n z^{p^l} \in \{c_{m,l_1}\}^T = C^{(1)}_{p^{l_1}}$. Из $l_1 \leqslant l-1$ согласно утверждению 1 теоремы 1.1.1 следует, что $C^{(1)}_{p^{l_1}} \subseteq C^{(1)}_{p^{l-1}}$. Значит, $\varphi_n z^{p^l} \in C^{(1)}_{p^{l-1}}$. Последнее утверждение верно для любого $n = \overline{1,p^l-1}$. $\square$

Сформулируем и докажем основной результат этого раздела.

**Теорема 1.3.1 (теорема о мономиальности).** *По модулю $T$-пространства $C^{(m)}_{p^l}$ ($C^{(m)}_{p^{l-1}}$) для произвольного $\tau \in kT$ многочлен $(g_{m,l})^\tau$ (соответственно $(c_{m,l})^\tau$) есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из многочлена $g_{m,l}$ (соответственно из $c_{m,l}$).*

**Доказательство.** В силу соотношений Фробениуса действие алгебры $kT$ на сомножитель $z^{p^l}$ многочлена $g_{m,l} = c_{m,l}z^{p^l}$ сводится к мономиальным подстановкам, поэтому рассмотрим действие $kT$ на сомножитель $c_{m,l}$. Легко убедиться, что для доказательства теоремы достаточно показать выполнение следующих сравнений:

$$\begin{aligned}&g_{m,l}(z_1+z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) \equiv\\ &\qquad \equiv g_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) + g_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) \pmod{C^{(m)}_{p^l}},\\ &c_{m,l}(z_1+z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m) \equiv\\ &\qquad \equiv c_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) + c_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m) \pmod{C^{(m)}_{p^{l-1}}}.\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что многочлен

$$\begin{aligned}&g_{m,l}(z_1+z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) =\\ &\qquad = (z_1+z_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1}[z_1+z_2, y_1] x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m, y_m] z^{p^l}\end{aligned}$$

равен

$$\begin{aligned}&g_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) + g_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) +\\ &\qquad\qquad + \sum_{n=1}^{p^l-1} f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m, y_m] z^{p^l},\end{aligned}$$

где $f_n$ — полиоднородный многочлен типа $(p^l-n, n, p^l)$, $n \in \{1, \ldots, p^l-1\}$, выделенный из однородного многочлена $(z_1+z_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1}[z_1+z_2, y_1]$ (см. формулу (1.6)). Остаётся лишь показать, что для любого $n = \overline{1, p^l-1}$ многочлен

$$f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m, y_m] z^{p^l}$$

принадлежит $T$-пространству $C^{(m)}_{p^l}$. Действительно, $f_n z^{p^l} \in C^{(1)}_{p^{l-1}}$ по лемме 1.3.1. В свою очередь, $C^{(1)}_{p^{l-1}} \subset C^{(1)}_{p^l}$ согласно утверждению 1 теоремы 1.1.1, значит, $f_n z^{p^l} \in C^{(1)}_{p^l}$. По определению

$$x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m, y_m] \in C^{(m-1)}_{p^l}.$$

Значит, произведение $f_n$ на предыдущий многочлен лежит в $C^{(m)}_{p^l}$. Следовательно, выполняется первое из указанных выше сравнений.

Многочлен $c_{m,l}(z_1+z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m)$ представляется в виде суммы

$$\begin{aligned}&c_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) + c_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m) +\\ &\qquad\qquad + \sum_{n=1}^{p^l-1} f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m, y_m],\end{aligned}$$

где $f_n$ — многочлен, определённый так же, как в предыдущей части доказательства. Согласно лемме 1.3.1 для любого $n = \overline{1, p^l-1}$ имеем $f_n \in \{c_{1,l-1}\}^T$. Тогда

$$\begin{aligned}&f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m, y_m] \in\\ &\qquad\qquad \in \{c_{1,l-1} x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1}[x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1}[x_m, y_m]\}^T.\end{aligned}$$

Из утверждения 1 первой теоремы о выравнивании получаем, что $T$-пространство

$$\{c_{1,l-1}x_2^{p^l-1}y_2^{p^l-1}[x_2,y_2]\cdots x_m^{p^l-1}y_m^{p^l-1}[x_m,y_m]\}^T$$

совпадает с $C^{(m)}_{p^{l-1}}$. Следовательно,

$$f_n x_2^{p^l-1}y_2^{p^l-1}[x_2,y_2]\cdots x_m^{p^l-1}y_m^{p^l-1}[x_m,y_m]\in C^{(m)}_{p^{l-1}}.$$

Значит, выполняется второе из указанных выше сравнений. □

Напомним, что коммутаторный многочлен кратности $m$ уровня 0 имеет вид $c_{m,0}=[x_1,y_1]\cdots[x_m,y_m]$. Из теоремы 1.3.1 вытекает следствие.

**Следствие 1.3.1.** *Любой многочлен из $T$-пространства $C^{(m)}_{p^l}$ (из $CD^{(m)}_{p^l}$) есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l},\dots,c_{m,1},c_{m,0}$ (соответственно из $g_{m,l},c_{m,l},\dots,c_{m,1},c_{m,0}$).*

**Доказательство.** Рассмотрим многочлен $f\in C^{(m)}_{p^l}$. По теореме 1.3.1 он представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}$, и некоторого многочлена $f_1\in C^{(m)}_{p^{l-1}}$. В свою очередь, по этой же теореме $f_1$ также представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l-1}$, и некоторого многочлена $f_2\in C^{(m)}_{p^{l-2}}$. Продолжая таким образом представлять на каждом шаге получающиеся $f_i\in C^{(m)}_{p^{l-i}}$ с помощью теоремы 1.3.1 в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l-i}$, и некоторого многочлена $f_{i+1}\in C^{(m)}_{p^{l-(i+1)}}$, $i=\overline{3,l-1}$, в конце концов многочлен $f$ предста́вим в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l},\dots,c_{m,1}$, и некоторого многочлена $f_l$, принадлежащего $T$-пространству $C^{(m)}_1=\{c_{m,0}\}^T$. Из полилинейности $c_{m,0}$ следует, что $f_l$ есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,0}$. Таким образом, $f$ есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l},\dots,c_{m,1},c_{m,0}$.

Рассмотрим теперь многочлен $f\in CD^{(m)}_{p^l}$. По теореме 1.3.1 он представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}$, и некоторого многочлена $f_1\in C^{(m)}_{p^l}$. Согласно доказанному выше $f_1$ есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l},\dots,c_{m,1},c_{m,0}$. Значит, $f$ представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l},c_{m,l}\dots,c_{m,1},c_{m,0}$. □

Докажем следующее весьма полезное и интересное утверждение.

**Теорема 1.3.2.** *Если к $p$-многочлену кратности $m$ применить мономиальную подстановку, то получится линейная комбинация $p$-многочленов кратности $m$.*

**Доказательство.** Согласно определению $p$-многочлен кратности $m$ можно записать в следующем виде:

$$x_1^{pn_1-1}y_1^{pn_1'-1}[x_1,y_1]\cdots x_m^{pn_m-1}y_m^{pn_m'-1}[x_m,y_m]z_1^{pq_1}\cdots z_s^{pq_s},$$

где $n_i, n_i' \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Применим мономиальную подстановку к этому многочлену. Согласно соотношениям Фробениуса мономиальная подстановка в $p$-одночлен $z_1^{pq_1}\cdots z_s^{pq_s}$ переводит его снова в некоторый $p$-одночлен. Поэтому рассмотрим действие мономиальной подстановки на

$$x_1^{pn_1-1}y_1^{pn_1'-1}[x_1,y_1]\cdots x_m^{pn_m-1}y_m^{pn_m'-1}[x_m,y_m].$$

Достаточно понять, как мономиальная подстановка действует на один из блоков этого многочлена, например на первый блок $x_1^{pn_1-1}y_1^{pn_1'-1}[x_1,y_1]$.

Итак, рассмотрим многочлен $u^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[u,v]$, где $u$, $v$ — произвольные одночлены из алгебры $F^{(3)}$. Одночлены $u$ и $v$ представим в виде $u = x_1\cdots x_r$, $v = y_1\cdots y_n$. При этом будем считать, что все переменные $x_\alpha$, $y_\beta$, $\alpha = \overline{1,r}$, $\beta = \overline{1,n}$, попарно различны.

Сначала покажем, что многочлен

$$(x_1\cdots x_r)^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_1\cdots x_r, v] \tag{1.7}$$

можно представить в виде

$$x_1^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_1,v]x_2^{pn_1}\cdots x_r^{pn_1} + x_2^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_2,v]x_1^{pn_1}x_3^{pn_1}\cdots x_r^{pn_1} + \ldots + \\ + x_r^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_r,v]x_1^{pn_1}\cdots x_{r-1}^{pn_1}. \tag{1.8}$$

Используя коммутаторные соотношения, запишем многочлен (1.7) в виде

$$(x_2\cdots x_r)^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}x_1^{pn_1-1}[x_1,v]x_2\cdots x_r + \\ + (x_1x_3\cdots x_r)^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}x_2^{pn_1-1}[x_2,v]x_1x_3\cdots x_r + \ldots + \\ + (x_1\cdots x_{r-1})^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}x_r^{pn_1-1}[x_r,v]x_1\cdots x_{r-1}.$$

С помощью коммутаторных соотношений эта сумма преобразуется к виду

$$x_1^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_1,v](x_2\cdots x_r)^{pn_1} + x_2^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_2,v](x_1x_3\cdots x_r)^{pn_1} + \ldots + \\ + x_r^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_r,v](x_1\cdots x_{r-1})^{pn_1}.$$

С помощью второго соотношения Фробениуса последнее выражение приводится к требуемому виду (1.8).

В каждом из слагаемых выражения (1.8) содержится в качестве сомножителя многочлен вида $v^{pn_1'-1}[x_\alpha, v]$, $\alpha = \overline{1,r}$. Этот многочлен аналогично тому, как это было проделано для многочлена (1.7), представим следующим образом:

$$y_1^{pn_1'-1}[x_\alpha,y_1]y_2^{pn_1'}\cdots y_n^{pn_1'} + y_2^{pn_1'-1}[x_\alpha,y_2]y_1^{pn_1'}y_3^{pn_1'}\cdots y_n^{pn_1'} + \\ + y_n^{pn_1'-1}[x_\alpha,y_n]y_1^{pn_1'}\cdots y_{n-1}^{pn_1'}.$$

Подставляя последний многочлен в соответствующее слагаемое выражения (1.8) и используя коммутаторные соотношения, мы представим многочлен $u^{pn_1-1}v^{pn'_1-1}[u,v]$ в виде линейной комбинации $p$-многочленов, причём их кратность равна 1. Отсюда следует, что остальные блоки $u_i^{pn_i-1}v_i^{pn'_i-1}[u_i,v_i]$ также являются линейными комбинациями $p$-многочленов кратности 1, где $u_i$, $v_i$ — произвольные одночлены из $F^{(3)}$, $i=\overline{2,m}$, а значит, произведение всех блоков является линейной комбинацией $p$-многочленов кратности $m$. □

Для дальнейшего нам понадобится следующее важное следствие.

**Следствие 1.3.2.** *Если к $p$-многочленам $c_{m,l}$ и $g_{m,l}$ применить подстановку, для которой кратность вхождения всех переменных в результат подстановки равна $p^l$, то получится линейная комбинация $p$-многочленов кратности $m$.*

**Доказательство.** Согласно следствию 1.3.1 любое действие алгебры $kT$ на $p$-многочлен $c_{m,l}$ переводит его в линейную комбинацию многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l},\ldots,c_{m,1},c_{m,0}$, а действие на $p$-многочлен $g_{m,l}$ переводит его в линейную комбинацию многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l},c_{m,l},\ldots,c_{m,1},c_{m,0}$. По теореме 1.3.2 многочлены, полученные мономиальными подстановками из $g_{m,l},c_{m,l},\ldots,c_{m,1}$, являются линейными комбинациями $p$-многочленов кратности $m$, а многочлены, полученные мономиальными подстановками из $c_{m,0}$, по лемме 1.1.1 равны нулю. □

Исследуем линейную структуру $T$-пространства $W_p$. Для этого рассмотрим канонический базис (1.2) алгебры $F^{(3)}$. Выделим в нём подсистему $\Delta$, состоящую из многочленов, у которых $m_i$ делятся на $p$. Эта система, очевидно, лежит в $W_p$ и состоит из двух непересекающихся подсистем: $\Delta_p$ — $p$-многочлены и $\Delta_1$ — такие 1-многочлены, которые лежат в $\Delta$. По первой теореме о выравнивании $\Delta_1\subset C_1$.

Согласно следствию 1.3.1 и теореме 1.3.2 линейное пространство $W_p$ можно представить в виде суммы подпространств $k\Delta_p$ (линейная оболочка $\Delta_p$) и $C_1$.

**Предложение 1.3.1.** $W_p=k\Delta_p\oplus C_1$.

**Доказательство.** Покажем, что $k\Delta_p\cap C_1=0$. Пусть $f$ — некоторая нетривиальная линейная комбинация $p$-многочленов, лежащая в $C_1$. Очевидно, можно считать, что многочлен $f$ полиоднороден. Рассмотрим $p$-многочлен $h$ с наименьшим числом коммутаторов, входящий в $f$. Если $h$ — одночлен (т. е. $m=0$), то, полагая все переменные равными 1, получаем $1=0$. Если $m>0$ и $X$ — множество переменных, входящих в коммутаторы многочлена $h$, то любой другой $p$-многочлен из разложения $f$ имеет в своих коммутаторах хотя бы одну переменную, не лежащую в $X$.

Положим все переменные, не лежащие в $X$, равными единице. Тогда все слагаемые из разложения $f$ перейдут в некоторый ненулевой $p$-многочлен $h_1$, лежащий по предположению в $C_1$. Но тогда для некоторых $m$ и $l$ по первой теореме о выравнивании $C_{p^l}^{(m)} \subset \{h_1\}^T \subset C_1$, что противоречит теореме о независимости (см. раздел 3). $\square$

**Замечание 1.3.1.** Система $\Delta_1$ является только частью базиса $C_1$. Так, например, многочлен $[x_1x_2, x_3] = x_1[x_2, x_3] + x_2[x_1, x_3]$ не может быть выражен через $\Delta_1$. Следовательно, система $\Delta$ не образует базис пространства $W_p$. Поиск хорошего базиса $T$-пространства $C_1$ — отдельная задача, которая здесь не рассматривается.

**Замечание 1.3.2.** Специфика случая $p = 2$ заключается в том, что соотношения Фробениуса выполняются только начиная со степени 4, т. е. когда $p = 2$, $l \geqslant 2$. В случае же $p = 2$, $l = 1$ выполняются соотношения из замечания 1.1.1. О связи между элементарными составляющими, т. е. об аналоге диаграммы 1, в этом случае будет сказано в разделе 3. Первая теорема о выравнивании (см. теорему 1.2.1) имеет место для $C_{2^l}^{(m)}$ при любом $l$. Для доказательства второй теоремы о выравнивании (см. теорему 1.2.2) используются соотношения Фробениуса, поэтому доказательство этой теоремы дословно переносится на $CD_{2^l}^{(m)}$ для любого $l$, кроме $l = 1$. Если бы для $CD_2^{(m)}$ была справедлива вторая теорема о выравнивании, то из неё следовало бы, что $CD_2$ порождается всеми $CD_2^{(m)}$, но, как будет показано в разделе 2.1, это неверно. Однако имеет место аналог следствия 1.2.1.

**Предложение 1.3.2.** *Если $h_{a,b}$ — 2-многочлен из $C$, то $h_{a,b}$ лежит в $CD_2$.*

**Доказательство.** Так как 2-многочлен $h_{a,b}$ лежит в $C$, то его кратность ненулевая. Пусть она равна $m \in \mathbb{N}$. Согласно определению 2-многочлен $h_{a,b}$ кратности $m$ имеет вид

$$x_1^{2n_1-1}y_1^{2n_1'-1}[x_1, y_1]\cdots x_m^{2n_m-1}y_m^{2n_m'-1}[x_m, y_m]z_1^{2q_1}\cdots z_s^{2q_s},$$

где $n_i, n_i' \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Этот многочлен получается из многочлена

$$x_1y_1[x_1, y_1]\cdots x_my_m[x_m, y_m]z_1^2\cdots z_s^2 \in CD_2$$

подстановками

$$z_1 \mapsto x_1^{n_1-1}y_1^{n_1'-1}\cdots x_m^{n_m-1}y_m^{n_m'-1}z_1^{q_1}, \quad z_j \mapsto z_j^{q_j}, \quad j = \overline{2, s},$$

и использованием коммутаторных соотношений. Отсюда следует утверждение предложения. $\square$

Нетрудно проверить, что теорема о мономиальности (см. теорему 1.3.1) справедлива для элементов $c_{m,l}$ при любом $l$. Остаётся под вопросом справедливость этой теоремы для $g_{m,1}$, однако для остальных $g_{m,l}$ эта теорема верна.

# 2. $(p,n)$-проблема

## 2.1. О неприводимости системы порождающих $T$-пространств $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$

В этом разделе будет приведён полный ответ для $(p,n)$-проблемы о неприводимой системе порождающих для $T$-пространства $W_n$ для любых пар $p$ и $n$. Как уже говорилось (см. раздел 1.1), $T$-пространство $W_n$ является суммой диагональной компоненты $D_n$ и коммутаторной компоненты $CD_n$, содержащей чисто коммутаторную компоненту $C_n$. Если $(n,p)=1$, то ответ следующий: $W_n = D_n = F^{(3)} = \{x_1\}^T$ — циклический $kT$-модуль. Действительно, достаточно к одночлену $x_1^n$ применить подстановку $x_1 \mapsto x_1+1$ и выделить линейную часть. Если же $n=p^l n_1$, где $(n_1,p)=1$, $n_1, l \in \mathbb{N}$, то, как будет показано ниже, $D_n = D_{p^l}$, $C_n = C_{p^l}$, $CD_n = CD_{p^l}$, т. е. $W_n = W_{p^l}$. Для ответа на поставленную проблему в разделе 2.1 рассматривается вопрос о неприводимой системе порождающих $T$-пространств $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$. Для $T$-пространства $D_{p^l}$ этот вопрос будет рассмотрен в разделе 2.3.

Нам понадобятся следующие утверждения (см. [38]).

**Лемма 2.1.1.** *Если $f_1,f_2,f_3,f_4 \in F^{(3)}$ — произвольные многочлены, зависящие только от двух переменных, то*

$$[f_1,f_2][f_3,f_4]=0.$$

**Лемма 2.1.2.** *Многочлен $x^{p^s-1}y^{p^s-1}[x,y]$ не принадлежит $T$-пространству*

$$\left\{x^{p^t-1}y^{p^t-1}[x,y] \mid t=\overline{1,s-1}\right\}^T.$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.1.1.** *Ни для какого $i \geqslant 2$ многочлен $c_{i,l}$ не лежит в $T$-пространстве $\{c_{1,l},\dots,c_{i-1,l}\}^T + (x^m)^{T^*}$, где $(x^m)^{T^*}$ — не унитарно замкнутый $T^*$-идеал в алгебре $F^{(3)^*}$, порождённый $x^m$, $m=p$, если $p>2$, и $m=4$, если $p=2$.*

**Доказательство.** Пусть $p>2$, $l\in\mathbb{N}$ или $p=2$, $l>1$. Допустим, что

$$c_{i,l} = (c_{1,l})^{\tau_1} + \ldots + (c_{i-1,l})^{\tau_{i-1}} + f,$$

где $f \in (x^m)^{T^*}$, $\tau_s \in kT$, $s \leqslant i-1$.

Так как кратность вхождения всех переменных в левую часть равенства для $c_{i,l}$ равна $p^l$, то согласно следствию 1.3.2 многочлены $(c_{1,l})^{\tau_1},\dots,(c_{i-1,l})^{\tau_{i-1}}$ являются линейными комбинациями $p$-многочленов с кратностями, не превосходящими $i-1$, имеющих сомножитель вида $x_r^m$ (хотя бы одна буква не попадает в коммутатор). Следовательно, $c_{i,l} \in (x^m)^{T^*}$ в $F^{(3)}$, т. е. $c_{i,l}$ является линейной комбинацией $p$-многочленов с кратностями вхождения переменных $p^l$, у которых хотя бы одна переменная не лежит в коммутаторе.

Применяя подстановку $x \mapsto x+1$ к каждой из входящих в $c_{i,l}$ переменных и линеаризуя, получим из многочлена $c_{i,l}$ произведение коммутаторов $[x_1,y_1]\cdots[x_i,y_i]$. С другой стороны, аналогичные подстановки и линеаризации многочлена из $(x^m)^{T^*}$ дают нуль. Таким образом, $[x_1, y_1]\cdots[x_i, y_i] = 0$ в $F^{(3)}$, что противоречит лемме 1.1.2.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$, $l = 1$. Покажем, что для любого $i > 1$ многочлен $c_{i,1}$ нельзя получить никакими подстановками и $k$-линейными действиями из предыдущих многочленов $c_{1,1}, \ldots, c_{i-1,1}$. Допустим противное. Заметим, что многочлен $c_{i,1}$ является произведением $i$ многочленов вида $xy[x, y]$:

$$c_{i,1} = x_1y_1[x_1, y_1]x_2y_2[x_2, y_2]\cdots x_iy_i[x_i, y_i].$$

Тогда, с одной стороны, прямые вычисления с применением равенства (см. замечание 1.3.2)

$$xy[x, y] = (xy)^2 - x^2y^2 \tag{2.1}$$

к многочлену $c_{i,1}$ показывают, что $c_{i,1}$ есть линейная комбинация многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из произведения меньшего, чем $2i$, числа квадратов переменных, и одночлена, являющегося произведением $2i$ квадратов переменных. С другой стороны, сделанное выше предположение и применение равенства (2.1) к элементам $c_{1,1}, \ldots, c_{i-1,1}$ позволяет представить многочлен $c_{i,1}$ в виде линейной комбинации многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из произведения $2i - 1$ и меньшего числа квадратов переменных. Отсюда получаем, что произведение $2i$ квадратов переменных можно получить некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями из произведений меньшего, чем $2i$, числа квадратов переменных, что противоречит результатам работы [9]. Следовательно, $c_{i,1} \notin \{c_{1,1}, \ldots, c_{i-1,1}\}^T$. Добавление $T$-идеала $(x^4)^{T^*}$ по существу ничего не меняет из очевидных соображений степеней. $\square$

**Замечание 2.1.1.** Частные случаи теоремы 2.1.1 доказаны В. В. Щиголевым в [38, 43].

Непосредственно из теоремы 2.1.1 получаем следствие.

**Следствие 2.1.1.** *$T$-пространство $C_{p^l} + (x^m)^{T^*}$, где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$, является бесконечно базируемым.*

Имеет место также следующее утверждение.

**Следствие 2.1.2.** *$T$-пространство $CD_{p^l} + (x^m)^{T^*}$, где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$, является бесконечно базируемым.*

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$. Тогда $CD_{p^l}$ порождается всеми многочленами

$$g_{r,l} = x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1, y_1]\cdots x_r^{p^l-1}y_r^{p^l-1}[x_r, y_r]z_1^{p^l}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Допустим, что для некоторого $r > 1$ многочлен $g_{r,l}$ лежит в $\{g_{i,l} \mid i = \overline{1, r-1}\}^T + (x^m)^{T^*}$. Положив $z_1 = 1$ в многочлене $g_{r,l}$, получим по нашему предположению, что

$$c_{r,l} = (g_{1,l})^{\tau_1} + \ldots + (g_{r-1,l})^{\tau_{r-1}} + f,$$

где $f \in (x^m)^{T^*}$, $\tau_s \in kT$, $s \leqslant r-1$. Заметим, что в общем случае вместо переменной $z_1$ каждого слагаемого $g_{s,l}$ подставляется многочлен вида $h_1+\ldots+h_t+\alpha$, где $h_1, \ldots, h_t \in F^{(3)}$ — некоторые многочлены без свободного члена, $\alpha \in k$. Поэтому в силу соотношений Фробениуса каждый многочлен $(g_{s,l})^{\tau_s}$, $s \leqslant r-1$, распадается на два слагаемых, одно из которых лежит в $(x^m)^{T^*}$, а другое лежит в $\{c_{s,l}\}^T$. Тогда из равенства для $c_{r,l}$ получаем, что $c_{r,l} \in \{c_{1,l}, \ldots, c_{r-1,l}\}^T + (x^m)^{T^*}$, что противоречит теореме 2.1.1.

Пусть теперь $p = 2$, $l = 1$. Напомним, что $CD_2 = \{c_m(2)d_s(2) \mid m, s \in \mathbb{N}\}^T$. Однако, как нетрудно вывести из равенства (2.1), система порождающих для $T$-пространства $CD_2$ имеет вид

$$\{c_{1,1}z_1^2, \ldots, c_{1,1}z_1^2 \cdots z_s^2, \ldots\}.$$

Доказательство неприводимости этой системы почти дословно повторяет рассуждения, приведённые в теореме 2.1.1 в случае $p = 2$, $l = 1$. Отсюда следует бесконечная базируемость $CD_2$. Добавление $T$-идеала $(x^4)^{T^*}$, как и выше, ничего не меняет. □

Несложно показать, что справедливо следующее утверждение.

**Следствие 2.1.3.** *$T$-пространства*

$$(C_{p^l} + (x^m)^{T^*})/(x^m)^{T^*}, \quad (CD_{p^l} + (x^m)^{T^*})/(x^m)^{T^*},$$

*где $m = p$, если $p > 2$, и $m = 4$, если $p = 2$, являются бесконечно базируемыми.*

Из доказательства следствия 2.1.2 получаем, что $CD_2$ раскладывается в бесконечную сумму своих элементарных составляющих $CD_2^{(1,s)} = \{c_{1,1}z_1^2 \cdots z_s^2\}^T$. Отметим связь между $CD_2$ и $T$-пространствами $CD_2^{(m)} = \{g_{m,1}\}^T$. С помощью равенства (2.1) нетрудно показать, что через элементы $c_{1,1}z_1^2 \cdots z_s^2$, $s \in \mathbb{N}$, можно выразить (с помощью некоторых подстановок и $k$-линейных действий) все многочлены $g_{m,1} = c_{m,1}z_1^2$, т. е. $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T \subset CD_2$. Бесконечная система многочленов $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}$ неприводима, что вытекает из соображений, аналогичных приведённым для доказательства неприводимости системы порождающих для $C_2$. Но, как показывает следующее предложение, система $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}$ не порождает всё $T$-пространство $CD_2$.

**Предложение 2.1.1.** $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T \underset{\neq}{\subset} CD_2$.

**Доказательство.** Достаточно показать, что многочлен

$$c_{1,1}z_1^2z_2^2 = x_1y_1[x_1, y_1]z_1^2z_2^2 \in CD_2$$

не лежит в $T$-пространстве $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T$. Предположим, что это не так. Отметим, что коммутатор $[u, v]$ любых двух одночленов есть линейная комбинация коммутаторов от переменных вида $[x_i, x_j]$, умноженных на одночлены. Тогда многочлены линейной комбинации, дающие $x_1y_1[x_1, y_1]z_1^2z_2^2$ и получающиеся из $g_{m,1}$ некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями, являются линейными комбинациями произведений $m$ коммутаторов, умноженных на одночлены.

Так как многочлен $x_1y_1[x_1,y_1]z_1^2z_2^2$ зависит от четырёх переменных, то многочлены линейной комбинации, равной $x_1y_1[x_1,y_1]z_1^2z_2^2$, являющиеся произведениями коммутаторов в количестве большем или равном 2, умноженных на одночлены, содержат произведение вида $[x,y][x,z]$. Значит, все такие многочлены равны нулю. Отсюда следует, что многочлен $x_1y_1[x_1,y_1]z_1^2z_2^2$ является линейной комбинацией многочленов, полученных некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями из многочлена $g_{1,1}$. Последнее утверждение противоречит неприводимости системы порождающих для $CD_2$. $\square$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 2.1.3.** *Многочлен $x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1,y_1]$ не принадлежит $T$-пространству $C_{p^l}$.*

**Доказательство.** Заметим, что многочлен $x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1,y_1]$ зависит от двух переменных. Поэтому если предположить, что $x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1,y_1]$ принадлежит $T$-пространству

$$C_{p^l} = \{c_{m,l} \mid m \in \mathbb{N}\}^T,$$

то те слагаемые линейной комбинации, которые получаются некоторыми подстановками из многочленов $c_{m,l}$ при $m \geqslant 2$, становятся равными нулю в силу леммы 2.1.1. Значит,

$$x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1,y_1] \in \{x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]\}^T,$$

что противоречит лемме 2.1.2. $\square$

Для $T$-пространств $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$ имеет место следующее утверждение.

**Предложение 2.1.2.** *Для любого простого числа $p$ и любого $l \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$C_{p^l} \underset{\neq}{\subset} CD_{p^l}, \quad \text{где} \quad C_{p^l} \neq C_{p^{l+1}}.$$

**Доказательство.** Непосредственно из леммы 2.1.3 следует, что $C_{p^l} \neq C_{p^{l+1}}$. Выше уже отмечалось, что $C_{p^l} \subset CD_{p^l}$. Для доказательства строгости этого включения достаточно указать элемент из $T$-пространства $CD_{p^l}$, не принадлежащий в то же время $T$-пространству $C_{p^l}$. В качестве такого элемента рассмотрим многочлен $x_1^{p^{l+1}-1}y_1^{p^{l+1}-1}[x_1,y_1]$. Действительно, его можно получить из многочлена $x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]z_1^{p^l} \in CD_{p^l}$ подстановкой $z_1 \mapsto x_1^{p-1}y_1^{p-1}$. Из леммы 2.1.3 вытекает строгость включения. $\square$

## 2.2. Разложение $T$-пространства $W_n$ на диагональную и коммутаторную составляющие

Как уже отмечалось, $W_n = F^{(3)}$ при $(n,p)=1$. Если $n = p^l n_1$, где $l \in \mathbb{N}$, $(n_1,p)=1$, то, как будет ясно из дальнейшего, $W_n = W_{p^l}$. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.2.1.**

1. *Во всех случаях, кроме $p = 2$, $l = 1$, $kT$-модуль $W_{p^l}$ раскладывается в прямую сумму*:
$$W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}. \tag{2.2}$$
2. *При $p = 2$, $l = 1$ выполняется равенство $W_2 = D_2$, причём $C_2 \underset{\neq}{\subset} CD_2 \underset{\neq}{\subset} D_2$ и все указанные $T$-пространства бесконечно базируемы.*

**Доказательство.** 1. Из равенства (1.4) следует, что $W_{p^l} = D_{p^l} + CD_{p^l}$. Покажем, что
$$D_{p^l} \cap CD_{p^l} = \{0\}.$$

Пусть $f \in D_{p^l}$. Из соотношений Фробениуса и перестановочности $p$-й степени переменной с любым элементом алгебры $F^{(3)}$ следует, что
$$f = \alpha x_1^{p^l m_1} \cdots x_s^{p^l m_s},$$
где $\alpha \in k$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, s}$.

Если $\alpha = 0$, то $f = 0$, и всё доказано.

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Подставляя 1 вместо всех переменных, с одной стороны, получаем $f(1, \ldots, 1) = \alpha$, так как $f$ — одночлен, с другой стороны, получаем $f(1, \ldots, 1) = 0$, так как $f \in CD_{p^l}$. Противоречие. Следовательно, имеет место разложение в прямую сумму (2.2).

2. Согласно предложению 2.1.2 выполнено строгое включение $C_2 \underset{\neq}{\subset} CD_2$. Применяя равенство (2.1) к сомножителю $c_{1,1}$ в многочлене $c_{1,1} z_1^2 \cdots z_s^2$, мы получим, что любой порождающий элемент $c_{1,1} z_1^2 \cdots z_s^2$ из $CD_2$ представляется в виде линейной комбинации многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из произведения некоторого числа квадратов переменных, т. е. из элементов $T$-пространства $D_2$. Таким образом, включение $CD_2 \subset D_2$ выполнено. Строгость включения устанавливается с помощью факторизации по тождеству коммутативности.

Из равенства $W_2 = D_2 + CD_2$ и доказанного выше утверждения, что $CD_2$ — собственный подмодуль в $D_2$, имеем $W_2 = D_2$. Таким образом, из результатов [9] следует, что $W_2$ — бесконечно базируемое $T$-пространство. Бесконечная базируемость $T$-пространств $C_2$ и $CD_2$ показана в доказательстве теоремы 2.1.1 и доказательстве следствия 2.1.2 соответственно. □

Отметим, что компоненты указанного в теореме 2.2.1 прямого разложения (2.2) имеют прямо противоположные свойства с точки зрения вопроса о конечной базируемости. Это будет видно из приводимых ниже теорем 2.3.1 и 2.4.1.

## 2.3. Структура диагональной компоненты $D_n$

Отметим ещё раз, что если $(n, p) = 1$, то $D_n = D_1 = F^{(3)}$. Интерес представляет случай, когда $n$ делится на $p$.

**Теорема 2.3.1.** *Пусть* $n = p^l n_1$, $l \in \mathbb{N}$, $(n_1, p) = 1$. *Тогда*

1) $D_n = D_{p^l}$;
2) $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T$ *при* $p > 2$ *или* $p = 2$, $l > 1$;
3) $D_{p^r} \subsetneq D_{p^l}$ *при* $r > l$;
4) *если* $p = 2$, $l = 1$, *то* $D_2$ *имеет бесконечную неприводимую систему порождающих* $\left\{x_1^2 \cdots x_s^2 \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ (*см.* [9]).

**Доказательство.** 1. При заданных условиях на $n$ и $p$ чтобы показать справедливость включения $D_n \subset D_{p^l}$, т. е. включения

$$\{x_1^n, \ldots, x_1^n \cdots x_s^n, \ldots\}^T \subset \{x_1^{p^l}, \ldots, x_1^{p^l} \cdots x_s^{p^l}, \ldots\}^T,$$

в каждом $p^l$-слове $x_1^{p^l} \cdots x_s^{p^l} \in D_{p^l}$, $s \in \mathbb{N}$, к переменным $x_i$, $i = 1, \ldots, s$, достаточно применить подстановки $x_i \mapsto x_i^{n_1}$.

Включение $D_{p^l} \subset D_n$ доказывается с применением метода спуска к порождающим $T$-пространства $D_n$ аналогично тому, как это было сделано в доказательстве утверждения 2 леммы 1.1.5.

2. Из второго соотношения Фробениуса следует, что произвольный порождающий элемент $x_1^{p^l} \cdots x_s^{p^l}$, $s \in \mathbb{N}$, $T$-пространства $D_{p^l}$ получается подстановкой одночлена $x_1 \cdots x_s$ вместо переменной $x_1$ в одночлене $x_1^{p^l}$, т. е. $D_{p^l}$ — циклический $kT$-модуль.

3. Рассмотрим сначала случай $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$. Поскольку $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T$, остаётся показать, что из $x_1^{p^l}$ некоторыми подстановками можно получить $x_1^{p^r}$ при $r > l$. Для этого к одночлену $x_1^{p^l}$ нужно применить подстановку $x_1 \mapsto x_1^{p^{r-l}}$. Строгость включения вытекает из соотношений Фробениуса.

В случае $p = 2$, $l = 1$ включение также выполняется. Действительно, нужно применить к одночленам $x_1^2 \cdots x_s^2$, $s \in \mathbb{N}$, указанный выше способ повышения степени. Строгость имеет место в силу бесконечной базируемости $T$-пространства $D_2$ (см. [9]) и доказанной конечной порождённости $D_{2^l}$ при $l > 1$ (см. пункт 2) данной теоремы). □

**Замечание 2.3.1.** Легко убедиться, что $D_2$ бесконечно базируемо даже по модулю тождества $x^4 = 0$.

Из теоремы 2.3.1 следует, что в $D_p$ имеется следующая бесконечная строго убывающая цепочка включений $kT$-подмодулей:

$$D_p \supset \ldots \supset D_{p^l} \supset \ldots .$$

На самом деле имеет место более сильное утверждение.

**Теорема 2.3.2.** *Любой ненулевой подмодуль* $Q$ *в* $kT$*-модуле* $D_p$, $p > 2$, *отличный от* $k \cdot 1$, *совпадает с одним из его* $kT$*-подмодулей* $D_{p^l}$.

**Доказательство.** Пусть $Q$ — произвольный ненулевой подмодуль в $D_p$, $Q \neq k \cdot 1$ и для некоторого $l$ выполнено включение $Q \subset D_{p^l}$, но $Q \not\subset D_{p^{l+1}}$.

Тогда существует ненулевой полиоднородный многочлен $f \in Q$, который в силу соотношений Фробениуса и коммутаторных соотношений равен одночлену $\alpha x_{i_1}^{p^l m_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{p^l m_{i_s}}$, где $\alpha \in k$ отлично от нуля, а среди чисел $m_{i_1}, \ldots, m_{i_s} \in \mathbb{N}$ хотя бы одно не делится на $p$. Для определённости положим $(m_{i_1}, p) = 1$. Тогда, подставляя 1 в одночлен $f$ вместо всех его переменных, кроме $x_{i_1}$, получаем, что $\alpha x_{i_1}^{p^l m_{i_1}} \in Q$. Применяя метод спуска к одночлену $x_{i_1}^{p^l m_{i_1}}$ аналогично тому, как это было сделано в доказательстве утверждения 2 леммы 1.1.5, получим, что $x_{i_1}^{p^l} \in Q$. Отсюда следует, что $D_{p^l} \subset Q$. Следовательно, $D_{p^l} = Q$ для некоторого $l$. □

Из этой теоремы непосредственно вытекает следствие.

**Следствие 2.3.1.** *$D_p$ — нётеров $kT$-модуль и $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ является простым $kT$-модулем для любого $p > 2$ и $l \in \mathbb{N}$.*

**Замечание 2.3.2.** Из теоремы 2.3.1 следует, что $D_2$ не является нётеровым $kT$-модулем при $p = 2$, однако в этом случае, как несложно проверить, имеет место аналог следствия 2.3.1, т. е. $D_4$ — нётеров $kT$-модуль и $D_{2^l}/D_{2^{l+1}}$ — простой $kT$-модуль для любого $l > 1$.

## 2.4. Структура коммутаторной компоненты $CD_n$

Мы уже отмечали, что $C_n \subset CD_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Возникает вопрос о строгости этого включения. Если $n = p^l$, $p$ — любое простое число, $l \in \mathbb{N}$, то, как было показано в предложении 2.1.2, это включение строгое. Общий случай рассмотрен в следующей теореме, проясняющей также в некоторой степени структуру коммутаторной компоненты.

**Теорема 2.4.1.**

1. *Если $(n, p) = 1$, то выполнены равенства*

$$C_n = C_1 = \{[x_1, y_1]\}^T, \quad CD_n = CD_1 = C = ([x_1, y_1])^T.$$

2. *Если $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$, то*

$$C_n = C_{p^l}, \quad CD_n = CD_{p^l}$$

   *и эти $T$-пространства бесконечно базируемы.*

3. *Если $r > l$, то*

$$C_{p^l} \subsetneqq C_{p^r}, \quad CD_{p^r} \subsetneqq CD_{p^l}.$$

4. *Для любого $p$ и любых натуральных чисел $l$ и $r$ выполнены строгие включения*

$$C_1 \subset C_{p^l} \subset CD_{p^r} \subset C.$$

**Доказательство.** 1. Напомним, что $C_n = \{c_m(n),\ m \in \mathbb{N}\}^T$, а $c_{m,0} \in C_1$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Равенство $C_n = C_1 = \{[x_1, y_1]\}^T$ следует из утверждения 1 первой теоремы о выравнивании (см. теорему 1.2.1, а также замечание 1.3.2, касающееся случая $p = 2$).

Таким образом, в случае $(n, p) = 1$ справедливы равенства $D_n = D_1$ (см. предыдущий параграф этого раздела) и $C_n = C_1$. Отсюда, как нетрудно убедиться, следует, что

$$CD_n = CD_1 = C = ([x_1, y_1])^T.$$

2. $C_n$ и $C_{p^l}$ являются бесконечными суммами циклических $kT$-модулей, порождённых соответственно многочленами $c_m(n)$ и $c_{m,l}$, $m \in \mathbb{N}$. Равенство $C_n = C_{p^l}$ следует из утверждения 1 первой теоремы о выравнивании (см. теорему 1.2.1, а также замечание 1.3.2, касающееся случая $p = 2$).

Из того что $D_n = D_{p^l}$ (см. утверждение 1 теоремы 2.3.1) и $C_n = C_{p^l}$, как нетрудно убедиться, следует $CD_n = CD_{p^l}$.

Из следствий 2.1.1 и 2.1.2 вытекает, что $T$-пространства $C_{p^l}$ и $CD_{p^l}$ бесконечно базируемы.

3. Если $r > l$, то включение $C_{p^l} \subset C_{p^r}$ следует из утверждения 1 теоремы 1.1.1. Для любого $l \in \mathbb{N}$ согласно предложению 2.1.2 выполнено включение $C_{p^l} \neq C_{p^{l+1}}$, следовательно, доказываемое включение строгое.

Докажем, что $CD_{p^r} \underset{\neq}{\subset} CD_{p^l}$ при $r > l$. Включение следует из утверждения 1 теоремы 1.1.1.

Рассмотрим вопрос о строгости включения. Достаточно показать, что $CD_{p^l} \neq CD_{p^{l+1}}$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим многочлен

$$f = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] z_1^{p^l} \in CD_{p^l}.$$

Предположим, что $f$ принадлежит $T$-пространству

$$CD_{p^{l+1}} = \left\{g_{m,l+1} = c_{m,l+1} z_1^{p^{l+1}} \;\middle|\; m \in \mathbb{N}\right\}^T.$$

Проследим за подстановками в диагональную часть $z_1^{p^{l+1}}$ многочленов $g_{m,l+1}$. Согласно соотношениям Фробениуса достаточно рассмотреть либо только мономиальные подстановки, либо только подстановки элементов поля $k$ вместо переменной $z_1$ многочленов $g_{m,l+1}$. Если вместо переменной $z_1$ подставить некоторый одночлен $u \in F^{(3)}$, то это даст не менее $p^{l+1}$ вхождения каждой из входящих в одночлен $u$ переменных. С другой стороны, в многочлен $f$ каждая его переменная входит с кратностью $p^l$. Поэтому остаются только подстановки некоторых элементов поля $k$ вместо переменной $z_1$ многочленов $g_{m,l+1}$. Тогда

$$f \in \{c_{m,l+1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T = C_{p^{l+1}}.$$

Так как подстановкой $z_1 \mapsto x_1^{p^2-1} y_1^{p^2-1}$ из многочлена $f$ получается многочлен $c_{1,l+2}$, то $c_{1,l+2} \in C_{p^{l+1}}$, что противоречит лемме 2.1.3.

4. Из утверждения 3 данной теоремы и включения $C_{p^l} \underset{\neq}{\subset} CD_{p^l}$ (см. предложение 2.1.2) вытекает следующая диаграмма строгих включений:

$$\begin{array}{ccccccccc} C_p & \subset & C_{p^2} & \subset & \ldots & \subset & C_{p^l} & \subset & \ldots \\ \cap & & \cap & & \ldots & & \cap & & \\ CD_p & \supset & CD_{p^2} & \supset & \ldots & \supset & CD_{p^l} & \supset & \ldots . \end{array}$$

Из этой диаграммы следует, что для любых $l$ и $r$ выполнены строгие включения $C_{p^l} \subset CD_{p^r}$.

Из утверждения 2 теоремы 1.1.1 следует, что $C_1 \subset C_{p^l}$. Включение $CD_{p^r} \subset C$ очевидно, так как $T$-идеал $C$ содержит многочлен $[x, y]z$. Строгость этих включений следует из конечной порождённости $T$-пространств $C_1$ и $C$ и бесконечной базируемости $T$-пространств $C_{p^l}$ и $CD_{p^r}$. □

## 2.5. Ответ для $(p, n)$-проблемы. Диаграммы включений

Здесь мы дадим ответ для $(p, n)$-проблемы.

**Замечание 2.5.1.** В случае $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$, было показано, что

$$D_n = D_{p^l}, \quad CD_n = CD_{p^l}$$

(см. утверждение 1 теоремы 2.3.1 и утверждение 2 теоремы 2.4.1). Тогда из формулы (1.4) следует равенство $W_n = W_{p^l}$ для любого простого числа $p$ и любого $l \in \mathbb{N}$.

Таким образом, полный ответ для $(p, n)$-проблемы следующий.

1. Если $(n, p) = 1$, то $W_n = F^{(3)}$.
2. Если $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$, то $W_n = W_{p^l}$.
3. Для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $T$-пространство $W_{p^l}$ раскладывается в прямую сумму своих диагональной и коммутаторной компонент, т. е. $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$, и имеет бесконечную неприводимую систему порождающих

$$\{x_1^{p^l}, x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] z_1^{p^l}, \ldots, x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_i^{p^l-1} y_i^{p^l-1} [x_i, y_i] z_1^{p^l}, \ldots\}.$$

4. Если $p = 2$, $l = 1$, то $W_2 = D_2 = \{x_1^2, \ldots, x_1^2 \cdots x_s^2, \ldots\}^T$.

Резюмируя всё сказанное в этом разделе, можно построить следующие диаграммы строгих включений.

I. Пусть $p$ — любое простое число. Если $(n, p) = 1$, то

$$D_n = F^{(3)} \supset CD_n = CD_1 = ([x, y])^T = C \supset C_n = C_1 = \{[x, y]\}^T.$$

Для степеней $p$ имеем

$$D_p \supset \ldots \supset D_{p^l} \supset \ldots, \quad \bigcap D_{p^l} = 0, \quad C \cap D_{p^l} = 0 \ \text{ при любом } \ l > 1;$$
$$C_1 \subset C_p \subset \ldots \subset C_{p^l} \subset \ldots \subset \ldots \subset CD_{p^l} \subset \ldots \subset CD_p \subset C.$$

II. Если $p > 2$, то $C \cap D_{p^l} = 0$ при любом $l \in \mathbb{N}$.

III. Если $p = 2$, то

$$C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_{2^l} \subset \ldots \subset \ldots \subset CD_{2^l} \subset \ldots \subset CD_2 \subset$$
$$\subset D_2 \supset \ldots \supset D_{2^l} \supset \ldots.$$

IV. $W_p \supset W_{p^2} \supset \ldots \supset W_{p^l} \supset \ldots.$

В пунктах I и II диаграмм равенство $C \cap D_{p^l} = 0$ при указанных ограничениях на $p$ и $l$ следует из рассуждений, приведённых в доказательстве утверждения 1 теоремы 2.2.1. Последняя строка пункта I показывает, что разница между $T$-пространством и $T$-идеалом, порождёнными одним и тем же элементом, весьма велика.

Случай $p = 2$, $l = 1$ специфичен, как уже отмечалось в первом разделе (см. замечание 1.3.2), во многом из-за того, что здесь перестают работать соотношения Фробениуса. В отличие от пунктов I и II здесь $C \cap D_2$ отлично от нуля, так как содержит $CD_2$. Верно ли, что $CD_2 = C \cap D_2$? Ответ будет дан в четвёртом разделе.

В связи с построенными бесконечными строго возрастающими и строго убывающими цепочками $kT$-модулей возникают вопросы о строении фактор-$T$-пространств $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$, $C_{p^{l+1}}/C_{p^l}$, $CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$, $W_{p^l}/W_{p^{l+1}}$ и некоторых других.

Для фактор-$T$-пространства $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ имеет место следствие 2.3.1 (см. также замечание 2.3.2). Следующий раздел посвящён исследованию остальных фактор-$T$-пространств.

# 3. Структурные результаты

## 3.1. Теорема о независимости элементарных составляющих

В разделе 2 было показано, что $W_n = F^{(3)}$ при $(n, p) = 1$, а при $n = p^l n_1$, где $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$, $W_n = W_{p^l}$. Всюду ниже в этом разделе, кроме последнего параграфа, $p > 2$. В этом случае также было доказано, что $W_{p^l}$ распадается в прямую сумму, $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$, где $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T$ — нётерово $T$-пространство, а $CD_{p^l}$ — бесконечно базируемое $T$-пространство, распадающееся в бесконечную сумму элементарных составляющих $CD_{p^l}^{(m)} = \{g_{m,l}\}^T$. $T$-пространство $CD_{p^l}$ содержит собственное бесконечно базируемое $T$-подпространство $C_{p^l}$, распадающееся в бесконечную сумму элементарных составляющих $C_{p^l}^{(m)} = \{c_{m,l}\}^T$ (см. обозначения раздела 1.1). Напомним, что для $l = 0$ приняты следующие обозначения: $C_1^{(m)} = \{[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]\}^T$ и $C^{(m)} = ([x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m])^T$ —

$T$-пространство и $T$-идеал в $F^{(3)}$ соответственно, а $C_1^{(1)} = C_1$ и $C^{(1)} = C$. Пространства $CD_{p^l}$ и $C_{p^l}$ описываются приведённой в разделе 1.1 диаграммой 1, где, как будет следовать из теоремы 3.1.1, все включения строгие. Для удобства напомним вид этой диаграммы.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \dots & \supset & C^{(m)} & \supset & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_p & = & CD_p^{(1)} & + & CD_p^{(2)} & + & \dots & + & CD_p^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
CD_{p^l} & = & CD_{p^l}^{(1)} & + & CD_{p^l}^{(2)} & + & \dots & + & CD_{p^l}^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_{p^l} & = & C_{p^l}^{(1)} & + & C_{p^l}^{(2)} & + & \dots & + & C_{p^l}^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_p & = & C_p^{(1)} & + & C_p^{(2)} & + & \dots & + & C_p^{(m)} & + & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \dots & \supset & C_1^{(m)} & \supset & \dots
\end{array}
$$

Положим

$$
\Omega\big(CD_{p^l}^{(m)}\big) = CD_{p^{l+1}}^{(m)} + \sum_{i<m} CD_p^{(i)} + C^{(m+1)},
$$

$$
\Omega\big(C_{p^{l+1}}^{(m)}\big) = C_{p^l}^{(m)} + \sum_{i<m} CD_p^{(i)} + C^{(m+1)}.
$$

Другими словами, если $\mathcal{M}$ равно $C_{p^{l+1}}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$, то $\Omega(\mathcal{M})$ — $T$-пространство, порождённое всеми $T$-пространствами, находящимися в диаграмме 1 ниже $\mathcal{M}$ (достаточно взять ближайшее снизу), а также находящимися левее $\mathcal{M}$ (достаточно взять вторые сверху) и правее $\mathcal{M}$ (достаточно взять ближайший справа элемент самой верхней строки диаграммы 1).

Некоторую *независимость* любого элемента $C_{p^{l+1}}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$ из диаграммы 1 от всех остальных, кроме тех, что находятся выше по столбцу, показывает следующая теорема (см. также [20]).

**Теорема 3.1.1 (теорема о независимости элементарных составляющих).** *Пусть $\mathcal{M}$ равно $C^{(m)}_{p^{l+1}}$ или $CD^{(m)}_{p^l}$. Тогда $\big(\mathcal{M}+\Omega(\mathcal{M})\big)/\Omega(\mathcal{M})$ — ненулевое $T$-пространство.*

**Доказательство.** Предположим, что $\mathcal{M} = C^{(m)}_{p^{l+1}}$. Докажем, что $T$-пространство $\big(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M})\big)/\Omega(\mathcal{M})$ ненулевое. Пусть $c_{m,l+1} \in \Omega(C^{(m)}_{p^{l+1}})$, т. е. многочлен $c_{m,l+1}$ является линейной комбинацией многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из многочленов, порождающих $T$-пространства, входящие в $\Omega\big(C^{(m)}_{p^{l+1}}\big)$.

В частности, среди слагаемых линейной комбинации могут иметься всевозможные многочлены $c(u_1, \ldots, u_t)$, где $c$ — многочлен, выделенный из многочлена $c_{m,l}$ с помощью линейных подстановок так, как это было описано в разделе 1.1, $u_1, \ldots, u_t$ — одночлены из алгебры $F^{(3)}$. В силу того что в многочлен $c_{m,l+1}$ все переменные входят с кратностью $p^{l+1}$, в многочлены $c(u_1, \ldots, u_t)$ каждая переменная входит с этой же кратностью. Отсюда по лемме 1.1.1 получаем, что все такие многочлены $c(u_1, \ldots, u_t)$ равны нулю. Следовательно, элементы из $C^{(m)}_{p^l}$ могут давать только нулевой вклад в представление $c_{m,l+1}$ в виде многочленов из $\Omega\big(C^{(m)}_{p^{l+1}}\big)$.

Так как кратность вхождения всех переменных в $c_{m,l+1}$ равна $p^{l+1}$, то согласно следствию 1.3.2 многочлены из $\sum\limits_{i<m} CD^{(i)}_p$ являются линейными комбинациями $p$-многочленов с кратностями, не превосходящими $m-1$, имеющими сомножитель вида $x_r^{p^{l+1}}$ (хотя бы одна буква не попадает в коммутатор). Применяя подстановку $x \mapsto x+1$ к каждой из входящих в $c_{m,l+1}$ переменных и линеаризуя, получим из многочлена $c_{m,l+1}$ произведение коммутаторов $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$. При этом в многочленах из $\sum\limits_{i<m} CD^{(i)}_p$ сомножители вида $x_r^{p^{l+1}}$ перейдут в одночлены $p^{l+1}x_r$, и следовательно, многочлены из $\sum\limits_{i<m} CD^{(i)}_p$ переходят в 0. Многочлены из $C^{(m+1)}$ также перейдут в 0 после указанных подстановок и линеаризаций, так как хотя бы в одном из коммутаторов вместо одной из его переменных появится 1. Таким образом,

$$[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m] = 0$$

в $F^{(3)}$, что противоречит лемме 1.1.2.

Пусть теперь $\mathcal{M} = CD^{(m)}_{p^l}$. Докажем, что $T$-пространство $\big(\mathcal{M}+\Omega(\mathcal{M})\big)/\Omega(\mathcal{M})$ ненулевое. Предположим противное. Пусть $g_{m,l} = c_{m,l} z_1^{p^l}$ является линейной комбинацией многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из многочленов, порождающих $T$-пространства, входящие в $\Omega\big(CD^{(m)}_{p^l}\big)$.

Среди слагаемых линейной комбинации могут встретиться многочлены, получающиеся некоторыми подстановками из многочлена $g_{m,l+1} = c_{m,l+1} z_1^{p^{l+1}}$. Проследим за подстановками в $z_1^{p^{l+1}}$. Согласно соотношениям Фробениуса достаточно рассмотреть либо только мономиальные подстановки, либо только подстановки элементов поля $k$ вместо переменной $z_1$ многочлена $g_{m,l+1}$. Если вместо переменной $z_1$ подставить некоторый одночлен $u \in F^{(3)}$, то это даст не менее $p^{l+1}$ вхождений каждой из входящих в одночлен $u$ переменных. С другой стороны, в многочлен $g_{m,l}$ каждая его переменная входит с кратностью $p^l$. Поэтому остаются только подстановки некоторых элементов поля $k$ вместо переменной $z_1$. Тогда все слагаемые линейной комбинации, равной $g_{m,l}$, появляющиеся в результате некоторых подстановок в многочлен $g_{m,l+1}$, на самом деле получаются из многочлена $c_{m,l+1}$, т. е. принадлежат $T$-пространству $C^{(m)}_{p^{l+1}}$.

Заметим, что при подстановке

$$z_1 \mapsto x_1^{p^2-1} y_1^{p^2-1} \cdots x_m^{p^2-1} y_m^{p^2-1}$$

в $g_{m,l}$ этот многочлен перейдёт в многочлен

$$c_{m,l+2} = x_1^{p^{l+2}-1} y_1^{p^{l+2}-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^{l+2}-1} y_m^{p^{l+2}-1} [x_m, y_m].$$

Из сделанного предположения следует, что $c_{m,l+2} \in \Omega\big(C^{(m)}_{p^{l+2}}\big)$, а это противоречит доказанному выше утверждению, согласно которому $T$-пространство $\big(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M})\big)/\Omega(\mathcal{M})$ при $\mathcal{M} = C^{(m)}_{p^{l+2}}$ ненулевое. Отсюда следует, что $T$-пространство $\big(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M})\big)/\Omega(\mathcal{M})$ при $\mathcal{M} = CD^{(m)}_{p^l}$ ненулевое. □

Несложно показать, что имеют место следующие утверждения.

**Следствие 3.1.1.** *$T$-пространства*

$$\big(C^{(m)}_{p^{l+1}} + C^{(m+1)}\big)/\big(C^{(m)}_{p^l} + C^{(m+1)}\big), \quad \big(CD^{(m)}_{p^l} + C^{(m+1)}\big)/\big(CD^{(m)}_{p^{l+1}} + C^{(m+1)}\big)$$

*ненулевые.*

**Следствие 3.1.2.** *$T$-пространства*

$$C^{(m)}_{p^{l+1}}/C^{(m)}_{p^l}, \quad CD^{(m)}_{p^l}/CD^{(m)}_{p^{l+1}}$$

*ненулевые.*

Рассмотрим теперь $T$-пространство $\hat{C} = C/C^{(m+1)}$. Если $\mathcal{M}$ — произвольный элемент диаграммы 1, то его образ в $\hat{C}$ обозначим через $\hat{\mathcal{M}}$. Тогда по модулю $C^{(m+1)}$ диаграмма 1 примет следующий вид:

Диаграмма 2

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\hat{C} & = & \widehat{C^{(1)}} & \supset & \widehat{C^{(2)}} & \supset & \dots & \supset & \widehat{C^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\widehat{CD_p} & = & \widehat{CD_p^{(1)}} & + & \widehat{CD_p^{(2)}} & + & \dots & + & \widehat{CD_p^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\widehat{CD_{p^l}} & = & \widehat{CD_{p^l}^{(1)}} & + & \widehat{CD_{p^l}^{(2)}} & + & \dots & + & \widehat{CD_{p^l}^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\widehat{C_{p^l}} & = & \widehat{C_{p^l}^{(1)}} & + & \widehat{C_{p^l}^{(2)}} & + & \dots & + & \widehat{C_{p^l}^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\dots & & \dots & & \dots & & & & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\widehat{C_p} & = & \widehat{C_p^{(1)}} & + & \widehat{C_p^{(2)}} & + & \dots & + & \widehat{C_p^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\
\widehat{C_1} & = & \widehat{C_1^{(1)}} & \supset & \widehat{C_1^{(2)}} & \supset & \dots & \supset & \widehat{C_1^{(m)}}.
\end{array}
$$

Из теоремы 3.1.1 следует, что все включения строгие, кроме того, для элементов диаграммы 2 имеют место аналоги теоремы 3.1.1 и следствий 3.1.1 и 3.1.2.

Отметим, что в разделе 2 было доказано, что $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ — простой $kT$-модуль. Естественным образом возникают вопросы о простоте *элементарных факторов* $C_{p^{l+1}}^{(m)}/C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ и о строении фактор-$T$-пространств $C_{p^{l+1}}/C_{p^l}$ и $CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$. Для ответа, который будет дан в третьем параграфе этого раздела, нам потребуются некоторые технические результаты. Они изложены в следующем параграфе.

## 3.2. Технические леммы и теоремы

**Лемма 3.2.1.** *Пусть* $n'_1, q_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, r}$. *Тогда*

$$
\begin{aligned}
& q_1 z_1^{p^l q_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[z_1, y_1] z_2^{p^l q_2} \cdots z_r^{p^l q_r} + \\
& + q_2 z_2^{p^l q_2 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[z_2, y_1] z_1^{p^l q_1} z_3^{p^l q_3} \cdots z_r^{p^l q_r} + \ldots + \\
& + q_r z_r^{p^l q_r - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[z_r, y_1] z_1^{p^l q_1} \cdots z_{r-1}^{p^l q_{r-1}} \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\; C_{p^l}^{(1)}).
\end{aligned}
$$

**Доказательство.** Покажем, что левая часть доказываемого сравнения получается некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями из многочлена $c_{1,l} = x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l - 1}[x_1, y_1]$, порождающего $C_{p^l}^{(1)}$. Из утверждения 1 первой теоремы о выравнивании следует, что многочлен $x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[x_1, y_1]$ лежит в $C_{p^l}^{(1)}$.

Покажем теперь, что, осуществляя в многочлене $x_1^{p^l-1}y_1^{p^l n_1'-1}[x_1,y_1]$ подстановку $x_1\mapsto z_1^{q_1}\cdots z_r^{q_r}$, мы получим левую часть сравнения из данной леммы. Итак, рассмотрим многочлен

$$(z_1^{q_1}\cdots z_r^{q_r})^{p^l-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_1^{q_1}\cdots z_r^{q_r},y_1].$$

Этот многочлен аналогично тому, как это было проделано для многочлена (1.7), представим в виде

$$\begin{aligned}q_1 z_1^{p^l q_1-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_1,y_1]z_2^{p^l q_2}\cdots z_r^{p^l q_r}&+\\+q_2 z_2^{p^l q_2-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_2,y_1]z_1^{p^l q_1}z_2^{p^l q_2}\cdots z_r^{p^l q_r}&+\ldots+\\+q_r z_r^{p^l q_r-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_r,y_1]z_1^{p^l q_1}\cdots z_{r-1}^{p^l q_{r-1}}&.\end{aligned}$$

Это и есть левая часть доказываемого сравнения. □

Рассмотрим многочлены вида (см. обозначение (1.3))

$$c_{(p^l n_2,p^l n_2')}(x_2,y_2)\cdots c_{(p^l n_m,p^l n_m')}(x_m,y_m)\prod_{j=r+1}^{s} z_j^{p^l q_j},$$

где $n_i,n_i'\in\mathbb{N}$, $i=\overline{2,m}$, а $q_j$ делится на $p$ для всех $j=\overline{r+1,s}$. Если отсутствуют коммутаторы ($m=0$), то получаем, что этот многочлен есть одночлен $\prod\limits_{j=r+1}^{s} z_j^{p^l q_j}$. Если при этом $q_j=0$ для любого $j=\overline{1,s}$, то рассматриваемый многочлен по определению равен 1.

Следующие утверждения потребуются для доказательства простоты фактор-$T$-пространства $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ и некоторых других $T$-пространств.

**Лемма 3.2.2.** *Пусть $(q_1,p)=1$ и $q_{r+1},\ldots,q_s$ делятся на $p$. Тогда*

$$z_1^{p^l q_1-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_1,y_1]z_2^{p^l q_2}\cdots z_r^{p^l q_r}c_{(p^l n_2,p^l n_2')}(x_2,y_2)\cdots c_{(p^l n_m,p^l n_m')}(x_m,y_m)\times\\ \times\prod_{j=r+1}^{s} z_j^{p^l q_j}\equiv g z_1^{p^l q_1}\ (\mathrm{mod}\ C_{p^l}^{(m)}),$$

*где $g$ — линейная комбинация $p$-многочленов или $1$-многочленов, не зависящих от переменной $z_1$.*

**Доказательство.** Для доказательства леммы покажем сначала, что выполняется сравнение

$$\begin{aligned}\big(q_1 z_1^{p^l q_1-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_1,y_1]z_2^{p^l q_2}\cdots z_r^{p^l q_r}&+\\+q_2 z_2^{p^l q_2-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_2,y_1]z_1^{p^l q_1}z_3^{p^l q_3}\cdots z_r^{p^l q_r}&+\ldots+\\+q_r z_r^{p^l q_r-1}y_1^{p^l n_1'-1}[z_r,y_1]z_1^{p^l q_1}\cdots z_{r-1}^{p^l q_{r-1}}\big)&\times\\\times c_{(p^l n_2,p^l n_2')}(x_2,y_2)\cdots c_{(p^l n_m,p^l n_m')}(x_m,y_m)\prod_{j=r+1}^{s} z_j^{p^l q_j}&\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ C_{p^l}^{(m)}).\end{aligned}$$

Действительно, по лемме 3.2.1 многочлен, стоящий в скобках в левой части этого сравнения, принадлежит $T$-пространству $C_{p^l}^{(1)} = \{c_{1,l}\}^T$. Отметим, что $c_{1,l} = c_{(a_1,a_1')}(x_1, y_1)$, где $a_1 = a_1' = p^l$. По первой теореме о выравнивании

$$c_{1,l}c_{(p^l n_2,p^l n_2')}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l n_m,p^l n_m')}(x_m, y_m) \prod_{j=r+1}^{s} z_j^{p^l q_j} \in C_{p^l}^{(m)}$$

(произведение $\prod\limits_{j=r+1}^{s} z_j^{p^l q_j}$ согласно утверждению 2 этой теоремы может быть внесено в любой из блоков коммутаторного многочлена $c_{m,l}$). Так как $(q_1, p) = 1$, то из доказанного сравнения следует утверждение леммы. □

С помощью леммы 3.2.2 покажем, что имеют место следующие две леммы.

**Лемма 3.2.3.** *Пусть $f$ — произвольный $p$-многочлен, лежащий в $CD_{p^l}^{(m)}$. Тогда в многочлене $f$ существует такая переменная $z_i$, что $f$ представляется в виде*

$$f \equiv g z_i^{p^l q_i} \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}},$$

*где $(q_i, p) = 1$, $g$ — линейная комбинация $p$-многочленов, не зависящих от переменной $z_i$.*

**Доказательство.** Среди всех переменных $p$-многочлена $f$, имеющих наименьший уровень $n$, выберем одну. Для определённости положим, что выбранной переменной является $z_1$. Если при этом выполняются условия первой теоремы о выравнивании, то $\{f\}^T = C_{p^n}^{(m)}$. Тогда из утверждения 2 теоремы 1.1.1 следует, что $f \equiv 0 \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$.

Если же выполняются условия второй теоремы о выравнивании, то $\{f\}^T = CD_{p^n}^{(m)}$. При этом $n \geqslant l$, иначе, т. е. при $n < l$, выполняется включение $CD_{p^n}^{(m)} \subset CD_{p^l}^{(m)}$, так как $f \in CD_{p^l}^{(m)}$. Полученное включение противоречит утверждению 1 теоремы 1.1.1. При $n > l$ из теоремы 1.1.1 следует, что $f \equiv 0 \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$. Если теперь $n = l$, то $(q_1, p) = 1$. Если $z_1$ не входит ни в один из коммутаторов многочлена $f$, то отсюда сразу следует утверждение леммы. Если переменная $z_1$ вошла в один из коммутаторов $f$, то с помощью леммы 3.2.2 получаем, что $f \equiv g z_1^{p^l q_1} \pmod{C_{p^l}^{(m)}}$, где $g$ — линейная комбинация $p$-многочленов (так как $f$ — $p$-многочлен), не зависящих от переменной $z_1$. В силу $C_{p^l}^{(m)} \subset CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ получаем, что $f \equiv g z_1^{p^l q_1} \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$. □

**Лемма 3.2.4.** *Пусть $f$ — произвольный 1-многочлен, лежащий в $C^{(m)}$. Тогда в многочлене $f$ существует такая переменная $z_i$ уровня 0, что $f$ представляется в виде*

$$f \equiv g z_i^{q_i} \pmod{CD_p^{(m)}},$$

*где $(q_i, p) = 1$, $g$ — линейная комбинация многочленов, являющихся $p$-многочленами или 1-многочленами, не зависящими от переменной $z_i$.*

**Доказательство.** Пусть для удобства переменной уровня 0 в многочлене $f$ является $z_1$. Если $z_1$ не входит ни в один из коммутаторов многочлена $f$, то мы сразу получаем утверждение леммы. Если переменная $z_1$ вошла в один из коммутаторов $f$, то с помощью леммы 3.2.2 многочлен $f$ представим в виде $f \equiv gz_1^{q_1} \pmod{C_1^{(m)}}$, где $g$ — линейная комбинация многочленов, являющихся $p$-многочленами или 1-многочленами, не зависящими от переменной $z_1$. В силу $C_1^{(m)} \subset CD_p^{(m)}$ получаем, что $f \equiv gz_1^{q_1} \pmod{CD_p^{(m)}}$. □

В разделе 1.3 было показано, что по модулю $T$-пространства $C_{p^l}^{(m)}$ действие алгебры $kT$ на $g_{m,l}$ сводится к мономиальным подстановкам в этом многочлене. С помощью этого утверждения, а также с помощью теоремы 1.3.2 и леммы 3.2.3 доказывается следующая теорема.

**Теорема 3.2.1.** *Пусть $f$ — полиоднородный многочлен из $CD_{p^l}^{(m)}$. Тогда в многочлене $f$ существует такая переменная $z_i$, что $f$ представляется в виде*

$$f \equiv f_1 z_i^{p^l q_i} \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}},$$

*где $(q_i, p) = 1$, $f_1$ — линейная комбинация $p$-многочленов, не зависящих от переменной $z_i$.*

**Доказательство.** Так как $f \in CD_{p^l}^{(m)}$, то по модулю $T$-пространства $C_{p^l}^{(m)}$ и, следовательно, по модулю $T$-пространства $CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ многочлен $f$ — линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}$. Из теоремы 1.3.2 следует, что все многочлены линейной комбинации, дающие $f$, являются $p$-многочленами. По лемме 3.2.3 каждый $p$-многочлен из линейной комбинации, равной $f$, есть многочлен вида $gz_i^{p^l q_i}$ по модулю $CD_{p^{l+1}}^{(m)}$, где $(q_i, p) = 1$, $g$ — линейная комбинация $p$-многочленов, не зависящих от переменной $z_i$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

В случае $l = 0$ имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.2.2.** *Пусть $f$ — полиоднородный многочлен из $C^{(m)}$. Тогда в многочлене $f$ существует такая переменная $z_i$, что $f$ представляется в виде*

$$f \equiv f_1 z_i^{q_i} \pmod{CD_p^{(m)} + C^{(m+1)}},$$

*где $(q_i, p) = 1$, $f_1$ — линейная комбинация многочленов, являющихся либо $p$-многочленами, либо 1-многочленами, не зависящими от переменной $z_i$.*

**Доказательство.** Так как $f \in C^{(m)}$ — полиоднородный многочлен, то $f$ — линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями из $c_{m,0}z_1$. В силу перестановочности всех переменных по модулю $C^{(m+1)}$ и полиоднородности многочлена $f$ получаем, что $f$ по модулю $CD_p^{(m)} + C^{(m+1)}$ является линейной комбинацией 1-многочленов. В свою очередь, по лемме 3.2.4 каждый

1-многочлен линейной комбинации, равной $f$, равен по модулю $CD_p^{(m)}$ и, следовательно, по модулю $CD_p^{(m)} + C^{(m+1)}$ многочлену вида $gz_i^{q_i}$, где $(q_i, p) = 1$, $g$ — линейная комбинация многочленов, являющихся либо $p$-многочленами, либо 1-многочленами, не зависящими от переменной $z_i$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

## 3.3. Простота элементарных факторов и прямые суммы

Всюду ниже в этом параграфе мы предполагаем, что $l > 0$. Здесь рассматривается вопрос о простоте *элементарных факторов* $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$. Ниже будет дан положительный ответ (см. также [20]).

Введём следующие обозначения:

$$\overline{CD_{p^l}} = CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}, \quad \overline{C_{p^l}} = C_{p^l}/C_{p^{l-1}}.$$

Тогда

$$\overline{CD_{p^l}} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{CD_{p^l}^{(m)}}, \quad \overline{C_{p^l}} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{C_{p^l}^{(m)}},$$

где $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$ и $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ — образы $CD_{p^l}^{(m)}$ и $C_{p^l}^{(m)}$ в $T$-пространствах $\overline{CD_{p^l}}$ и $\overline{C_{p^l}}$ соответственно. Весьма важным структурным фактом является то, что указанные суммы прямые. Мы покажем, что $T$-пространство $\overline{C_{p^l}}$ ($\overline{CD_{p^l}}$) раскладывается в прямую сумму своих простых $T$-подпространств $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ (соответственно $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$).

Образ произвольного многочлена $f \in F^{(3)}$ в $T$-пространствах $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ будем обозначать через $\bar{f}$, а в $T$-пространствах $\overline{CD_{p^l}}$, $\overline{C_{p^l}}$ через $\tilde{f}$.

**Теорема 3.3.1.** *$T$-пространство $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ является простым $kT$-модулем.*

**Доказательство.** Предположим, что существует ненулевой подмодуль $U \subsetneq C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$. Тогда существует ненулевой многочлен $\bar{f} \in U$. Будем считать, что $f$ — полиоднородный многочлен фиксированного типа. Тогда по теореме 1.3.1 многочлен $f$ по модулю $C_{p^{l-1}}^{(m)}$ есть линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных мономиальными подстановками из многочлена $c_{m,l}$. Воспользуемся тем, что коммутатор $[u, v]$ любых двух одночленов в $F^{(3)}$ можно расписать как линейную комбинацию коммутаторов от переменных вида $[x_i, x_j]$, умноженных на одночлены. Тогда получаем, что многочлен $f$ является линейной комбинацией многочленов, совпадающих с точностью до обозначения переменных с многочленом

$$[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]w, \tag{3.1}$$

где одночлен $w \in F^{(3)}$ зависит от переменных $x_i$, $y_i$ и, возможно, от некоторых переменных $z_1, \ldots, z_s$.

*Коммутаторным типом* вхождения переменных назовём набор переменных, входящих в произведение коммутаторов (3.1). По теореме 1.3.2 получаем, что многочлен $f$ на самом деле является линейной комбинацией $p$-многочленов. Приведём подобные слагаемые, отвечающие фиксированным коммутаторным типам. Получим, что $f$ — линейная комбинация $p$-многочленов, отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Так как $\bar{f} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении $f$ существует ненулевой $p$-многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, вида

$$\alpha x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n_m' - 1}[x_m, y_m] z_1^{p^l q_1} \cdots z_s^{p^l q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n_i' \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При подстановке единицы во все переменные одночлена $z_1^{p^l q_1} \cdots z_s^{p^l q_s}$ все, кроме выбранного, многочлены линейной комбинации, равной $f$, становятся равными 0 (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1). Выбранный многочлен перейдёт в многочлен

$$\alpha x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n_m' - 1}[x_m, y_m].$$

К каждой переменной этого многочлена применим метод спуска и выделим полиоднородный многочлен степени $p^l$ по всем переменным (см. доказательство утверждения 1 леммы 1.1.5). Получим многочлен $\beta c_{m,l}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Таким образом, $\overline{c_{m,l}} \in \{\bar{f}\}^T$, следовательно, выполняется равенство $U = C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$, что противоречит включению $U \subsetneq C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$. □

**Следствие 3.3.1.** *$T$-пространства $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ изоморфны.*

**Доказательство.** Построим отображение $\varphi\colon C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)} \to \overline{C_{p^l}^{(m)}}$ по формуле $\varphi(\overline{c_{m,l}}) = \widetilde{c_{m,l}}$. Нетрудно убедиться, что отображение задано корректно и является эпиморфизмом. Отметим, что $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. В противном случае из теоремы 3.3.1 следует, что $\operatorname{Ker}\varphi = C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$. Тогда $\operatorname{Im}\varphi = 0$. Следовательно, $\overline{C_{p^l}^{(m)}} = 0$, что противоречит теореме 3.1.1. Отсюда следует, что отображение $\varphi$ — мономорфизм. Таким образом, построенное отображение является изоморфизмом. □

**Теорема 3.3.2.** *$T$-пространство $\overline{C_{p^l}}$ раскладывается в бесконечную прямую сумму простых $T$-пространств $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$, изоморфных $T$-пространствам $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$, т. е.*

$$\overline{C_{p^l}} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \overline{C_{p^l}^{(m)}}.$$

**Доказательство.** Итак, $\overline{C_{p^l}} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \overline{C_{p^l}^{(m)}}$, где по следствию 3.3.1 $T$-пространства $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ изоморфны простым $T$-пространствам $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$. Следовательно, $T$-пространства $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ являются простыми. То, что $\overline{C_{p^l}^{(m)}} \cap \sum\limits_{j\neq m} \overline{C_{p^l}^{(j)}} = \{0\}$, прямо следует из теоремы о независимости элементарных составляющих (см. теорему 3.1.1). □

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

**Следствие 3.3.2.** *Имеет место изоморфизм*

$$C_{p^l}/C_{p^{l-1}} \cong \bigoplus_{m=1}^{\infty} C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)},$$

*где* $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ *— ненулевой простой $kT$-модуль. Изоморфное отображение*

$$\bigoplus_{m=1}^{\infty} C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)} \to C_{p^l}/C_{p^{l-1}}$$

*определяется соответствием*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \overline{f_m} \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{f_m}.$$

Докажем теперь следующее утверждение, из которого будет следовать разложение $\overline{CD_{p^l}}$ в прямую сумму.

**Теорема 3.3.3.** *$T$-пространство $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ является простым $kT$-модулем.*

**Доказательство.** Предположим, что существует ненулевой подмодуль $U \underset{\neq}{\subset} CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$. Тогда существует ненулевой многочлен $\bar{f} \in U$. Будем считать, что $f$ — полиоднородный многочлен фиксированного типа. Тогда по теореме 3.2.1 в многочлене $f$ найдётся переменная, например $z_1$, такая что $f \equiv f_1 z_1^{p^l q_1} \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$, где $(q_1, p) = 1$, $f_1$ — линейная комбинация $p$-многочленов, не зависящих от переменной $z_1$ и отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Так как $\bar{f} \neq 0$, без ограничения общности можно считать, что в разложении $f$ имеется ненулевой $p$-многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, вида

$$\alpha x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n_m' - 1}[x_m, y_m] z_1^{p^l q_1} \cdots z_s^{p^l q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $z_1$ — переменная уровня $l$, $q_1, n_i, n_i' \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{2, s}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$, $j = \overline{2, s}$, в многочлен $f$. В результате таких подстановок все $p$-многочлены линейной комбинации, равной $f$, кроме выбранного, становятся равными нулю (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1). Выбранный многочлен перейдёт в многочлен

$$\alpha x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n_1' - 1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n_m' - 1}[x_m, y_m] z_1^{p^l q_1}.$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полиоднородный многочлен степени $p^l$ по всем переменным (см. лемму 1.1.5), получим многочлен $g_{m,l}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Таким образом, $\overline{g_{m,l}} \in \{\bar{f}\}^T$, значит, $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)} = U$, что противоречит включению $U \underset{\neq}{\subset} CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$. □

Доказательство следующих трёх утверждений дословно повторяет доказательства аналогичных утверждений для $T$-пространств $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$, $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $\overline{C_{p^l}}$.

**Следствие 3.3.3.** *$T$-пространства $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ и $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$ изоморфны.*

**Теорема 3.3.4.** *$T$-пространство $\overline{CD_{p^l}}$ раскладывается в бесконечную прямую сумму простых $T$-пространств $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$, изоморфных $T$-пространствам $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$, т. е.*

$$\overline{CD_{p^l}} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \overline{CD_{p^l}^{(m)}}.$$

**Следствие 3.3.4.** *Имеет место изоморфизм*

$$CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}} \cong \bigoplus_{m=1}^{\infty} CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)},$$

*где $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ — ненулевой простой $kT$-модуль. Изоморфное отображение*

$$\bigoplus_{m=1}^{\infty} CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)} \to CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$$

*определяется соответствием*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \overline{f_m} \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{f_m}.$$

Приведённые теоремы ничего не говорят о $T$-пространствах $C_1^{(m)}$ и $T$-идеалах $C^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$. В силу цепочек строгих включений (см. лемму 1.1.3) они, очевидно, не просты. Связь между ними показана ниже (см. также диаграмму 1):

$$\begin{array}{ccc} C^{(m)} & \supset & C^{(m+1)} \\ \cup & & \cup \\ C_1^{(m)} & \supset & C_1^{(m+1)}. \end{array}$$

В разделе 3.1 была показана взаимосвязь между элементами диаграммы 2, являющимися образами соответствующих им элементов диаграммы 1 в $T$-пространстве $\hat{C} = C/C^{(m+1)}$. Образ произвольного многочлена $f \in F^{(3)}$ в $T$-пространстве $\hat{C}$ будем обозначать через $\hat{f}$.

Если вопрос о простоте фактор-$T$-пространства $C_1^{(m)}/C_1^{(m+1)}$ пока открыт, то для $\widehat{C_1^{(m)}}$ он решается положительно, а для $\widehat{C^{(m)}}$ отрицательно.

Из диаграммы 2 следует, что $kT$-модуль $\widehat{C^{(m)}}$ не является простым.

**Теорема 3.3.5.** *$\widehat{C_1^{(m)}}$ — единственный минимальный подмодуль в $\widehat{C^{(m)}}$.*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы нужно показать, что любой ненулевой подмодуль в $\widehat{C^{(m)}}$ содержит $\widehat{C_1^{(m)}}$. Пусть $U$ — ненулевой подмодуль в $\widehat{C^{(m)}}$. Тогда существует ненулевой многочлен $\hat{f} \in U$. Будем считать, что $f$ — полиоднородный многочлен фиксированного типа. Тогда $f$ — линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями из многочлена $c_{m,0}z_1$. Воспользуемся тем, что коммутатор $[u, v]$ любых двух одночленов в $F^{(3)}$ можно расписать как линейную комбинацию коммутаторов от переменных $[x_i, x_j]$, умноженных на одночлены. Тогда получаем, что многочлен $f$ является линейной комбинацией многочленов, каждый из которых является произведением $m$ коммутаторов от переменных вида $[x_i, x_j]$ и некоторого одночлена. В силу того что все переменные, стоящие вне произведения коммутаторов, перестановочны по модулю $C^{(m+1)}$, можно привести подобные слагаемые, отвечающие фиксированным коммутаторным типам. Таким образом, многочлен $f$ является линейной комбинацией многочленов, отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных.

Так как $\hat{f} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении $f$ имеется ненулевой многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, вида

$$\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n_1'-1} \cdots x_m^{n_m-1} y_m^{n_m'-1} [x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m] z_1^{q_1} \cdots z_s^{q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n_i' \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Подставляя 1 вместо всех переменных $z_j$, получим, что все многочлены линейной комбинации, равной $f$, кроме выбранного, обращаются в 0. Выбранный многочлен перейдёт в многочлен

$$\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n_1'-1} \cdots x_m^{n_m-1} y_m^{n_m'-1} [x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m].$$

Применим к каждой переменной полученного многочлена метод спуска и выделим из него полилинейный многочлен (см. лемму 1.1.5). Очевидно, он равен $\alpha c_{m,0}$. Поэтому $\widehat{C_1^{(m)}} \subset U$. □

Из теоремы 3.3.5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Следствие 3.3.5.** *$\widehat{C_1^{(m)}}$ — простой $kT$-модуль.*

Рассмотрим строение $T$-пространств $\widehat{C_{p^l}^{(m)}}/\widehat{C_{p^{l-1}}^{(m)}}$ и $\widehat{CD_{p^l}^{(m)}}/\widehat{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$, а также $\widehat{C_{p^l}}/\widehat{C_{p^{l-1}}}$ и $\widehat{CD_{p^l}}/\widehat{CD_{p^{l+1}}}$, где $\widehat{C_{p^l}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{p^l}^{(m)}}$, $\widehat{C_{p^l}}$, $\widehat{CD_{p^l}}$ — образы $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$, $C_{p^l}$, $CD_{p^l}$ в $\hat{C}$ соответственно.

Из предыдущих результатов этого параграфа получается следующее утверждение.

**Следствие 3.3.6.**

1. *Имеет место изоморфизм*

$$\widehat{C_{p^l}}/\widehat{C_{p^{l-1}}} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \widehat{C^{(i)}_{p^l}}/\widehat{C^{(i)}_{p^{l-1}}},$$

*где* $C^{(i)}_{p^l}/C^{(i)}_{p^{l-1}} \cong \widehat{C^{(i)}_{p^l}}/\widehat{C^{(i)}_{p^{l-1}}}$ — *ненулевой простой* $kT$*-модуль.*

2. *Имеет место изоморфизм*

$$\widehat{CD_{p^l}}/\widehat{CD_{p^{l+1}}} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \widehat{CD^{(i)}_{p^l}}/\widehat{CD^{(i)}_{p^{l+1}}},$$

*где* $CD^{(i)}_{p^l}/CD^{(i)}_{p^{l+1}} \cong \widehat{CD^{(i)}_{p^l}}/\widehat{CD^{(i)}_{p^{l+1}}}$ — *ненулевой простой* $kT$*-модуль.*

Для $l = 0$ имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.3.6.** $T$*-пространство* $\widehat{C^{(m)}}/\widehat{CD^{(m)}_p}$ *является простым* $kT$*-модулем.*

**Доказательство.** Пусть $U \underset{\neq}{\subset} \widehat{C^{(m)}}/\widehat{CD^{(m)}_p}$ — ненулевой подмодуль. Значит, существует ненулевой многочлен $\hat{f} \in U$. Будем считать, что $f$ — полиоднородный многочлен фиксированного типа. По теореме 3.2.2 в многочлене $f$ найдётся переменная, например $z_1$, такая что $f \equiv z_1^{q_1} f_1 \pmod{CD^{(m)}_p + C^{(m+1)}}$, где $(q_1, p) = 1$, $f_1$ — линейная комбинация либо 1-многочленов, либо $p$-многочленов, не зависящих от переменной $z_1$ и отвечающих различным коммутаторным типам. Так как $\hat{f} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении $f$ существует ненулевой 1-многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, вида

$$\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n_1'-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{n_m-1} y_m^{n_m'-1}[x_m, y_m] z_1^{q_1} \cdots z_s^{q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n_i', q_1 \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{2, s}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$, $j = \overline{2, s}$ в многочлене $f$. Такие подстановки обращают в нуль все многочлены линейной комбинации (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1), дающие $f$, кроме выбранного. Выбранный многочлен перейдёт в многочлен

$$\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n_1'-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{n_m-1} y_m^{n_m'-1}[x_m, y_m] z_1^{q_1}.$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полилинейный многочлен (см. лемму 1.1.5), получим многочлен $\alpha q_1 c_{m,0} z_1$, где $\alpha q_1 \in k$ отлично от нуля. Значит, $\widehat{C^{(m)}}/\widehat{CD^{(m)}_p} = U$, что противоречит включению $U \underset{\neq}{\subset} \widehat{C^{(m)}}/\widehat{CD^{(m)}_p}$. $\square$

**Замечание 3.3.1.** Из теоремы 2.3.2 следует, что $D_{p^{l+1}}$ — единственный максимальный подмодуль в $D_{p^l}$. Естественно возникает вопрос об аналоге этого утверждения для всех рассмотренных выше в диаграммах 1 и 2 вертикальных бесконечных убывающих и возрастающих цепочек включений $T$-пространств.

## 3.4. Случай характеристики 2

Итак, соотношения Фробениуса выполняются только начиная со степени 4. Поэтому почти все результаты, полученные в предыдущих параграфах этого раздела, без труда переносятся на элементарные составляющие $C_{2^l}^{(m)}$ и $CD_{2^l}^{(m)}$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$ и на связанные с ними теоретико-модульные конструкции. Рассмотрим $T$-пространства $C_2$ и $CD_2$.

Как известно, $T$-пространство $C_2$ — бесконечная сумма элементарных составляющих $C_2^{(m)} = \{c_{m,1}\}^T$, а $T$-пространство $CD_2$ — бесконечная сумма элементарных составляющих $CD_2^{(1,s)} = \{c_{1,1}z_1^2 \cdots z_s^2\}^T$ (см. обозначения раздела 1). Вопрос о связи $CD_2^{(1,s)}$ с элементарными составляющими $T$-пространств $C_{2^l}$, $l \geqslant 0$, $CD_{2^l}$, $l \geqslant 2$, $C$, а также с $T$-пространствами $CD_2^{(m)}$ в этой работе не исследуется. Тем не менее можно рассмотреть взаимосвязь $T$-пространств $CD_2^{(m)}$ с элементарными составляющими $T$-пространств $C_{2^l}$, $l \geqslant 0$, $CD_{2^l}$, $l \geqslant 2$, и $C$. Она выражается диаграммой, аналогичной диаграмме 1 из раздела 1.1 без самого левого столбца. Естественно возникает вопрос о независимости элементарных составляющих и $T$-пространств $CD_2^{(m)}$. Заметим, что доказательство теоремы 3.1.1 опирается на соотношения Фробениуса, поэтому вопрос о справедливости этой теоремы для $p = 2$ пока открыт. Однако вместо $\Omega\big(C_{2^{l+1}}^{(m)}\big)$ и $\Omega\big(CD_{2^l}^{(m)}\big)$ можно рассмотреть $T$-пространства $\Lambda\big(C_{2^{l+1}}^{(m)}\big) = C_{2^l}^{(m)} + \sum\limits_{i<m} CD_4^{(i)} + C^{(m+1)}$ и $\Lambda\big(CD_{2^l}^{(m)}\big) = CD_{2^{l+1}}^{(m)} + \sum\limits_{i<m} CD_4^{(i)} + C^{(m+1)}$ соответственно. Имеет место следующий аналог теоремы 3.1.1 о независимости для случая $p = 2$.

**Теорема 3.4.1.** *Пусть $\mathcal{M}$ есть $C_{2^{l+1}}^{(m)}$ или $CD_{2^l}^{(m)}$. Тогда $\big(\mathcal{M}+\Lambda(\mathcal{M})\big)/\Lambda(\mathcal{M})$ — ненулевое $T$-пространство.*

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.1.1, за исключением случая $\mathcal{M} = C^{(m)}$. Покажем, что теорема верна и для $\mathcal{M} = C^{(m)}$. Предположим противное: пусть $g_{m,0} = c_{m,0}z_1$ является линейной комбинацией многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из многочленов, порождающих $T$-пространства, входящие в $\Lambda\big(C^{(m)}\big)$.

Среди слагаемых линейной комбинации могут встретиться многочлены, получающиеся некоторыми подстановками из многочлена $g_{m,1} = c_{m,1}z_1^2$. Проследим за подстановками в $z_1^2$. С помощью соотношений из замечания 1.1.1 нетрудно проверить, что любое действие алгебры $kT$ на $z_1^2$ переводит $g_{m,1}$ по модулю $C^{(m+1)}$ в $c_{m,1}h$, где $h$ — линейная комбинация одночленов вида

$z_1^{2n_1}\cdots z_s^{2n_s}$, $n_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Поэтому достаточно рассмотреть либо только мономиальные подстановки, в результате которых по модулю $C^{(m+1)}$ получаются произведения вида $c_{m,1}z_1^{2n_1}\cdots z_1^{2n_s}$, либо только подстановки элементов поля $k$ вместо переменной $z_1$. Так как в многочлен $g_{m,0}$ каждая его переменная входит с кратностью 1, то, очевидно, вместо переменной $z_1$ могут подставляться только элементы поля $k$. Тогда все слагаемые линейной комбинации, дающие $g_{m,0}$ и появляющиеся в результате некоторых подстановок в многочлене $g_{m,1}$, на самом деле получаются из многочлена $c_{m,1}$, т. е. принадлежат $T$-пространству $C_2^{(m)}$.

Заметим, что при подстановке $z_1\mapsto x_1^3y_1^3\cdots x_m^3y_m^3$ в $g_{m,0}$ этот многочлен перейдёт в многочлен $c_{m,2}=x_1^3y_1^3[x_1,y_1]\cdots x_m^3y_m^3[x_m,y_m]$. Из сделанного предположения следует, что $c_{m,2}\in\Lambda\big(C_4^{(m)}\big)$. Это противоречит утверждению, отмеченному в начале доказательства, из которого следует, что $T$-пространство $\big(\mathcal{M}+\Lambda(\mathcal{M})\big)/\Lambda(\mathcal{M})$ при $\mathcal{M}=C_4^{(m)}$ ненулевое. $\square$

Нетрудно показать, что имеют место также аналоги следствий 3.1.1 и 3.1.2. Таким образом, возникают вопросы о строении фактор-$T$-пространств $C_2^{(m)}/C_1^{(m)}$, $CD_2^{(m)}/CD_4^{(m)}$, $C^{(m)}/CD_2^{(m)}$ и связанных с ними конструкций. Учитывая замечание 1.3.2, отметим, что доказательство простоты элементарных факторов (см. теоремы 3.3.1 и 3.3.3) существенно опирается на теорему 1.3.2. В свою очередь, эта теорема доказывается с использованием соотношений Фробениуса. Поэтому вопрос о простоте $C_2^{(m)}/C_1^{(m)}$, $CD_2^{(m)}/CD_4^{(m)}$ и $T$-пространства $C^{(m)}/CD_2^{(m)}$ пока открыт. Однако можно рассмотреть $T$-подпространства $\widehat{C_{2^l}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{2^l}^{(m)}}$ в $\widehat{C}=C/C^{(m+1)}$. Взаимосвязь между $T$-пространствами $\widehat{C_{2^l}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{2^l}^{(m)}}$ выражается диаграммой, аналогичной диаграмме 2 в разделе 3.1 без самого левого столбца. Также для этих $T$-пространств остаётся справедливым аналог теоремы 3.4.1. Для $T$-пространства $\widehat{C_1^{(m)}}$ имеют место утверждения теоремы 3.3.5 и следствия 3.3.5 из неё. Поэтому интерес вызывают вопросы о строении фактор-$T$-пространств $\widehat{C_{2^l}^{(m)}}/\widehat{C_{2^{l-1}}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{2^l}^{(m)}}/\widehat{CD_{2^{l+1}}^{(m)}}$ и $\widehat{C^{(m)}}/\widehat{CD_2^{(m)}}$. Очевидно, для $l\geqslant 2$ имеет место следствие 3.3.6. С учётом перестановочности переменных по модулю $C^{(m+1)}$ в любых элементах из $\widehat{C_2^{(m)}}$, $\widehat{CD_2^{(m)}}$ и $\widehat{C^{(m)}}$ несложно показать, что $T$-пространства $\widehat{C_2^{(m)}}/\widehat{C_1^{(m)}}$, $\widehat{CD_2^{(m)}}/\widehat{CD_4^{(m)}}$ и $\widehat{C^{(m)}}/\widehat{CD_2^{(m)}}$ простые.

# 4. Мультипликативная структура

## 4.1. Теорема о строении $T$-алгебры $W_{p^l}$

В этом параграфе мы рассмотрим мультипликативную структуру $T$-пространства $W_n$. Мы покажем, что $W_n$ замкнуто относительно умножения в алгебре $F^{(3)}$. Рассмотрим произвольные $n$-слова $u$, $v$. Если $u$ и $v$ зависят от непересекающихся множеств переменных, то, очевидно, $uv \in W_n$. Если множества переменных $u$ и $v$ пересекаются по некоторому множеству переменных, то одночлен $uv$ также будет принадлежать $W_n$. Действительно, можно заменить $v$ на $n$-слово $v'$, которое получается из $v$ подстановкой вместо переменных, совпадающих с переменными одночлена $u$, других переменных, не совпадающих с переменными $u$. Тогда $uv' \in W_n$. Отсюда, так как $W_n$ — $T$-пространство, подходящей подстановкой в $v'$ получаем, что $uv \in W_n$. Таким образом, можно говорить о $T$-подалгебре $W_n$, порождённой всеми $n$-словами.

Интересен вопрос о структуре $T$-пространства $n$-слов как $T$-подалгебры в $F^{(3)}$, а также о строении алгебры $F^{(3)}$ как $W_n$-модуля (оно будет рассмотрено в следующем параграфе). Нам понадобятся многочлены (1.2) из канонического базиса алгебры $F^{(3)}$, т. е. многочлены вида

$$x_{j_1}^{n_{j_1}-1} x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \cdots x_{j_{2t-1}}^{n_{j_{2t-1}}-1} x_{j_{2t}}^{n_{j_{2t}}-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2t-1}}, x_{j_{2t}}] x_{i_1}^{m_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{m_{i_s}},$$

где $j_1 < \ldots < j_{2t}$, $i_1 < \ldots < i_s$, $n_{j_\beta}$, $m_{i_\alpha}$ — натуральные числа и $\{j_\beta\} \cap \{i_\alpha\} = \varnothing$.

Мы уже отмечали, что многие структурные вопросы алгебры $F^{(3)}$ сводятся именно к $W_{p^l}$, поэтому изучим строение $T$-алгебры $W_{p^l}$. Как нетрудно проверить, пользуясь коммутаторными соотношениями, $T$-пространство $W_p$ лежит в центре $ZF^{(3)}$ алгебры $F^{(3)}$ для любого $p$. Более того, как показано в [13, 14], $ZF^{(3)} = W_p$. С помощью этого факта удаётся дать положительный ответ на вопрос, поставленный во втором разделе, о равенстве $CD_2 = D_2 \cap C$ в случае $p = 2$.

**Теорема 4.1.1.** *Если $p = 2$, то $CD_2 = D_2 \cap C$.*

**Доказательство.** Включение $CD_2 \subset D_2 \cap C$ следует из утверждения 2 теоремы 2.2.1 и утверждения 4 теоремы 2.4.1. Покажем, что обратное включение также выполняется. Пусть $f \in D_2 \cap C$ — произвольный многочлен. Тогда из коммутаторных соотношений следует, что $f$ — элемент центра. Кроме того, в силу бесконечности поля $k$ можно считать, что $f$ — полиоднородный многочлен. Разложим его по базису (1.2) алгебры $F^{(3)}$. Отметим, что в силу $f \in D_2 \cap C$ все многочлены этого базиса из разложения $f$ содержат коммутаторы. Если $f$ — сумма коммутаторов, то $f$ лежит в $CD_2$ в силу утверждения 4 теоремы 2.4.1. Если все переменные, входящие в $f$, имеют кратность, делящуюся на 2, то $f \in CD_2$, что вытекает из предложения 1.3.2. Если нет, то пусть $y$ — переменная с наибольшим номером, входящая в $f$ с кратностью $q$, не делящейся на 2 (эта переменная обозначена для удобства другой буквой). Тогда любой элемент (1.2), участвующий в разложении многочлена $f$, как следует из коммутаторных соотношений, имеет вид $gy^q$ или $[y^q, x_i]g$, где многочлен $g$ не содержит $y$. Отсюда следует, что $f = f_1 + f_2 y^q$, где $f_1$ — сумма коммутаторов, а $f_2$ не содержит переменную $y$. В самом деле, согласно коммутаторным соотношениям

$$[y^q, x_i]g = [y^q g, x_i] - [g, x_i]y^q. \tag{4.1}$$

Суммируя элементы (4.1), входящие в запись элементов (1.2) из разложения многочлена $f$, получаем требуемое представление $f$. Так как $f$ — элемент из центра, то $f_2 = 0$. Иначе если $z$ — переменная с номером, бо́льшим всех номеров переменных, входящих в $f$, то

$$[f, z] = [f_2 y^q, z] = [f_2, z]y^q + f_2[y^q, z] \neq 0,$$

так как в силу независимости системы (1.2) второе слагаемое не равно нулю и не зависит от первого. Это противоречит центральности $f$. Следовательно, $f = f_1$, значит, $f \in CD_2$. □

Структуру $W_{p^l}$ как алгебры проясняет следующая теорема.

**Теорема 4.1.2.** *Алгебра $W_{p^l}$ коммутативна. Для всех $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $W_{p^l}$ распадается в прямую сумму $T$-пространств: $W_{p^l} = CD_{p^l} \oplus D_{p^l}$, где $CD_{p^l}$ — радикал алгебры $W_{p^l}$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса $p$, причём $W_{p^l}/CD_{p^l} \cong D_{p^l}$ — алгебра коммутативных многочленов $k[1, x_1^{p^l}, \ldots, x_i^{p^l}, \ldots]$. Если $p = 2$, $l = 1$, то $W_2 = D_2$ и $D_2$ распадается в прямую сумму $k$-алгебр $D_2 = k[1, x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots] \oplus CD_2$, где $CD_2$ — радикал алгебры $D_2$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса 2, и $D_2/CD_2 \cong k[1, x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots]$ — алгебра коммутативных многочленов.*

**Доказательство.** Из коммутаторных соотношений следует, что алгебра $W_{p^l}$ коммутативна для любых $p$ и $l$. Пусть $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$.

Ясно, что $CD_{p^l}$, $D_{p^l}$ — $T$-подалгебры $W_{p^l}$. Согласно утверждению 1 теоремы 2.2.1 $T$-пространство $W_{p^l}$ раскладывается в прямую сумму $T$-подпространств: $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$.

Рассмотрим $T$-алгебру $CD_{p^l}$, которая, как нетрудно убедиться, является также $T$-идеалом в алгебре $W_{p^l}$. Из коммутаторных соотношений следует, что $\big(c_{r,l} d_s(p^l)\big)^2 = 0$ при $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Следовательно, если $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — многочлены, получающиеся из системы

$$\{c_{r,l} d_s(p^l) \mid r \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

с помощью подстановок и $k$-линейных действий, то в силу соотношений Фробениуса для любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in k$ имеют место равенства

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m)^p = \lambda_1^p f_1^p + \lambda_2^p f_2^p + \ldots + \lambda_m^p f_m^p = 0,$$

т. е. $T$-алгебра $CD_{p^l}$ является ниль-алгеброй индекса $p$.

Так как $[x_1, x_2] \cdots [x_{i-1}, x_i] \neq 0$ в алгебре $F^{(3)}$ по лемме 1.1.2 и все коммутаторы $[x_{j-1}, x_j]$ (в силу включения $C_1 \subset CD_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$) лежат в $CD_{p^l}$, то ниль-алгебра $CD_{p^l}$ не нильпотентна.

Нетрудно убедиться, что коммутативная ниль-алгебра $CD_{p^l}$ есть ниль-идеал алгебры $W_{p^l}$, причём фактор-алгебра $W_{p^l}/CD_{p^l}$ совпадает с точностью до изоморфизма с коммутативной $T$-алгеброй $D_{p^l}$. Эта алгебра совпадает с $T$-подалгеброй $k[1, x_1^{p^l}, \ldots, x_i^{p^l}, \ldots]$ алгебры коммутативных многочленов $k[1, x_1, \ldots, x_i, \ldots]$. Таким образом, $D_{p^l}$ не содержит делителей нуля и, значит, в ней нет нильпотентных элементов. Отсюда получаем, что $CD_{p^l}$ — максимальный ниль-идеал алгебры $W_{p^l}$, и следовательно, $CD_{p^l}$ — радикал этой алгебры.

Пусть $p = 2$, $l = 1$, тогда из утверждения 2 теоремы 2.2.1 следует, что $W_2 = D_2$. Несложно проверить, что $D_2$ распадается в прямую сумму $k$-алгебр: $D_2 = k[1, x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots] \oplus CD_2$. Применяя те же рассуждения, которые были приведены для случая $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$, получим, что $CD_2$ — ненильпотентная ниль-алгебра индекса 2. Нетрудно видеть, что она является ниль-идеалом в алгебре $D_2$. Докажем, что этот ниль-идеал максимален. Для этого рассмотрим фактор-алгебру $D_2/CD_2$. Учитывая теорему 4.1.1, получаем, что эта фактор-алгебра изоморфна подалгебре $k[1, x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots]$ в алгебре коммутативных многочленов $k[1, x_1, \ldots, x_i, \ldots]$, где нет делителей нуля. Следовательно, в рассматриваемой фактор-алгебре нет нильпотентных элементов. Отсюда получаем, что ниль-идеал максимален. Значит, $CD_2$ является радикалом алгебры $D_2$. $\square$

## 4.2. Описание $F^{(3)}$ и некоторых $T$-пространств как $W_p$- и $D_p$-модулей

Нетрудно убедиться, что $T$-пространство $CD_p$ замкнуто относительно умножения на элементы из $W_p$, т. е. обладает структурой $W_p$-модуля. Строение $W_p$-модулей $F^{(3)}$ и $CD_p$ в некоторой степени проясняет следующая теорема.

**Теорема 4.2.1.**

1. *Пусть* $u(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l}) = x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_l}^{r_{i_l}}$, где $i_1 < \ldots < i_l$, $1 \leqslant r_{i_\alpha} \leqslant p-1$, $S$ — *множество, состоящее из* 1 *и всех одночленов* $u(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l})$. *Тогда*
$$F^{(3)} = W_p \cdot S = W_p \cdot 1 + \sum_{(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l})} W_p u(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l}),$$
*причём* $S$ — *бесконечная неприводимая система порождающих* $W_p$-*модуля* $F^{(3)}$.
2. *Пусть* $L$ — *множество многочленов, получающихся из многочлена* $c_{1,1}$ *с помощью линейных подстановок,* $k$-*линейных действий и подстановок вместо переменных элементов из системы* $S$. *Тогда* $CD_p = W_p \cdot L$ — *бесконечно порождённый* $W_p$-*модуль.*

**Доказательство.** 1. Рассмотрим многочлен из канонического базиса (1.2). Поделим $m_{i_\alpha}$ на $p$ с остатком: $m_{i_\alpha} = pq_{i_\alpha} + r_{i_\alpha}$, где $q_{i_\alpha} \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r_{i_\alpha} \leqslant p-1$, $\alpha = \overline{1, s}$. Если $r_{i_\alpha} = 0$ для любого $\alpha = \overline{1, s}$, то многочлен из канонического базиса лежит в $\Delta$ (см. обозначения в конце раздела 1.3) и, следовательно, принадлежит $W_p$. Если это не так, то среди $m_{i_\alpha}$ найдутся такие (возможно, все), которые не делятся на $p$, т. е. $1 \leqslant r_{i_\alpha} \leqslant p-1$ для некоторых $\alpha \in \{1, \ldots, s\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = \overline{1, l}$, $l \leqslant s$. Одночлен $x_{i_1}^{m_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{m_{i_s}}$ с помощью коммутаторных соотношений представим в виде $x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}} \cdot x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_l}^{r_{i_l}}$, где $i_1 < \ldots < i_l$, $1 \leqslant r_{i_\alpha} \leqslant p-1$. Положим $u(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l}) = x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_l}^{r_{i_l}}$. Таким образом, многочлен из канонического базиса записывается в виде $f \cdot u(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l})$, где $f \in W_p$. Из сказанного выше получаем, что любой многочлен алгебры $F^{(3)}$ лежит в $W_p \cdot S = W_p \cdot 1 + \sum\limits_{(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l})} W_p u(r_{i_1}, \ldots, r_{i_l})$.

Покажем, что $S$ — неприводимая система порождающих для $W_p$-модуля $F^{(3)}$. Предположим, что это не так, т. е. некоторый одночлен $u \in S$ есть линейная комбинация над $W_p$ одночленов $u_i \in S$:

$$u = f_1 u_1 + \ldots + f_r u_r,$$

где $f_i \in W_p$, $i = \overline{1, r}$. Поскольку $f_i \in W_p$, то по предложению 1.3.1 для любого $i = \overline{1, r}$ выполняется равенство $f_i = h_i + g_i$, где $h_i$ — линейная комбинация $p$-многочленов над $k$, $g_i$ — некоторый многочлен из $C_1$. Тогда $u = \sum\limits_{i=1}^{r} (h_i u_i + g_i u_i)$. Но каждое слагаемое $h_i u_i$ обладает набором переменных, кратности вхождения которых в $h_i u_i$ не сравнимы по модулю $p$ с кратностями вхождения этих переменных в одночлен $u$. Поэтому в представлении $u$ в виде линейной комбинации одночленов $u_i$ над $W_p$ выражение $\sum\limits_{i=1}^{r} h_i u_i$ равно 0. Отсюда следует, что $u = \sum\limits_{i=1}^{r} g_i u_i$. Подставляя 1 во все переменные одночлена $u$, получим $1 = 0$, что невозможно. Таким образом, $S$ — бесконечная неприводимая система порождающих $W_p$-модуля $F^{(3)}$.

2. Покажем, что $L$ — система порождающих для $W_p$-модуля $CD_p$. Пусть $\sigma \in T$. Тогда

$$(g_{m,1})^\sigma = (c_{1,1})^\sigma (x_2^{p-1} y_2^{p-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p-1} y_m^{p-1} [x_m, y_m] z_1^p)^\sigma,$$

где $(x_2^{p-1} y_2^{p-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p-1} y_m^{p-1} [x_m, y_m] z_1^p)^\sigma \in W_p$, $(c_{1,1})^\sigma = c_{1,1}(h_1, h_2)$, $h_1, h_2 \in F^{(3)}$ — произвольные многочлены. Согласно доказанному выше утверждению 1 получаем, что

$$h_i = f_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{r_i} f_i^{(j)} u_i^{(j)},$$

где $f_i^{(0)}, f_i^{(j)} \in W_p$, $u_i^{(j)} \in S$, $j = \overline{1, r_i}$, $r_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Поскольку $W_p$ лежит в центре алгебры $F^{(3)}$, то все $f_i^{(0)}$, $f_i^{(j)}$ коммутируют с любыми элементами из алгебры $F^{(3)}$. Отсюда следует, что $c_{1,1}(h_1, h_2)$ — линейная комбинация над $W_p$ всевозможных многочленов $c(u_1, \ldots, u_t)$, $t \in \mathbb{N}$, где $c(x_1, \ldots, x_t)$ — полиоднородный многочлен, выделенный из $c_{1,1}$ с помощью линейных подстановок и $k$-линейных действий (см. обозначения, приведённые в разделе 1.1), а $u_1, \ldots, u_t$ — одночлены из множества $\{u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(r_1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_2^{(r_2)}\}$. Таким образом, получаем, что $L$ — система порождающих $CD_p$ как $W_p$-модуля, т. е. $CD_p = W_p \cdot L$.

Докажем, что $CD_p$ — бесконечно порождённый $W_p$-модуль. Допустим, что в $L$ существует конечная подсистема $L_1$, через которую выражаются все многочлены системы $L$. Ясно, что никакой элемент системы $L_1$ не содержит свободного члена и, кроме того, множество всех переменных, от которых зависят все элементы системы $L_1$, конечно. Обозначим это множество через $X$.

Для любого $i \in \mathbb{N}$ через $c_{1,1}^{(i)}$ обозначим многочлен $x_i^{p-1}y_i^{p-1}[x_i, y_i]$. Рассмотрим следующую бесконечную подсистему в $L$ многочленов от непересекающихся наборов переменных:

$$L_0 = \{c_{1,1}^{(1)}, c_{1,1}^{(2)}, \ldots, c_{1,1}^{(i)}, \ldots\}.$$

Выберем среди элементов системы $L_0$ многочлен, который не зависит от переменных из множества $X$. Пусть это будет многочлен $c_{1,1}^{(i)}$. Так как $L_0$ — подсистема в $L$, то $c_{1,1}^{(i)}$ выражается через элементы системы $L_1$. Положив все переменные из $X$ равными нулю, мы получим противоречие $c_{1,1}^{(i)} = 0$. $\square$

**Замечание 4.2.1.** $F^{(3)}$ не является свободным $W_p$-модулем. Например, рассмотрим $x_1x_3 \in S$. Очевидно, многочлен $x_1x_3 \cdot [x_1, x_2][x_3, x_4]$ лежит в $W_p$. Таким образом, для любого $u \in S$ можно подобрать такой многочлен $f \in W_p$, что $uf \in W_p$, т. е. $uf = 1 \cdot g$, где $g \in W_p$.

Однако если рассматривать $F^{(3)}$ как $D_p$-модуль, то, как будет показано в следующей теореме, этот модуль является свободным. Напомним, что любой элемент $T$-пространства $D_p$ есть линейная комбинация над полем $k$ одночленов вида

$$x_{s_1}^{pq_{s_1}} \cdots x_{s_l}^{pq_{s_l}}, \tag{4.2}$$

где $q_{s_j} \in \mathbb{N}$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, l}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $G$ — множество всех таких многочленов канонического базиса, что $1 \leqslant n_{j_\beta} \leqslant p - 1$, $1 \leqslant m_{i_\alpha} \leqslant p - 1$. Отметим, что множество $G$ содержит 1.

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 4.2.2.** *$F^{(3)}$ — свободный $D_p$-модуль бесконечного ранга.*

**Доказательство.** Ясно, что $G$ порождает $F^{(3)}$ как $D_p$-модуль. Покажем, что $G$ — множество свободных порождающих. Допустим, что для некоторого набора попарно различных $g_1, \ldots, g_r$ из $G$ и некоторого ненулевого набора элементов $h_1, \ldots, h_r$ из $D_p$ имеет место равенство

$$h_1g_1 + h_2g_2 + \ldots + h_rg_r = 0. \tag{4.3}$$

Легко убедиться, что $h_i$ можно считать одночленами вида (4.2), причём полиоднородные многочлены $h_ig_i$ имеют один и тот же тип вхождения переменных. При этом каждая переменная входит во все $g_i$ с одной и той же по модулю $p$ кратностью.

В выражении (4.3) выберем слагаемое, содержащее наименьшее число коммутаторов (выбор, вообще говоря, неоднозначен, кроме случая, когда наименьшее число коммутаторов равно нулю, т. е. соответствующее слагаемое — одночлен). Пусть это слагаемое будет $h_1g_1$ и $X$ — множество переменных (может быть, пустое), входящих в коммутаторы многочлена $g_1$. В силу сравнимости кратностей переменных из $g_i$ по модулю $p$ каждый из остальных многочленов $g_i$

содержит в своих коммутаторах хотя бы одну переменную, не входящую в $X$. Положим все переменные, кроме тех, что входят в $X$, равными 1. Тогда все слагаемые выражения (4.3), кроме $h_1g_1$, перейдут в нуль. Полученное противоречие и доказывает теорему. □

Очевидно, каждое из прямых слагаемых выражения $W_p = D_p \oplus CD_p$ является $D_p$-модулем. Таким образом, $W_p$ как прямая сумма $D_p$-модулей является $D_p$-модулем, содержащим свободный $D_p$-подмодуль $D_p$ ранга 1. Поэтому вопрос о строении $D_p$-модуля $W_p$ сводится к изучению строения $D_p$-подмодуля $CD_p$. По предложению 1.3.1 любой элемент из $CD_p$ есть линейная комбинация некоторого многочлена из $T$-пространства $C_1$ и $p$-многочленов из $\Delta_p$, причём с ненулевой кратностью, т. е. многочленов

$$x_{j_1}^{pn_{j_1}-1}x_{j_2}^{pn_{j_2}-1}\cdots x_{j_{2m-1}}^{pn_{j_{2m-1}}-1}x_{j_{2m}}^{pn_{j_{2m}}-1}[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2m-1}},x_{j_{2m}}]x_{i_1}^{pq_{i_1}}\cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}.$$

Каждый сомножитель $x_{j_\beta}^{pn_{j_\beta}-1}$ в этих многочленах можно записать в виде $x_{j_\beta}^{p-1}x_{j_\beta}^{pn_{j_\beta}-p}$. Используя коммутаторные соотношения, получим

$$x_{j_1}^{p-1}x_{j_2}^{p-1}\cdots x_{j_{2m-1}}^{p-1}x_{j_{2m}}^{p-1}\times$$
$$\times[x_{j_1},x_{j_2}]\cdots[x_{j_{2m-1}},x_{j_{2m}}]x_{j_1}^{pn_{j_1}-p}\cdots x_{j_{2m}}^{pn_{j_{2m}}-p}x_{i_1}^{pq_{i_1}}\cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}.$$

Из коммутаторных соотношений следует, что $C_1$ замкнуто относительно умножения на элементы из $D_p$, поэтому $C_1$ — $D_p$-подмодуль в $CD_p$.

Таким образом, любой элемент из $CD_p$ является линейной комбинацией над $D_p$ многочленов вида

$$x_{j_1}^{p-1}x_{j_2}^{p-1}\cdots x_{j_{2m-1}}^{p-1}x_{j_{2m}}^{p-1}[x_{j_1},x_{j_2}]\ldots[x_{j_{2m-1}},x_{j_{2m}}], \tag{4.4}$$

$m \in \mathbb{N}$, и некоторого многочлена из $D_p$-подмодуля $C_1$.

Пусть $M$ — $D_p$-подмодуль в $CD_p$, порождённый системой многочленов (4.4). Из независимости системы $G$ над $D_p$, показанной в доказательстве теоремы 4.2.2, и из того что система (4.4) — подсистема в $G$, следует, что система многочленов (4.4) также независима над $D_p$. Значит, $D_p$-модуль $M$ свободен.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.2.3.** $CD_p = M \oplus C_1$.

**Доказательство.** Из сказанного выше следует, что $CD_p = M + C_1$. Остаётся доказать, что $M \cap C_1 = \{0\}$. Допустим, что $h$ — некоторая ненулевая линейная комбинация над $D_p$ многочленов (4.4), которая принадлежит $C_1$. Можно считать, что $h$ — полиоднородный многочлен фиксированного типа. Отсюда следует, что $h$ представляется в виде линейной комбинации $p$-многочленов над $D_p$ из системы (4.4), отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Очевидно, произведение любого элемента из $D_p$ на $p$-многочлен из системы (4.4) является $p$-многочленом. Значит, $h$ представляется в виде линейной комбинации $p$-многочленов над $k$ с различными коммутаторными типами вхождения переменных.

Так как $h \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении $h$ имеется ненулевой $p$-многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, вида

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1}[x_m, y_m] z_1^{pq_1} \cdots z_s^{pq_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$ во все переменные $z_j$ многочлена $h$. После таких подстановок все $p$-многочлены линейной комбинации, равной $h$, кроме выбранного, обратятся в нуль (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1). Выбранный многочлен перейдёт в многочлен

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1}[x_m, y_m].$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полиоднородный многочлен степени $p$ по всем переменным, получим многочлен $\beta c_{m,1}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Значит, $c_{m,1}$ лежит в $C_1$, т. е. $C_p^{(m)} \subset C_1$. Последнее утверждение противоречит теореме 3.1.1 о независимости элементарных составляющих. □

**Следствие 4.2.1.** $W_p = D_p \oplus M \oplus C_1$.

Исследование мультипликативной структуры $W_p$ приводит нас к изучению идеалов этой алгебры, являющихся одновременно $T$-пространствами. Такие идеалы в $W_p$ согласно общему определению (см. [19]) мы называем *$T$-идеалами*. Через $(S)$ обозначается $T$-идеал в $W_p$, порождённый подмножеством $S$ в $W_p$. Отметим, что все рассматриваемые идеалы являются двусторонними, так как $W_p$ — центр алгебры $F^{(3)}$ (см. [13,14]). Рассмотрим элементарные составляющие $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$ для любого $l > 0$ из диаграммы 1, приведённой в разделе 3.1. Естественным образом возникает вопрос об идеалах, порождённых элементами диаграммы 1. Имеет место следующая лемма.

**Лемма 4.2.1.** *$T$-идеал, порождённый любым из элементарных составляющих $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$, $m, l \in \mathbb{N}$, совпадает с $T$-идеалом*

$$\left(CD_p^{(m)}\right) = CD_p^{(m)} + CD_p^{(m+1)} + \dots .$$

*Кроме того, $\left(C_1^{(m)}\right) = C_1^{(m)}$ и выполняется строгое включение $C_1^{(m)} \subset \left(CD_p^{(m)}\right)$.*

**Доказательство.** Совпадение $T$-идеала, порождённого любым из элементарных составляющих $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$, $m, l \in \mathbb{N}$, с $T$-идеалом $\left(CD_p^{(m)}\right)$ очевидно. Любой элемент $f$ из $W_p$ есть сумма $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in D_p$, $f_2 \in CD_p$. Для удобства положим, что $g_{m,1}$ и $f_2$ зависят от непересекающихся наборов переменных. Рассмотрим произведение $g_{m,1} f$. Получим $g_{m,1} f = g_{m,1} f_1 + g_{m,1} f_2$. Ясно, что $g_{m,1} f_1 \in CD_p^{(m)}$, а многочлен $g_{m,1} f_2$ лежит в $T$-пространстве $CD_p^{(m+1)} + CD_p^{(m+2)} + \dots$. Отсюда следует, что $\left(CD_p^{(m)}\right) = CD_p^{(m)} + CD_p^{(m+1)} + \dots$. Равенство $\left(C_1^{(m)}\right) = C_1^{(m)}$ следует из того, что произведение $c_{m,0}$ и произвольного элемента из $W_p$ согласно первой теореме о выравнивании лежит в $C_1^{(m)}$.

Применяя метод спуска к $g_{m,1} \in \left(CD_p^{(m)}\right)$ и выделяя полилинейный многочлен (см. лемму 1.1.5), получим многочлен $c_{m,0}$, порождающий $T$-идеал $C_1^{(m)}$. Отсюда следует, что $C_1^{(m)} \subset \left(CD_p^{(m)}\right)$. Из теоремы 3.1.1 следует, что это включение строгое. $\square$

Из этой леммы непосредственно следует строгое включение $C_1 \subset (CD_p)$, где $C_1 = C_1^{(1)}$, $(CD_p) = \left(CD_p^{(1)}\right)$.

Лемма 4.2.1 ничего не говорит об элементарном составляющем $C^{(m)}$ самой верхней строки диаграммы 1, который, напомним, является $T$-идеалом в $F^{(3)}$, порождённым произведением $m$ коммутаторов. Тем не менее он также является $W_p$-модулем, и естественно поставить вопрос о строении этого $W_p$-модуля. Очевидно, что выполнены включения $C_1^{(m)} \subset \left(CD_p^{(m)}\right) \subset C^{(m)}$, причём, как следует из теоремы 3.1.1, все включения строгие.

Резюмируя сказанное, можно построить следующую диаграмму строгих включений $W_p$-модулей.

Диаграмма 3

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \dots & \supset & C^{(m)} & \supset & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
(CD_p) & = & \left(CD_p^{(1)}\right) & \supset & \left(CD_p^{(2)}\right) & \supset & \dots & \supset & \left(CD_p^{(m)}\right) & \supset & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \dots & \supset & C_1^{(m)} & \supset & \dots
\end{array}
$$

Рассмотрим $W_p$-модуль $C^{(m)}/C^{(m+1)} = \overline{C^{(m)}}$. Через $\bar{V}$ и $\bar{h}$ будем обозначать соответственно образы подмножества $V$ и элемента $h$ из $C^{(m)}$ в $\overline{C^{(m)}}$. Очевидно, $\overline{C^{(m)}}$ аннулируется $CD_p$, поэтому имеет смысл рассматривать $\overline{C^{(m)}}$ как $D_p$-модуль.

Ясно, что $F^{(3)}/C$ — $D_p$-модуль со свободными порождающими, являющимися образами одночленов $x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{r_{i_s}}$, где $1 \leqslant r_{i_\alpha} \leqslant p-1$, в $F^{(3)}/C$.

Любой элемент из $\overline{C^{(m)}}$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ является линейной комбинацией произведений $m$ коммутаторов, умноженных на одночлены. Несложно проверяется, что $D_p$-модуль $\overline{C^{(m)}}$ порождается множеством многочленов вида

$$
\overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{r_{i_s}}}, \tag{4.5}
$$

где $0 \leqslant r_{i_\alpha} \leqslant p-1$, $\alpha = \overline{1,s}$. Отметим, что среди переменных $x_{i_\alpha}$ могут встретиться некоторые из переменных $x_{j_\beta}$, $\beta = \overline{1,2m}$.

Легко убедиться, что $\overline{C^{(m)}}$ является прямой суммой $D_p$-модулей

$$
\overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] F^{(3)}}.
$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.2.4.** $\overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] F^{(3)}}$ — *свободный* $D_p$-*модуль.*

**Доказательство.** Нужно показать, что система попарно различных многочленов $g_i$ вида (4.5) с фиксированным коммутаторным типом независима над $D_p$, $i = \overline{1, r}$. Пусть $h_i \in D_p$ — одночлены вида (4.2). Так как $g_i \neq g_j$ при $i \neq j$, то среди переменных в $g_i$ найдутся переменные, кратности вхождения которых будут несравнимы по модулю $p$ с кратностями вхождения этих же переменных в $g_j$. Заметим, что кратности вхождения переменных в $h_i g_i$ и $h_j g_j$ сравнимы по модулю $p$ с кратностями вхождения этих же переменных в $g_i$ и $g_j$ соответственно. Отсюда следует, что любая нетривиальная линейная комбинация $h_1 g_1 + h_2 g_2 + \ldots + h_r g_r$ над $D_p$ не может быть равна нулю. $\square$

**Следствие 4.2.2.** *$\overline{C^{(m)}} = \bigoplus\limits_{(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{2m}})} \overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] F^{(3)}}$ — свободный $D_p$-модуль бесконечного ранга.*

Рассмотрим $T$-идеалы $\overline{C_1^{(m)}}$, $\big(\overline{CD_p^{(m)}}\big)$ в $\overline{C^{(m)}}$. Ясно, что $\overline{C_1^{(m)}}$, $\big(\overline{CD_p^{(m)}}\big)$ — $D_p$-подмодули в $\overline{C^{(m)}}$, причём имеют место включения

$$\overline{C_1^{(m)}} \subset \big(\overline{CD_p^{(m)}}\big) \subset \overline{C^{(m)}}$$

и, как следует из теоремы 3.1.1, все они строгие.

По теореме 4.2.3 $D_p$-модуль $CD_p$ раскладывается в прямую сумму $D_p$-подмодулей $M$ и $C_1$, порождённых множеством многочленов вида (4.4) и многочленом $c_{1,0}$ соответственно. Аналог теоремы 4.2.3 имеет место и для $D_p$-модуля $\big(\overline{CD_p^{(m)}}\big)$. Нетрудно проверить, что $\big(\overline{CD_p^{(m)}}\big) = (M_1) + \overline{C_1^{(m)}}$, где $(M_1)$ — $D_p$-подмодуль, порождённый множеством многочленов $M_1$ вида

$$\overline{x_{j_1}^{p-1} x_{j_2}^{p-1} \cdots x_{j_{2m-1}}^{p-1} x_{j_{2m}}^{p-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}]}, \tag{4.6}$$

а $\overline{C_1^{(m)}}$ — $D_p$-подмодуль, порождённый многочленом $\overline{c_{m,0}}$. Как вытекает из следствия 4.2.2, система многочленов (4.5) независима над $D_p$. Система многочленов $M_1$ является подсистемой системы (4.5). Отсюда следует, что $(M_1)$ — свободный $D_p$-модуль.

Строение $D_p$-модуля $\big(\overline{CD_p^{(m)}}\big)$ описывает следующая теорема.

**Теорема 4.2.5.** $\big(\overline{CD_p^{(m)}}\big) = (M_1) \oplus \overline{C_1^{(m)}}$.

**Доказательство.** Из сказанного следует, что $\big(\overline{CD_p^{(m)}}\big) = (M_1) + \overline{C_1^{(m)}}$. Остаётся показать, что $(M_1) \cap \overline{C_1^{(m)}} = \{0\}$. Допустим, что $\bar{h}$ — некоторая ненулевая линейная комбинация над $D_p$ многочленов (4.6), лежащая в $\overline{C_1^{(m)}}$. Можно считать, что $h$ — полиоднородный многочлен фиксированного типа. Отсюда следует, что $h$ представляется в виде линейной комбинации $p$-многочленов над $D_p$ из множества многочленов (4.6), отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Очевидно, произведение любого элемента из $D_p$ на

$p$-многочлен является $p$-многочленом. Значит, $h$ представляется в виде линейной комбинации $p$-многочленов над $k$ с различными коммутаторными типами вхождения переменных.

Так как $\bar{h} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении $h$ существует ненулевой $p$-многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, вида

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn_1'-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn_m'-1}[x_m, y_m] z_1^{pq_1} \cdots z_s^{pq_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n_i' \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$ во все переменные $z_j$ многочлена $h$. После таких подстановок все $p$-многочлены линейной комбинации, дающие $h$, кроме выбранного, равны нулю (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1). Выбранный многочлен перейдёт в многочлен

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn_1'-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn_m'-1}[x_m, y_m].$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полиоднородный многочлен степени $p$ по всем переменным, получим многочлен $\beta c_{m,1}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Значит, $\overline{c_{m,1}}$ лежит в $\overline{C_1^{(m)}}$, т. е. $\left(\overline{C_p^{(m)}}\right) \subset \overline{C_1^{(m)}}$. Из леммы 4.2.1 следует, что $\left(\overline{C_p^{(m)}}\right) = \left(\overline{CD_p^{(m)}}\right)$, значит, $\left(\overline{CD_p^{(m)}}\right) \subset \overline{C_1^{(m)}}$. Последнее утверждение противоречит теореме 3.1.1 о независимости элементарных составляющих. □

**Замечание 4.2.2.** Открытыми пока остаются вопросы о строении $D_p$-модуля $\overline{C_1^{(m)}}$ и фактор-$T$-идеалов $C_1^{(m)}/C_1^{(m+1)}$ и $\left(CD_p^{(m)}\right)/C_1^{(m)}$.

## 4.3. Случай характеристики 2

Мы рассмотрели $T$-пространственное строение алгебры $F^{(3)}$ при $p = 2$. Оно заметно отличается от строения в случае $p > 2$. Однако мультипликативное строение алгебры $F^{(3)}$ для любого $p$ почти одинаково. Также как и в случае $p > 2$, алгебра $W_n$ при чётных $n$ совпадает с центром алгебры $F^{(3)}$. Кроме того, коммутативная алгебра $W_{2^l}$ — прямая сумма алгебры коммутативных многочленов $D_{2^l}$ и радикала $CD_{2^l}$, являющегося ненильпотентной ниль-алгеброй индекса 2, для любого $l > 1$ (см. [19]). Но при $l = 1$ коммутативная алгебра $W_{2^l}$ совпадает с $D_2$. В теореме 4.1.2 было доказано, что $CD_2$ — радикал алгебры $D_2$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса 2, причём $D_2/CD_2 \cong k[1, x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots]$ — алгебра коммутативных многочленов. Можно показать, что $F^{(3)}$ как $D_2$-модуль порождается 1 и всеми одночленами, в которых кратности вхождения всех их переменных равны 1, т. е. системой $S$ (см. утверждение 1 теоремы 4.2.1), кроме того, эта система неприводима, что легко следует из очевидных соображений степени. Аналогично замечанию 4.2.1 получаем, что для любого $u \in S$ можно подобрать такой многочлен $f \in D_2$, что $uf \in D_2$, т. е. $uf = 1 \cdot g$, где $g \in D_2$. Таким образом, $D_2$-модуль $F^{(3)}$

не является свободным, в отличие от $D_p$-модуля $F^{(3)}$ при $p > 2$. Однако $F^{(3)}$ как $k[1, x_1^2, \dots, x_i^2, \dots]$-модуль является свободным модулем бесконечного ранга. Для того чтобы изучить мультипликативное строение $CD_2$ аналогично тому, как это было сделано для $CD_p$ при $p > 2$, нужно исследовать структуру его элементарных составляющих $CD_2^{(1,s)}$, $s \in \mathbb{N}$, и связанных с ними конструкций.

Мультипликативное строение $F^{(3)}$ и $CD_{2^l}$ как $W_{2^l}$-модулей при $l > 1$ описывается аналогично тому, как это было сделано для $W_p$-модулей $F^{(3)}$ и $CD_p$ при $p > 2$ (см. теорему 4.2.1).

# Приложение

## П.1. Строение $W_n^*$ над полем характеристики $p$, делящей $n$

В этом разделе рассматривается неунитарная относительно свободная алгебра Грассмана $F^{(3)^*} = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle / T^{(3)}$ над полем характеристики $p$ или 0. В последнем параграфе приложения формулируется ряд открытых вопросов.

В этом параграфе мы полагаем, что поле имеет характеристику $p$. Во введении отмечалось, что при построении контрпримеров в характеристике $p$ чрезвычайно важную роль играет $T$-пространство $W_n$, порождённое в $F^{(3)}$ всевозможными $n$-словами, $n \in \mathbb{N}$. Такую же роль играет $T^*$-пространство $W_n^*$ в алгебре $F^{(3)^*}$.

Напомним (см. раздел 1.1), что любой элемент из $W_n^*$ с помощью коммутаторных соотношений можно представить в виде суммы $f + g + h$, где $f \in D_n^*$, $g \in C_n^*$, $h \in CD_n^*$, т. е.

$$W_n^* = D_n^* + C_n^* + CD_n^*. \tag{П.1}$$

Здесь

$D_n^* = \{d_s(n) = x_1^n \cdots x_s^n \mid s \in \mathbb{N}\}^{T^*}$ — диагональная компонента $W_n^*$;

$C_n^* = \{c_m(n) = x_1^{n-1} y_1^{n-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{n-1} y_m^{n-1} [x_m, y_m] \mid m \in \mathbb{N}\}^{T^*}$ — чисто коммутаторная компонента $W_n^*$;

$CD_n^* = \{c_m(n) d_s(n) \mid m, s \in \mathbb{N}\}^{T^*}$ — коммутаторная компонента $W_n^*$.

Напомним, что $C_1^* = \{[x_1, y_1]\}^{T^*}$ и $C^* = ([x_1, y_1])^{T^*}$ при $n = 1$ и $C_1^* \subsetneq C^*$.

Интересно изучить строение пространства $W_n^*$ и его компонент $D_n^*$, $CD_n^*$ и $C_n^*$ как $T^*$-пространств и как подалгебр в $F^{(3)^*}$. Следующая теорема говорит о строении основных $T^*$-подпространств в $W_n^*$ и о связи межу ними.

**Теорема П.1.1.** *Пусть $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда*

1) *если $n_1 > 1$, то выполняются строгие включения $D_n^* \subset D_{p^l}^*$, $C_n^* \subset C_{p^l}^*$, $CD_n^* \subset CD_{p^l}^*$, $W_n^* \subset W_{p^l}^*$;*
2) *для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $T^*$-пространство $D_n^*$ порождается одночленом $x_1^n$. Если $p = 2$, $l = 1$, то $x_1^n x_2^n \cdots x_i^n \notin \{x_1^n x_2^n \cdots x_j^n \mid j < i\}^{T^*}$, и следовательно, $D_n^*$ — бесконечно базируемое $T^*$-пространство;*
3) *$W_n^* = D_n^* \oplus (C_n^* + CD_n^*)$ для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$;*

4) *для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $T^*$-пространства $C_n^*$ и $CD_n^*$ порождены бесконечными системами многочленов $\{c_m(n) \mid m \in \mathbb{N}\}$ и $\{c_m(n)z_1^n \mid m \in \mathbb{N}\}$ соответственно. Эти $T^*$-пространства не связаны никакими включениями, и их пересечение ненулевое*;
5) *для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $T^*$-пространство $W_n^*$ порождается бесконечной неприводимой системой многочленов*
$$\{x_1^n, c_1(n), c_2(n), \ldots, c_m(n), \ldots, c_1(n)z_1^n, c_2(n)z_1^n, \ldots, c_m(n)z_1^n, \ldots\}. \quad (\text{П}.2)$$
*Следовательно, указанные выше бесконечные системы порождающих для $T^*$-пространств $C_n^*$ и $CD_n^*$ также неприводимы*;
6) *если $p = 2$, $l = 1$, то $W_n^* = D_n^*$, причём выполнено строгое включение $C_n^* + CD_n^* \subset D_n^*$. $T^*$-пространства $C_n^*$ и $CD_n^*$ порождены бесконечными системами многочленов $\{c_m(n) \mid m \in \mathbb{N}\}$ и $\{c_1(n)d_s(n) \mid s \in \mathbb{N}\}$ соответственно. Эти $T^*$-пространства не связаны никакими включениями и их пересечение ненулевое*;
7) *если $p = 2$, $l = 1$, то $T^*$-пространство $C_n^* + CD_n^*$ порождается бесконечной неприводимой системой многочленов*
$$\{c_1(n), c_1(n)z_1^n, c_1(n)z_1^n z_2^n, \ldots, c_1(n)z_1^n z_2^n \cdots z_s^n, \ldots\}. \quad (\text{П}.3)$$
*Следовательно, указанные выше системы порождающих для $T^*$-пространств $C_n^*$ и $CD_n^*$ неприводимы*;
8) *если $r$ делится на $p^l$ и $r > n$, то в случае $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$ выполняются строгие включения $D_r^* \subset D_n^*$, $CD_r^* \subset CD_n^*$. Если при этом $r = qn$ и $(q, p) = 1$, то $C_r^* \subset C_n^*$ и $W_r^* \subset W_n^*$. В случае $p = 2$, $l = 1$ выполняются строгие включения $W_r^* \subset W_n^*$, $CD_r^* \subset CD_n^*$. Если при этом $r = qn$ и $(q, p) = 1$, то $C_r^* \subset C_n^*$.*

**Доказательство.** 1. Включения $D_n^* \subset D_{p^l}^*$, $C_n^* \subset C_{p^l}^*$, $CD_n^* \subset CD_{p^l}^*$ следуют из того, что порождающие $T^*$-пространств $D_n^*$, $C_n^*$, $CD_n^*$ получаются подстановками вида $x \mapsto x^{n_1}$ в соответствующие порождающие $T^*$-пространств $D_{p^l}^*$, $C_{p^l}^*$, $CD_{p^l}^*$ и применением коммутаторных соотношений. Из равенства (П.1) и включений $D_n^* \subset D_{p^l}^*$, $C_n^* \subset C_{p^l}^*$, $CD_n^* \subset CD_{p^l}^*$ непосредственно вытекает, что $W_n^* \subset W_{p^l}^*$.

Так как любой элемент из $D_n^*$ имеет степень, большую либо равную $n$, где $n > p^l$, то одночлен $x_1^{p^l}$ не лежит в $D_n^*$, т. е. включение $D_n^* \subset D_{p^l}^*$ строгое. Многочлен $c_{1,l}$ имеет степень $2p^l$, а любой многочлен из $C_n^*$ имеет степень, большую либо равную $2n$, где $n > p^l$, значит, включение $C_n^* \subset C_{p^l}^*$ строгое. Из аналогичных соображений следует строгость включений $CD_n^* \subset CD_{p^l}^*$ и $W_n^* \subset W_{p^l}^*$.

2. Покажем, что для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $T^*$-пространство $D_n^*$ порождается одночленом $x_1^n$. Достаточно показать справедливость утверждения для $n$-слова от двух переменных. Рассмотрим формулу (1.1) (см. раздел 1.1). В характеристике $p$ из этой формулы следует, что $x_1^n x_2^n = (x_1 x_2)^n$.

Если $p = 2$, $l = 1$, то $T^*$-пространство $D_n^*$ бесконечно базируемо. Действительно, предположив противное, получим согласно утверждению 1) теоремы 2.3.1, что $T$-пространство $D_2$ в алгебре $F^{(3)}$ конечно порождённое, что противоречит результатам [9].

3. Учитывая равенство (П.1), для доказательства равенства $W_n^* = D_n^* \oplus (C_n^* + CD_n^*)$ достаточно показать, что $D_n^* \cap (C_n^* + CD_n^*) = \{0\}$. Это пересечение ненулевое, так как в алгебре $F^{(3)}$ выполняется равенство $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$ для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, и имеют место включения $D_n^* \subset D_{p^l}^* \subset D_{p^l}$, $(C_n^* + CD_n^*) \subset (C_{p^l}^* + CD_{p^l}^*) \subset CD_{p^l}$.

4. В силу равенства $D_n^* = \{x_1^n\}^{T^*}$ система порождающих для $CD_n^*$ имеет вид $\{c_m(n)z_1^n \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Допустим, что $CD_n^* \subset C_n^*$. Тогда в алгебре $F^{(3)}$ согласно утверждению 2 теоремы 2.4.1 имеют место равенства $CD_n = CD_{p^l}$ и $C_n = C_{p^l}$. Отсюда следует, что $T$-пространство $CD_{p^l}$ лежит в $C_{p^l}$, что противоречит предложению 2.1.2 (см. также [19]). Таким образом, включение $CD_n^* \subset C_n^*$ не выполняется. Рассмотрим теперь многочлен $c_1(n)$. Этот многочлен имеет степень $2n$, а любой элемент из $CD_n^*$ имеет степень не ниже $3n$. Значит, $c_1(n)$ не лежит в $T^*$-пространстве $CD_n^*$, следовательно, включение $C_n^* \subset CD_n^*$ не выполняется.

Покажем теперь, что $CD_n^* \cap C_n^* \neq \{0\}$. Действительно, подставляя в $x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1, y_1] \in C_n^*$ вместо $x_1$ одночлен $x_1z_1$, получим в силу коммутаторных соотношений многочлен $z_1^{n-1}y_1^{n-1}[z_1, y_1]x_1^n + x^{n-1}y_1^{n-1}[x_1, y_1]z_1^n$. Этот многочлен, очевидно, лежит в $CD_n^*$.

5. Отметим, что одночлен $x_1^n$ нельзя получить путём $kT^*$-действий из остальных многочленов системы (П.2), лежащих в прямом слагаемом $C_n^* + CD_n^*$ (см. утверждение 3) этой теоремы), так как $x_1^n$ принадлежит другому прямому слагаемому $D_n^*$. Предположим, что система (П.2) является приводимой. Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$c_m(n) \in \{c_j(n), c_i(n)z_1^n \mid j \neq m,\ i \in \mathbb{N}\}^{T^*}$$

или

$$c_m(n)z_1^n \in \{c_i(n), c_j(n)z_1^n \mid j \neq m,\ i \in \mathbb{N}\}^{T^*}.$$

Из очевидных соображений степени линейная комбинация многочленов, полученных путём $kT^*$-действий из $c_m(n)z_1^n$, есть нуль в линейной комбинации многочленов, равной $c_m(n)$. Отсюда согласно теоремам о выравнивании (см. теоремы 1.2.1 и 1.2.2) получаем, что $c_{m,l} \in \{\ c_{j,l}, g_{j,l} \mid j \neq m\}^T$ или $g_{m,l} \in \{c_{i,l}, g_{j,l} \mid j \neq m,\ i \in \mathbb{N}\}^T$ в алгебре $F^{(3)}$, а это противоречит теореме 3.1.1 о независимости элементарных составляющих (см. также теорему 3.4.1 для случая $p = 2$, $l > 1$). Таким образом, система (П.2) неприводима, и следовательно, неприводимыми являются системы порождающих для $T^*$-пространств $C_n^*$ и $CD_n^*$.

6. Докажем, что выполняется равенство $W_n^* = D_n^*$. Для этого достаточно показать, что $c_1(n) \in D_n^*$. Рассмотрим многочлен $x_1^{2n_1}y_1^{2n_1} - (x_1y_1)^{2n_1} \in D_{2n_1}$. Преобразуем его, используя равенство $(x_1y_1)^2 = x_1^2y_1^2 - x_1y_1[x_1, y_1]$ и коммутаторные соотношения

$$\begin{aligned}
x_1^{2n_1}y_1^{2n_1} - (x_1y_1)^{2n_1} &= x_1^{2n_1}y_1^{2n_1} - \bigl((x_1y_1)^2\bigr)^{n_1} = \\
&= x_1^{2n_1}y_1^{2n_1} - (x_1^2y_1^2 - x_1y_1[x_1,y_1])^{n_1} = \\
&= x_1^{2n_1}y_1^{2n_1} - \bigl(x_1^{2n_1}y_1^{2n_1} - n_1x_1^{2(n_1-1)}y_1^{2(n_1-1)}x_1y_1[x_1,y_1]\bigr) = \\
&= n_1x_1^{2n_1-1}y_1^{2n_1-1}[x_1,y_1] = n_1c_1(n).
\end{aligned}$$

В силу соотношения $(n_1,2)=1$ получаем, что $c_1(n)\in D_n^*$. Отсюда следует включение $C_n^*+CD_n^*\subset D_n^*$. Так как любой элемент из $C_n^*+CD_n^*$ имеет степень, большую либо равную $2n$, то одночлен $x_1^n\in D_n^*$, очевидно, не лежит в $C_n^*+CD_n^*$. Значит, включение $C_n^*+CD_n^*\subset D_n^*$ строгое.

В силу $c_1(n)\in D_n^*$, система порождающих для $CD_n^*$ имеет вид $\{c_1(n)d_s(n)\mid s\in\mathbb{N}\}$. Тот факт, что $C_n$ и $CD_n$ не связаны никакими включениями и их пересечение ненулевое, доказывается рассуждениями, аналогичными приведённым в доказательстве утверждения 3) этой теоремы.

7. Из доказательства пункта 6) этой теоремы следует, что

$$c_1(n)=\frac{1}{n_1}(x_1^ny_1^n-(x_1y_1)^n),$$

где $(n_1,2)=1$. Учитывая это равенство, нетрудно убедиться, что каждый многочлен $c_i(n)$, $i\in\mathbb{N}$, из системы порождающих $T^*$-пространства $C_n^*$, рассмотренной в предыдущем утверждении теоремы, лежит в $T^*$-пространстве, порождённом системой (П.3). Следовательно, система (П.3) является системой порождающих для $T^*$-пространства $C_n^*+CD_n^*$. Допустим, что она приводима. Тогда найдётся такое $i\in\mathbb{N}$, что

$$c_1(n)z_1^n\cdots z_i^n\in\{c_1(n),c_1(n)z_1^n\cdots z_j^n\mid j<i\}^{T^*}.$$

Согласно равенству для $c_1(n)$ имеем

$$x_1^ny_1^nz_1^n\cdots z_i^n\in\{(x_1y_1)^nz_1^n\cdots z_i^n,\ c_1(n)z_1^n\cdots z_j^n\mid j<i\}^{T^*}.$$

Отсюда согласно тому же равенству получаем, что произведение $x_1^ny_1^nz_1^n\cdots z_i^n$ является линейной комбинацией многочленов, полученных путём $kT^*$-действий из произведений меньшего, чем $i+2$, числа $n$-х степеней переменных, что противоречит утверждению 2) этой теоремы. Таким образом, система (П.3) неприводима, и следовательно, неприводимыми являются системы порождающих для $T^*$-пространств $C_n^*$ и $CD_n^*$.

8. Пусть $r=p^lr_1$. Тогда $r>n$ означает, что $r_1>n_1$. Рассмотрим сначала случай $p>2$ или $p=2$, $l>1$. Осуществим в одночлен $x_1^n$ подстановку $x_1\mapsto x_1+x_2$. Так как $n=p^ln_1$, то, используя соотношения Фробениуса, получим многочлен $(x_1^{p^l}+x_2^{p^l})^{n_1}$. Выделим из него полиоднородный многочлен типа $(p^l(n_1-1),p^l)$. В силу коммутаторных соотношений он равен $n_1(x_1^{p^l})^{n_1-1}x_2^{p^l}$. Применим к нему подстановку $x_2\mapsto x_1^{r_1-n_1+1}$, получим $n_1x_1^{p^lr_1}$. Из $(n_1,p)=1$ следует, что $x_1^r\in D_n^*$, т. е. $D_r^*\subset D_n^*$.

Осуществим в многочлен $c_m(n)z_1^n \in CD_n^*$ подстановку $z_1 \mapsto z_1 + z_2$. Так как $n = p^l n_1$, то, используя соотношения Фробениуса, получим многочлен $c_m(n)(z_1^{p^l} + z_2^{p^l})^{n_1}$. Выделим из него полиоднородную компоненту типа $(p^l(n_1-1), p^l)$ по переменным $z_1$ и $z_2$. В силу коммутаторных соотношений эта компонента равна многочлену $n_1 c_m(n)(z_1^{p^l})^{n_1-1} z_2^{p^l}$. Применим к нему подстановку

$$z_2 \mapsto z_1^{r_1-n_1+1} x_1^{r_1-n_1} y_1^{r_1-n_1} \cdots x_m^{r_1-n_1} y_m^{r_1-n_1}.$$

Используя коммутаторные соотношения, получим $n_1 c_m(p^l r_1) z_1^{p^l r_1}$. Так как $(n_1, p) = 1$, имеем, что $c_m(r)z_1^r \in CD_n^*$, т. е. $CD_r^* \subset CD_n^*$.

Пусть теперь $r = qn$ и $(q,p) = 1$. Включение $C_r^* \subset C_n^*$ следует из того, что $c_m(r)$ для любого $m \in \mathbb{N}$ получается с помощью ряда подстановок $x_i \mapsto x_i^q$, $y_i \mapsto y_i^q$, $i = \overline{1,m}$, в многочлен $c_m(n)$ и применением коммутаторных соотношений. Из доказанных включений и из равенства (П.1) следует включение $W_r^* \subset W_n^*$. Строгость всех включений следует из очевидных соображений степени.

Рассмотрим случай $p = 2$, $l = 1$. Согласно утверждениям 2) и 6) этой теоремы $D_n^*$ порождается всеми одночленами $x_1^n \cdots x_s^n$, $s \in \mathbb{N}$, и $W_n^* = D_n^*$. Осуществим в $x_1^n$ подстановку $x_1 \mapsto x_1 + x_2$. Так как $n = 2n_1$, получим многочлен $(x_1^2 + x_2^2 + [x_1, x_2])^{n_1}$. Выделим из него полиоднородный многочлен типа $(2(n_1-1), 2)$. В силу коммутаторных соотношений он равен $n_1(x_1^2)^{n_1-1}x_2^2$. Применим к нему подстановку $x_2 \mapsto x_1^{r_1-n_1+1}$, получим $n_1 x_1^{2r_1}$, т. е. $n_1 x_1^r$. Из $(n_1, p) = 1$ следует, что $x_1^r \in D_n^*$. Остаётся применить эти рассуждения ко всем $x_i^n$ в одночлене $x_1^n \cdots x_s^n$. Таким образом, $D_r^* \subset D_n^*$.

Согласно утверждению 6) этой теоремы $CD_n^*$ порождается всеми многочленами $c_1(n)z_1^n \cdots z_s^n$, $s \in \mathbb{N}$. Осуществим в многочлен $c_1(n)z_1^n \cdots z_s^n \in CD_n^*$ подстановку $z_1 \mapsto z_1 + x_2$. Так как $n = 2n_1$, получим многочлен

$$c_1(n)(z_1^2 + x_2^2 + [z_1, x_2])^{n_1} z_2^n \cdots z_s^n.$$

Выделим из него полиоднородную компоненту типа $(2(n_1-1), 2)$ по переменным $z_1$ и $x_2$. В силу коммутаторных соотношений эта компонента равна многочлену $n_1 c_1(n)(z_1^2)^{n_1-1} x_2^2 z_2^n \cdots z_s^n$. Применим к нему подстановку

$$x_2 \mapsto z_1^{r_1-n_1+1} x_1^{r_1-n_1} y_1^{r_1-n_1}.$$

Используя коммутаторные соотношения, получим $n_1 c_1(2r_1) z_1^{2r_1} z_2^n \cdots z_s^n$, т. е. $n_1 c_1(r) z_1^r z_2^n \cdots z_s^n$. Так как $(n_1, p) = 1$, имеем, что $c_1(r) z_1^r z_2^n \cdots z_s^n \in CD_n^*$. Из доказанного выше в этом пункте следует, что $z_2^r \cdots z_s^r \in D_n^*$. Таким образом, $CD_r^* \subset CD_n^*$.

Доказательство включения $C_r^* \subset C_n^*$ дословно повторяет приведённое выше доказательство для случая, когда $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$. Снова все включения строгие, что следует из соображений степени. Отметим также, что все подстановки корректны в силу $r_1 > n_1$. $\square$

**Замечание П.1.1.** В утверждении 8) теоремы П.1.1 мы установили, что включения $D_r^* \subset D_n^*$, $CD_r^* \subset CD_n^*$ выполнены для $r$ и $n$, делящихся на $p^l$, и при условии $r > n$, а включение $C_r^* \subset C_n^*$ выполнено при этом, если только $r = nq$ и $(q, p) = 1$. Если при $r > n$ числа $r$ и $n$ не связаны отношением делимости, то несложно показать, что включение $C_n^* \subset C_r^*$ не выполняется и пересечение $C_n^* \cap C_r^*$ ненулевое. Открытым в этом случае остаётся вопрос о справедливости обратного включения $C_r^* \subset C_n^*$, если $r$ и $n$ делятся одновременно на $p^l$, но не делятся на $p^{l+1}$. Однако если $r$ делится на $p^s$, где $s > l$, и $r$ и $s$ по-прежнему не связаны отношением делимости, то несложно показать, что это включение не выполняется.

Также заметим, что при $r = nq$ условие $(q, p) = 1$ существенно для доказательства включения $C_r^* \subset C_n^*$. Если $(q, p) \neq 1$, то включение $C_r^* \subset C_n^*$ не выполняется. Предположим, что это не так. Тогда $r$ можно представить в виде $r = p^s q_1$, где $(q_1, p) = 1$ и $s > l$. В этом случае $C_r = C_{p^s}$ и $C_n = C_{p^l}$ в алгебре $F^{(3)}$ согласно утверждению 2 теоремы 2.4.1. Следовательно, выполняется включение $C_{p^s} \subset C_{p^l}$, что противоречит утверждению 3 теоремы 2.4.1. Обратное включение $C_n^* \subset C_r^*$ также не выполняется, это следует из очевидных соображений степени. Отсюда получаем, что $C_r^*$ и $C_n^*$ не связаны никакими включениями при условии $(q, p) \neq 1$, но легко убедиться, что их пересечение ненулевое.

Как следует из утверждений 6) и 8) теоремы П.1.1, $T^*$-пространство $W_n^*$ содержит $D_r^*$ для любых $r$ и $n$, значит, пересечение $W_r^* \cap W_n^*$ ненулевое. Можно показать, что при $r = nq$, $(q, p) \neq 1$ в случае $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$ $c_1(n) \notin W_r^*$, т. е. включение $W_n^* \subset W_r^*$ не выполняется. Вопрос о справедливости обратного включения $W_r^* \subset W_n^*$ в этом случае пока открыт.

Резюмируя теорему П.1.1 и замечание П.1.1, можно построить следующие диаграммы, выражающие связи между $W_n^*$ и $W_r^*$ и их подпространствами при $r = nq$. Заметим, что все включения строгие.

1. $(q, p) = 1$

Диаграмма 4

при $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$

$$\begin{array}{ccccccc} W_n^* & = & D_n^* & \oplus & CD_n^* & + & C_n^* \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ W_r^* & = & D_r^* & \oplus & CD_r^* & + & C_r^*, \end{array}$$

при $p = 2$, $l = 1$

$$\begin{array}{ccccccc} W_n^* & = & D_n^* & \supset & CD_n^* & + & C_n^* \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ W_r^* & = & D_r^* & \supset & CD_r^* & + & C_r^*. \end{array}$$

2. $(q, p) \neq 1$

Диаграмма 5

при $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$

$$\begin{array}{ccccccc} W_n^* & = & D_n^* & \oplus & CD_n^* & + & C_n^* \\ \not\cap & & \cup & & \cup & & \not\cap\not\cup \\ W_r^* & = & D_r^* & \oplus & CD_r^* & + & C_r^*, \end{array}$$

при $p = 2$, $l = 1$

$$\begin{array}{ccccccc} W_n^* & = & D_n^* & \supset & CD_n^* & + & C_n^* \\ & & \cup & & \cup & & \not\cap\not\cup \\ W_r^* & = & D_r^* & \supset & CD_r^* & + & C_r^*. \end{array}$$

Пусть $r$ и $n$ не связаны отношением делимости и $n$ делится на $p^l$, а $r$ делится на $p^s$. Тогда если $s = l$, то эта связь отображается диаграммой, аналогичной диаграмме 4, за исключением последних столбцов, где не ясно, выполнены ли указанные в диаграмме 4 включения, хотя известно, что обратные к ним не выполняются и пересечения ненулевые. Если $s > l$, то о последних столбцах известно, что никакие включения не выполняются и пересечения ненулевые.

Как было показано в разделе 2.3, $D_{p^l}$ — нётеров $kT$-модуль в алгебре $F^{(3)}$ для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$. Аналогичный факт имеет место и для $T^*$-пространства $D_n^*$ в $F^{(3)^*}$. Рассмотрим алгебру коммутативных многочленов $F^{(3)^*}/C^*$. Если $V$ — подмножество в $F^{(3)^*}$ и $f \in F^{(3)^*}$ — произвольный элемент, то их образы в $F^{(3)^*}/C^*$ будем обозначать через $\bar{V}$ и $\bar{f}$. В частности, $\overline{x_i}$ — образы переменных $x_i$ в этой фактор-алгебре. Таким образом, $F^{(3)^*}/C^* = k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$.

Справедливо следующее утверждение.

**Предложение П.1.1.** *Пусть $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $p$ и $l$, кроме $p = 2$, $l = 1$, $T^*$-пространство $D_n^*$ является нётеровым $kT^*$-модулем.*

**Доказательство.** В силу утверждения 1) теоремы П.1.1 выполнено включение $D_n^* \subset D_{p^l}^*$. В [19] было показано, что $T^*$-пространство $D_{p^l}^*$ изоморфно $T^*$-пространству $k[\overline{x_1}^{p^l}, \ldots, \overline{x_i}^{p^l}, \ldots]$, значит, $D_{p^l}^*$ изоморфно вкладывается в алгебру коммутативных многочленов $k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$, которая, в свою очередь, является нётеровым $kT^*$-модулем (см. [40]). Следовательно, $D_n^*$ является нётеровым $kT^*$-модулем. $\square$

Рассмотрим теперь мультипликативное строение $T^*$-пространства $W_n^*$, $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$. Пусть $p = 2$, $l = 1$, т. е. $n = 2n_1$ (случай $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$ рассмотрен в теореме П.1.2). Как показано в утверждении 6) теоремы П.1.1, $W_n^* = D_n^*$.

Для описания мультипликативного строения $D_n^*$ нам потребуются некоторые вспомогательные обозначения и утверждения. Очевидно, выполнено строгое включение $k[\overline{x_1}^n, \ldots, \overline{x_i}^n, \ldots] \subset k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$. Рассмотрим также подалгебру $\overline{D_n^*}$ в алгебре $k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$. Отметим, что для $n_1 = 1$ алгебры $k[\overline{x_1}^2, \ldots, \overline{x_i}^2, \ldots]$ и $\overline{D_2^*}$, как нетрудно убедиться, совпадают, причём выполнено строгое включение $\overline{D_2^*} \subset k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$. При $n_1 > 1$ рассмотренные выше алгебры связаны следующими строгими включениями:

Диаграмма 6

$$k[\overline{x_1}^n, \ldots, \overline{x_i}^n, \ldots] \quad \subset \quad \overline{D_n^*} \quad \subset \quad k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots].$$

В самом деле, строгость второго включения очевидна, а для доказательства строгости первого включения рассмотрим многочлен $(\overline{x_1} + \overline{x_2})^n$ из $\overline{D_n^*}$. Выделим из этого многочлена полиоднородную компоненту типа $(n-2, 2)$. Несложно проверить, что эта компонента равна $n_1(2n_1 - 1)\overline{x_1}^{n-2}\overline{x_2}^2$. Так как $(n_1, 2) = 1$, то $\overline{x_1}^{n-2}\overline{x_2}^2 \in \overline{D_n^*}$. Очевидно, этот одночлен не лежит в $k[\overline{x_1}^n, \ldots, \overline{x_i}^n, \ldots]$.

Обозначим через $k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots]$ алгебру, порождённую $n$-ми степенями переменных. Следующая диаграмма показывает взаимосвязи $k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots]$ и основных подпространств в $F^{(3)^*}$.

Диаграмма 7

$$\begin{array}{ccccc} C_n^* + CD_n^* + k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots] & \subset & D_n^* = W_n^* & \subset & F^{(3)^*} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ C_n^* + CD_n^* & \subset & D_n^* \cap C^* & \subset & C^* \end{array}$$

Все включения непосредственно следуют из полученных выше результатов. Рассмотрим образы элементов верхней строки диаграммы 7 в алгебре $F^{(3)^*}/C^*$. Ясно, что они совпадают с соответствующими элементами из диаграммы 6. Выше отмечалось, что $k[\overline{x_1}^2, \ldots, \overline{x_i}^2, \ldots] = \overline{D_2^*}$ при $n_1 = 1$. Тем не менее включение $C_2^* + CD_2^* + k[x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots] \subset D_2^*$ строгое. Действительно, $[x_1, x_2] \in D_2^*$, так как $(x_1+x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 = [x_1, x_2]$, но, очевидно, $[x_1, x_2] \notin C_2^* + CD_2^* + k[x_1^2, \ldots, x_i^2, \ldots]$. Отсюда и из строгости включений диаграммы 6 получаем, что все включения между элементами верхней строки диаграммы 7 строгие для всех $n = 2n_1$, $(n_1, 2) = 1$. Строгость остальных включений этой диаграммы, кроме $C_n^* + CD_n^* \subset \subset D_n^* \cap C^*$, достаточно очевидна.

**Предложение П.1.2.** *Включение $C_n^* + CD_n^* \subset D_n^* \cap C^*$ строгое.*

**Доказательство.** Осуществим в одночлене $x_1^n$ подстановку $x_1 \mapsto x_1 + x_2$, получим многочлен $(x_1^2 + x_2^2 + [x_1, x_2])^{n_1}$, который с помощью коммутаторных соотношений представляется в виде $(x_1^2 + x_2^2)^{n_1} + n_1(x_1^2 + x_1^2)^{n_1 - 1}[x_1, x_2]$. Выделим из этого многочлена полиоднородную компоненту типа $(2n_1 - 1, 1)$. Несложно проверяется, что эта компонента равна многочлену $n_1 x_1^{2n_1 - 2}[x_1, x_2]$, который можно представить, используя коммутаторные соотношения, в виде $n_1[x_1, x_2 x_1^{2n_1 - 2}]$. Так как $(n_1, 2) = 1$, многочлен $[x_1, x_2 x_1^{2n_1 - 2}]$ лежит в $D_n^*$. Ясно, что $[x_1, x_2 x_1^{2n_1 - 2}]$ также лежит в $T^*$-идеале $C^*$. Таким образом, $[x_1, x_2 x_1^{2n_1 - 2}] \in \in D_n^* \cap C^*$. Остаётся показать, что $[x_1, x_2 x_1^{2n_1 - 2}] \notin C_n^* + CD_n^*$. Это действительно так, поскольку $[x_1, x_2 x_1^{2n_1 - 2}]$ имеет степень $n$, а любой элемент из $C_n^* + CD_n^*$ имеет степень, большую либо равную $2n$. □

Для доказательства того, что $C_n^* + CD_n^*$ есть радикал алгебры

$$C_n^* + CD_n^* + k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots],$$

важным является следующее утверждение.

**Предложение П.1.3.** $k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots] \cap C^* = k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots] \cap (C_n^* + CD_n^*)$.

**Доказательство.** Включение

$$k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots] \cap (C_n^* + CD_n^*) \subset k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots] \cap C^*$$

очевидно. Остаётся показать, что выполнено обратное включение

$$k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots] \cap C^* \subset k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots] \cap (C_n^* + CD_n^*).$$

Пусть $f$ — произвольный многочлен, лежащий в $k[x_1^n, \ldots x_i^n, \ldots] \cap C^*$. С одной стороны, $f \in k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots]$, тогда по модулю $C_n^* + CD_n^*$ многочлен $f$ можно представить как сумму одночленов вида $\alpha x_1^{m_1 n} \cdots x_s^{m_s n}$, $\alpha \in k$, $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную полиоднородную компоненту фиксированного типа многочлена $f$, например $\alpha x_1^{m_1 n} \cdots x_s^{m_s n} + g(x_1, \ldots, x_s)$, где $g(x_1, \ldots, x_s) \in$ $\in C_n^* + CD_n^*$ — полиоднородный многочлен типа $(m_1 n, \ldots, m_s n)$. Выбранную компоненту для удобства обозначим через $f_1$. С другой стороны, $f \in C^*$, значит, $f_1 \in C^*$. Но любой многочлен из $C^*$, следовательно и многочлен $f_1$, является линейной комбинацией произведений коммутаторов, умноженных на одночлены. Подставляя 1 вместо всех переменных многочлена $f_1$, мы получим, что $\alpha = 0$. Таким образом, любая полиоднородная компонента многочлена $f$ лежит в $C_n^* + CD_n^*$, значит, $f \in C_n^* + CD_n^*$. Отсюда следует выполнение включения. $\square$

Учитывая утверждение 1) теоремы П.1.1, нетрудно убедиться, что $T^*$-пространство $W_n^*$ и его компоненты являются коммутативными $T^*$-подалгебрами в $F^{(3)^*}$ (см. также [19]). Следующее утверждение описывает их мультипликативное строение.

**Теорема П.1.2.** *Пусть $n = p^l n_1$, $(n_1, p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $p$ и $l$ алгебра $W_n^*$ коммутативна. Если $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$, то $W_n^* = D_n^* \oplus (C_n^* + CD_n^*)$, где $C_n^* + CD_n^*$ — радикал алгебры $W_n^*$, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса $p$, причём $W_n^*/(C_n^* + CD_n^*) \cong D_n^*$, а $D_n^*$ изоморфно вкладывается в алгебру коммутативных многочленов $k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$. Если $p = 2$, $l = 1$, то $D_n^* = W_n^*$ и $C_n^* + CD_n^*$, $D_n^* \cap C^*$ — радикалы алгебр $C_n^* + CD_n^* + k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots,]$, $D_n^*$, являющиеся ненильпотентными ниль-алгебрами индекса $p$, а фактор-алгебры $(C_n^* + CD_n^* + k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots,])/(C_n^* + CD_n^*)$ и $D_n^*/D_n^* \cap C^*$ изоморфны $k[\overline{x_1}^n, \ldots, \overline{x_i}^n, \ldots]$ и $\overline{D_n^*}$ соответственно.*

**Доказательство.** Уже отмечалось, что алгебра $W_n^*$ коммутативна для любых $p$ и $l$. Пусть $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$.

Ясно, что $C_n^* + CD_n^*$, $D_n^*$ — $T^*$-подалгебры $W_n^*$. Согласно утверждению 3) теоремы П.1.1 алгебра $W_n^*$ раскладывается в прямую сумму $T^*$-подпространств: $W_n^* = D_n^* \oplus (C_n^* + CD_n^*)$.

Рассмотрим $T^*$-алгебру $C_n^* + CD_n^*$, которая, как нетрудно убедиться, является также $T^*$-идеалом в алгебре $W_n^*$. Применяя рассуждения, аналогичные приведённым в доказательстве теоремы 4.1.2, получим, что $T^*$-алгебра $C_n^* + CD_n^*$ является ниль-алгеброй индекса $p$.

Рассмотрим многочлены $c_1(n)(x_i, y_i) = x_i^{n-1} y_i^{n-1} [x_i, y_i]$, $i = \overline{1, m}$, $m \in \mathbb{N}$. Их произведение $c_1(n)(x_1, y_1) \cdots c_1(n)(x_m, y_m)$, очевидно, лежит в $C_n^* + CD_n^*$. Предположим, что $c_1(n)(x_1, y_1) \cdots c_1(n)(x_m, y_m) = 0$. Тогда в алгебре $F^{(3)}$ также справедливо $c_1(n)(x_1, y_1) \cdots c_1(n)(x_m, y_m) = 0$. Осуществляя подстановку вида $x \mapsto x + 1$ во все переменные многочлена $c_1(n)(x_1, y_1) \cdots c_1(n)(x_m, y_m)$ и выделяя полилинейный многочлен, в результате получим $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$. Значит, $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m] = 0$, что противоречит лемме 1.1.2. Таким образом, ниль-алгебра $C_n^* + CD_n^*$ не является нильпотентной.

Нетрудно убедиться, что коммутативная ниль-алгебра $C_n^* + CD_n^*$ есть ниль-идеал алгебры $W_n^*$, причём фактор-алгебра $W_n^*/(C_n^* + CD_n^*)$ совпадает с точностью до изоморфизма с коммутативной алгеброй $D_n^*$, которая, согласно рассуждениям из доказательства предложения П.1.1, изоморфно вкладывается в алгебру коммутативных многочленов $k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$. Значит, $D_n^*$ не содержит делителей нуля и, следовательно, в ней нет нильпотентных элементов. Отсюда получаем, что $C_n^* + CD_n^*$ — максимальный ниль-идеал алгебры $W_n^*$. Тогда $C_n^* + CD_n^*$ — радикал этой алгебры.

Пусть $p = 2$, $l = 1$, тогда из утверждения 6) теоремы П.1.1 следует, что $W_n^* = D_n^*$. Применяя те же рассуждения, которые были приведены для случая $p > 2$ или $p = 2$, $l > 1$, получим, что $C_n^* + CD_n^*$, $D_n^* \cap C^*$ — ненильпотентные ниль-алгебры индекса 2. Нетрудно убедиться, что они являются ниль-идеалами в соответствующих алгебрах. Докажем, что эти ниль-идеалы максимальны. Для этого рассмотрим фактор-алгебры $(C_n^* + CD_n^* + k[x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots])/(C_n^* + CD_n^*)$ и $D_n^*/D_n^* \cap C^*$. Согласно предложению П.1.3 эти фактор-алгебры, очевидно, изоморфны соответствующим подалгебрам в алгебре $k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$ (см. диаграмму 6), где нет делителей нуля. Следовательно, в рассматриваемых фактор-алгебрах нет нильпотентных элементов. Отсюда получаем, что ниль-идеалы максимальны. Значит, $C_n^* + CD_n^*$ и $D_n^* \cap C^*$ являются радикалами соответствующих алгебр. $\square$

## П.2. Случай взаимно простых $n$ и $p$. Характеристика нуль

Строение $W_n^*$ как $T^*$-пространства в случае поля характеристики $p$ и взаимно простых $n$ и $p$, а также в случае поля характеристики 0, как будет видно из дальнейшего изложения, совпадает, а как алгебры несколько отличается.

Следующая теорема говорит о строении основных $T^*$-подпространств в $W_n^*$ и о связи между ними.

**Теорема П.2.1.** *Пусть характеристика поля равна $p$ и $(n, p) = 1$. Тогда*

1) *выполняется строгое включение $C_n^* + CD_n^* \subset D_n^*$, $T^*$-пространство $W_n^*$ совпадает с $T^*$-пространством $D_n^*$ и порождается одночленом $x_1^n$;*
2) *$C_n^* = \{c_1(n)\}^{T^*}$ и $CD_n^* = \{c_1(n)d_1(n)\}^{T^*}$. Эти $T^*$-пространства не связаны никакими включениями при $n > 1$, и их пересечение ненулевое;*
3) *если $r > n$, то выполняются строгие включения $D_r^* \subset D_n^*$, $CD_r^* \subset CD_n^*$;*
4) *если $r > n$ и $(r, p) = 1$, то выполняется строгое включение $C_r^* \subset C_n^*$.*

**Доказательство.** 1. Рассмотрим очевидное равенство $[x_1^n, y_1^n] = n^2 c_1(n)$. Так как $(n, p) = 1$, то $c_1(n) \in D_n^*$. Нетрудно убедиться, что $c_m(n)$ и $c_m(n)d_s(n)$ для любых $m, s \in \mathbb{N}$ есть линейные комбинации произведений $n$-х степеней переменных. Таким образом, получаем, что $C_n^* + CD_n^*$ лежит в $D_n^*$. Так как любой элемент из $C_n^* + CD_n^*$ имеет степень, большую либо равную $2n$, то одночлен $x_1^n \in D_n^*$, очевидно, не лежит в $C_n^* + CD_n^*$. Значит, включение $C_n^* + CD_n^* \subset D_n^*$ строгое. Из этого включения и из равенства (П.1) следует, что $W_n^* = D_n^*$.

Покажем, что $D_n^* = \{x_1^n\}^{T^*}$. Для этого достаточно доказать, что из $x_1^n$ некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями можно получить одночлен $x_1^n x_2^n$. Сначала покажем, что если $(n,p)=1$, то многочлен $x_1^{n-1}x_2^{n-1}[x_1,x_2]$ можно получить из $x_1^n$ некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями. Действительно, используя формулу бинома Ньютона, раскроем выражение $(x_1x_2+[x_1,x_2])^n$:

$$(x_1x_2+[x_1,x_2])^n = (x_1x_2)^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}(x_1x_2)^{n-1}[x_1,x_2] + \\ + \frac{n!}{2!(n-2)!}(x_1x_2)^{n-2}[x_1,x_2]^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!1!}x_1x_2[x_1,x_2]^{n-1} + [x_1,x_2]^n.$$

Применяя коммутаторные соотношения к правой части выражения, получим

$$(x_1x_2+[x_1,x_2])^n = (x_1x_2)^n + n(x_1x_2)^{n-1}[x_1,x_2].$$

Из коммутаторных соотношений следует, что

$$(x_1x_2)^{n-1}[x_1,x_2] = x_1^{n-1}x_2^{n-1}[x_1,x_2].$$

Значит,

$$x_1^{n-1}x_2^{n-1}[x_1,x_2] = \frac{(x_1x_2+[x_1,x_2])^n}{n} - \frac{(x_1x_2)^n}{n}.$$

Остаётся подставить правую часть последнего равенства в формулу (1.1).

2. Так как $x_1^n[x_2^n,y_2^n]\cdots[x_m^n,y_m^n] \in D_n^*$ и $D_n^* = \{x_1^n\}^{T^*}$, то из $[x_1^n,y_1^n]$ с помощью некоторых подстановок и $k$-линейных действий можно получить многочлен $[x_1^n[x_2^n,y_2^n]\cdots[x_m^n,y_m^n],y_1^n]$, который равен $[x_1^n,y_1^n]\cdots[x_m^n,y_m^n]$. Это произведение равно $n^m c_m(n)$. Отсюда в силу $(n,p)=1$ получаем, что $c_m(n) \in \{c_1(n)\}^{T^*}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, значит, $C_n^* = \{c_1(n)\}^{T^*}$. Учитывая, что $D_n^* = \{x_1^n\}^{T^*}$, получаем, что $CD_n^* = \{c_1(n)d_1(n)\}^{T^*}$.

Рассмотрим теперь многочлен $c_1(n)$. Он имеет степень $2n$, тогда как любой элемент из $CD_n^*$ при $n>1$ имеет степень, большую либо равную $3n$. Таким образом, $c_1(n)$ не лежит в $T^*$-пространстве $CD_n^*$, значит, включение $C_n^* \subset CD_n^*$ не выполняется. Обратное включение также не выполняется. В противном случае согласно утверждению 1 теоремы 2.4.1 (см. также [20]) $C_n = C_1$ и $CD_n = C$ в $F^{(3)}$. Следовательно, $T$-идеал $C$ лежит в $T$-пространстве $C_1$, что противоречит утверждению 4 теоремы 2.4.1.

Покажем теперь, что $CD_n^* \cap C_n^* \neq \{0\}$. Действительно, подставляя в $x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1] \in C_n^*$ вместо $x_1$ одночлен $x_1z_1$, получим в силу коммутаторных соотношений многочлен $z_1^{n-1}y_1^{n-1}[z_1,y_1]x_1^n + x^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1]z_1^n$. Этот многочлен, очевидно, также лежит в $CD_n^*$.

3. Напомним, что только в случае $p=2$ и $r=2r_1$, где $(r_1,2)=1$, $D_r^* = \{x_1^r\ldots x_s^r \mid s\in\mathbb{N}\}^{T^*}$, а в остальных случаях $D_r^* = \{x_1^r\}^{T^*}$. Поэтому для доказательства включения $D_r^* \subset D_n^*$ в первом случае нужно показать, что $x_1^r\cdots x_s^r \in \{x_1^n\}^{T^*}$ для любого $s\in\mathbb{N}$, а в остальных случаях достаточно показать, что $x_1^r \in \{x_1^n\}^{T^*}$. Для этого осуществим в одночлен $x_1^n \in D_n^*$ подстановку

$x_1 \mapsto x_1 + x_2$ и выделим полиоднородную компоненту типа $(n-1,1)$. Она равна многочлену $x_1^{n-1}x_2 + x_1^{n-2}x_2x_1 + \ldots + x_2x_1^{n-1}$. Подставим в этот многочлен вместо $x_2$ одночлен $x_1^{r-n+1}x_2^r \cdots x_s^r$ в первом случае, а в остальных случаях — одночлен $x_1^{r-n+1}$. В результате в первом случае согласно коммутаторным соотношениям получим одночлен $nx_1^r \cdots x_s^r$, а в остальных случаях — одночлен $nx_1^r$. Так как $(n,p)=1$, получаем, что $D_r^* \subset D_n^*$.

Для доказательства включения $CD_r^* \subset CD_n^*$ нужно рассмотреть следующие три случая. Первый случай: $(r,p)=1$. Тогда

$$CD_r^* = \{c_1(r)z_1^r = x_1^{r-1}y_1^{r-1}[x_1,y_1]z_1^r\}^{T^*}.$$

Второй случай: $p>2$ и $r$ делится на $p$. Тогда

$$CD_r^* = \{c_m(r)z_1^r = x_1^{r-1}y_1^{r-1}[x_1,y_1]\cdots x_m^{r-1}y_m^{r-1}[x_m,y_m]z_1^r \mid m \in \mathbb{N}\}^{T^*}.$$

Третий случай: $p=2$ и $r$ делится на 2. Тогда $CD_r^* = \{c_1(r)z_1^r \cdots z_s^r \mid s \in \mathbb{N}\}^{T^*}$. Применим подстановку $z_1 \mapsto z_1 + z_2$ к многочлену $x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1]z_1^n \in CD_n^*$ и выделим полиоднородный многочлен типа $(n,n,n-1,1)$, получим многочлен

$$x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1]z_1^{n-1}z_2 + x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1]z_1^{n-2}z_2z_1 + \ldots + \\ + x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1]z_2z_1^{n-1}.$$

В этот многочлен вместо $z_2$ в первом случае подставим одночлен

$$z_1^{r-n+1}x_1^{r-n}y_1^{r-n},$$

во втором случае — многочлен

$$z_1^{r-n+1}x_1^{r-n}y_1^{r-n}x_2^{r-1}y_2^{r-1}[x_2,y_2]\cdots x_m^{r-1}y_m^{r-1}[x_m,y_m],$$

а в третьем случае — одночлен

$$z_1^{r-n+1}z_2^r \cdots z_s^r x_1^{r-n}y_1^{r-n}$$

(подстановки корректны, так как $r>n$). Используя коммутаторные соотношения, в результате в первом случае получим многочлен $nc_1(r)z_1^r$, во втором случае — многочлен $nc_m(r)z_1^r$ и в третьем случае — многочлен $nc_1(r)z_1^r \cdots z_s^r$. Так как $(n,p)=1$, получаем, что $CD_r^* \subset CD_n^*$. Все включения строгие, что следует из очевидных соображений степени.

4. Покажем, что из $[x_1^n, y_1^n] \in C_n^*$ некоторыми подстановками и $k$-линейными действиями можно получить многочлен $c_1(r) = x_1^{r-1}y_1^{r-1}[x_1,y_1]$, порождающий $C_r^*$. Осуществим в $[x_1^n, y_1^n]$ подстановки $x_1 \mapsto x_1 + x_2$, $y_1 \mapsto y_1 + y_2$ и выделим полиоднородную компоненту типа $(n-1,1,n-1,1)$ по переменным $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$. Она равна многочлену

$$\frac{1}{n^2}[x_1^{n-1}x_2 + x_1^{n-2}x_2x_1 + \ldots + x_2x_1^{n-1}, y_1^{n-1}y_2 + y_1^{n-2}y_2y_1 + \ldots + y_2y_1^{n-1}].$$

Подставим в этот многочлен вместо $x_2$ и $y_2$ одночлены $x_1^{r-n+1}$ и $y_1^{r-n+1}$ соответственно (подстановки возможны, так как $r>n$). В результате получим многочлен $[nx_1^r, ny_1^r]$, который равен $n^2r^2c_1(r)$. Так как $(n,p)=1$ и $(r,p)=1$, отсюда следует, что $C_r^* \subset C_n^*$. Из очевидных соображений степени получаем, что это включение строгое. $\square$

**Замечание П.2.1.** Условие $(r,p) = 1$ в утверждении 4) теоремы П.2.1 существенно. В противном случае $r$ можно представить в виде $r = p^l q_1$, где $(q_1,p) = 1$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда $T$-пространство в алгебре $F^{(3)}$, порождённое многочленом $c_1(r)$, совпадает с $T$-пространством $C_{p^l}^{(1)}$, а $C_n$, порождённое $c_1(n)$, совпадает с $C_1^{(1)}$ (см. утверждение 1 первой теоремы о выравнивании) и, следовательно, выполняется включение $C_{p^l}^{(1)} \subset C_1^{(1)}$, что противоречит утверждению 2 теоремы 1.1.1.

Учитывая теорему П.2.1 и замечание П.2.1, можно построить следующие диаграммы, выражающие связи между $W_n^*$ и $W_r^*$ и их подпространствами при $r > n$, где $(n,p) = 1$ и $(r,p) = 1$. Заметим, что все включения строгие.

Диаграмма 8

$$\begin{array}{ccccccc} W_n^* & = & D_n^* & \supset & CD_n^* & + & C_n^* \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ W_r^* & = & D_r^* & \supset & CD_r^* & + & C_r^* \end{array}$$

**Замечание П.2.2.** В случае поля характеристики 0, как нетрудно проверить, имеют место аналоги теоремы П.2.1 и замечания П.2.1. Следовательно, связь между $W_n^*$ и $W_r^*$ и их компонентами также выражается диаграммой 8. Таким образом, ответ на вопрос о системе порождающих для $T^*$-пространства $W_n^*$ в $F^{(3)^*}$ как в случае поля характеристики $p$ и $(n,p) = 1$, так и в случае поля характеристики 0 совпадает: $W_n^* = D_n^* = \{x_1^n\}^{T^*}$, причём

$$C_n^* + CD_n^* = \{x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1],\, x_1^{n-1}y_1^{n-1}[x_1,y_1]z_1^n\}^{T^*}.$$

Рассмотрим теперь мультипликативное строение $T^*$-пространства $W_n^*$ над полем характеристики 0 или характеристики $p$, где $(n,p) = 1$. Отметим, что оно отличается от мультипликативного строения $W_n^*$, когда характеристика поля $p$ делит $n$. Так, в первом случае $W_n^*$ не является коммутативной алгеброй. В самом деле, допустим, что $[x_1^n, x_2^n] = 0$. Ясно, что это равенство выполнено и в алгебре $F^{(3)}$, содержащей алгебру $F^{(3)^*}$. После подстановок $x_1 \mapsto x_1 + 1$, $x_2 \mapsto x_2 + 1$ и линеаризации получим, что $[x_1, x_2] = 0$. Последнее равенство противоречит некоммутативности алгебры $F^{(3)}$. Из аналогичных соображений следует, что $CD_n^*$ не является коммутативной алгеброй, однако алгебра $C_n^*$ в силу коммутаторных соотношений является коммутативной.

Пусть для определённости поле имеет характеристику $p$, причём $(n,p) = 1$, $n > 1$. Случай поля характеристики 0 будет рассмотрен позже. Как и в предыдущем параграфе, нас интересуют следующие алгебры: $F^{(3)^*}/C^* = k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$ (алгебра коммутативных многочленов), $k[\overline{x_1}^n, \ldots, \overline{x_i}^n, \ldots]$ и $\overline{D_n^*}$. Они, очевидно, связаны следующими включениями:

Диаграмма 9

$$k[\overline{x_1}^n,\ldots,\overline{x_i}^n,\ldots] \quad \subset \quad \overline{D_n^*} \quad \subset \quad k[\overline{x_1},\ldots,\overline{x_i},\ldots].$$

Второе включение, очевидно, строгое. Рассмотрим теперь многочлен $(\overline{x_1}+\overline{x_2})^n$ из $\overline{D_n^*}$. Выделим полиоднородную компоненту типа $(n-1,1)$ этого многочлена, она равна $n\overline{x_1}^{n-1}\overline{x_2}$. Так как $(n,p)=1$, одночлен $\overline{x_1}^{n-1}\overline{x_2}$ принадлежит $\overline{D_n^*}$ и ясно, что он не лежит в $k[\overline{x_1}^n,\ldots,\overline{x_i}^n,\ldots]$. Отсюда следует строгость первого включения диаграммы 9.

Пусть $k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle$ — алгебра, порождённая $n$-ми степенями переменных. Рассмотрим сумму $C_n^*+CD_n^*+k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle$. Заметим, что $c_1(n)\in$ $\in k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle\cap(C_n^*+CD_n^*)$, т. е. это пересечение ненулевое. Следующая диаграмма показывает взаимосвязи $C_n^*+CD_n^*+k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle$ и основных подпространств в $F^{(3)^*}$:

Диаграмма 10

$$\begin{array}{ccccc}
C_n^*+CD_n^*+k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle & \subset & W_n^*=D_n^* & \subset & F^{(3)^*}\\
\cup & & \cup & & \cup\\
C_n^*+CD_n^* & \subset & W_n^*\cap C^* & \subset & C^*.
\end{array}$$

Все включения непосредственно следуют из полученных выше результатов. Строгость включений в столбцах и в нижней строке диаграммы 10, за исключением включения $C_n^*+CD_n^*\subset W_n^*\cap C^*$, достаточно очевидна. Рассмотрим образы элементов верхней строки диаграммы 10 в алгебре $F^{(3)^*}/C^*$. Ясно, что они совпадают с соответствующими элементами из диаграммы 9, следовательно, все включения в верхней строке диаграммы 10 строгие.

**Предложение П.2.1.** *Включение $C_n^*+CD_n^*\subset W_n^*\cap C^*$ строгое.*

**Доказательство.** Осуществим в одночлене $x_1^n$ подстановку $x_1\mapsto z_1+[x_1,y_1]$, получим многочлен $z_1^n+nz_1^{n-1}[x_1,y_1]$. Так как $(n,p)=1$, многочлен $z_1^{n-1}[x_1,y_1]$ лежит в $W_n^*$. Ясно, что $z_1^{n-1}[x_1,y_1]$ также лежит в $T^*$-идеале $C^*$. Таким образом, $z_1^{n-1}[x_1,y_1]\in W_n^*\cap C^*$. Остаётся показать, что $z_1^{n-1}[x_1,y_1]\notin C_n^*+CD_n^*$. Это действительно так, потому что $z_1^{n-1}[x_1,y_1]$ имеет степень $n+1$, а любой элемент из $C_n^*+CD_n^*$ имеет степень, большую либо равную $2n$. □

Важным для доказательства того, что $C_n^*+CD_n^*$ есть радикал алгебры $C_n^*+CD_n^*+k\langle x_1^n,\ldots,x_2^n,\ldots\rangle$, является следующее утверждение.

**Предложение П.2.2.** $k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle\cap C^*=k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle\cap(C_n^*+CD_n^*)$.

**Доказательство.** Включение

$$k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle\cap(C_n^*+CD_n^*)\subset k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle\cap C^*$$

очевидно. Остаётся показать, что верно и обратное включение. Пусть $f$ — произвольный многочлен, лежащий в $k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle\cap C^*$. С одной стороны,

$f \in k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle$. Тогда по модулю $C_n^* + CD_n^*$ многочлен $f$ можно представить как сумму одночленов вида $\alpha x_1^{m_1 n} \cdots x_s^{m_s n}$, $\alpha \in k$, $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную полиоднородную компоненту фиксированного типа многочлена $f$, например $\alpha x_1^{m_1 n} \cdots x_s^{m_s n} + g(x_1, \ldots, x_s)$, где $g(x_1, \ldots, x_s) \in C_n^* + CD_n^*$ — полиоднородный многочлен типа $(m_1 n, \ldots, m_s n)$. Выбранную компоненту для удобства обозначим через $f_1$. С другой стороны, $f \in C^*$, значит, $f_1 \in C^*$. Но любой многочлен из $C^*$, следовательно и многочлен $f_1$, является линейной комбинацией произведений коммутаторов, умноженных на одночлены. Подставляя 1 вместо всех переменных многочлена $f_1$, мы получим, что $\alpha = 0$. Таким образом, любая полиоднородная компонента многочлена $f$ лежит в $C_n^* + CD_n^*$, значит, $f \in C_n^* + CD_n^*$. Отсюда следует выполнение включения

$$k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle \cap C^* \subset k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle \cap (C_n^* + CD_n^*). \qquad \square$$

Очевидно, все элементы приведённой выше диаграммы 10 являются подалгебрами в $F^{(3)^*}$. Следующее утверждение описывает их мультипликативное строение.

**Предложение П.2.3.** *$C_n^* + CD_n^*$, $D_n^* \cap C^*$, $C^*$ — радикалы алгебр $C_n^* + CD_n^* + k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle$, $D_n^*$, $F^{(3)^*}$ соответственно, являющиеся ненильпотентными ниль-алгебрами индекса $p$ при $p > 2$ или индекса 4 при $p = 2$, причём фактор-алгебры $(C_n^* + CD_n^* + k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle)/(C_n^* + CD_n^*)$ и $D_n^*/D_n^* \cap C^*$ изоморфны $k[\overline{x_1}^n, \ldots, \overline{x_i}^n, \ldots]$ и $\overline{D_n^*}$ соответственно.*

**Доказательство.** Очевидно, что $C_n^* + CD_n^*$, $D_n^* \cap C^*$ — $T^*$-идеалы в $C_n^* + CD_n^* + k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle$, $D_n^*$ соответственно, а $C^*$ — $T^*$-идеал в $F^{(3)^*}$ по определению.

Применяя рассуждения, аналогичные приведённым в доказательстве теорем 4.1.2 и П.1.2 для случая $p > 2$, $l \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $l > 1$, получим, что $C_n^* + CD_n^*$, $D_n^* \cap C^*$, $C^*$ — ненильпотентные ниль-алгебры индекса $p$ при $p > 2$ или индекса 4 при $p = 2$.

Нетрудно убедиться, что $C_n^* + CD_n^*$, $D_n^* \cap C^*$, $C^*$ — ниль-идеалы в соответствующих алгебрах. Докажем, что эти ниль-идеалы максимальны. Для этого рассмотрим фактор-алгебры соответствующих алгебр по этим идеалам. Учитывая предложение П.2.2, можно заметить, что алгебры $(C_n^* + CD_n^* + k\langle x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots\rangle)/(C_n^* + CD_n^*)$, $D_n^*/D_n^* \cap C^*$ изоморфны соответствующим подалгебрам в алгебре коммутативных многочленов $k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$ (см. диаграмму 9), где нет делителей нуля. Следовательно, в рассматриваемых фактор-алгебрах нет нильпотентных элементов. Отсюда получаем, что ниль-идеалы максимальны. Значит, $C_n^* + CD_n^*$, $W_n^* \cap C^*$, $C^*$ являются радикалами соответствующих алгебр. $\square$

**Замечание П.2.3.** Можно показать, что каждый ниль-радикал соответствующей алгебры, указанный как в теореме П.1.2, так и в предложении П.2.3, совпадает с радикалом Джекобсона.

Рассмотрим теперь мультипликативное строение $T^*$-пространства $W_n^*$ в случае, когда поле имеет характеристику 0. Во многом оно остаётся аналогичным случаю, когда поле имеет характеристику $p$ и $(n,p)=1$. Выше было отмечено, что в обоих случаях $W_n^*$ и $CD_n^*$ не являются коммутативными алгебрами, однако алгебра $C_n^*$ коммутативна. Более того имеют место аналоги диаграмм 9 и 10, а также предложений П.2.1, П.2.2 и П.2.3.

Однако есть и особенности, например, радикалы $C_n^*+CD_n^*$, $D_n^*\cap C^*$, $C^*$ соответствующих алгебр являются ниль-алгебрами неограниченного индекса. Кроме того, в отличие от случая, когда поле имеет характеристику $p$ и $(n,p)=1$, имеется более подробное описание фактор-алгебры $D_n^*/D_n^*\cap C^*$. Для описания нам потребуется рассмотреть подалгебру $\overline{D_n^*}$ в алгебре $k[\overline{x_1},\ldots,\overline{x_i},\ldots]$. Связь $D_n^*$, $D_n^*\cap C^*$, $\overline{D_n^*}$ с упомянутыми выше $T^*$-пространствами отражена в диаграммах 9 и 10. Через $U$ будем обозначать множество одночленов от $\overline{x_i}$, полная степень которых больше или равна $n$. В силу того что поле имеет характеристику 0, любая полиоднородная компонента многочлена $f^n$ из $D_n^*$ лежит в $D_n^*$. Тогда $\overline{D_n^*}$ в алгебре $k[\overline{x_1},\ldots,\overline{x_i},\ldots]$, очевидно, совпадает с коммутативной алгеброй $k[U]$. Учитывая диаграммы 9 и 10, нетрудно убедиться, что фактор-алгебра $D_n^*/D_n^*\cap C^*$ изоморфна $\overline{D_n^*}=k[U]$.

**Замечание П.2.4.** В случае поля нулевой характеристики или поля характеристики $p$, где $(n,p)=1$, отображение

$$\varphi_n\colon F^{(3)^*}\to k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle,\quad x_i\mapsto x_i^n,$$

является изоморфизмом $k$-алгебр. Сюръективность очевидна, инъективность доказывается с помощью некоторых алгебро-геометрических соображений (см. [11]). Если $n$ делится на $p$, то отображение $\varphi_n$ не является изоморфизмом хотя бы потому, что алгебра $k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle$ в этом случае коммутативна.

## П.3. Список открытых вопросов

**Для $F^{(3)}$ в случае $p>2$.**

1. Из теоремы 2.3.2 следует, что $D_{p^{l+1}}$ — единственный максимальный подмодуль в $D_{p^l}$. Естественно возникает вопрос об аналоге этого утверждения для всех рассмотренных выше в диаграммах 1, 2 и 3 вертикальных бесконечных убывающих и возрастающих цепочек включений $T$-пространств.

2. Вопросы о простоте.

   1) Являются ли фактор-пространства, ассоциированные с убывающими цепочками включений $T$-пространств в самых нижних строках диаграмм 1, 2 и 3, простыми?

   2) $T$-пространство $\widehat{C^{(m)}}/\widehat{CD_p^{(m)}}$ по теореме 3.3.6 является простым $kT$-модулем, но для $C^{(m)}/CD_p^{(m)}$ ответ не известен.

3. В разделе 3.3 была приведена диаграмма
$$\begin{array}{ccc} C^{(m)} & \supset & C^{(m+1)} \\ \cup & & \cup \\ C_1^{(m)} & \supset & C_1^{(m+1)}. \end{array}$$
Ясно, что
$$C_1^{(m+1)} \subset C^{(m+1)} \cap C_1^{(m)}.$$
Верно ли равенство
$$C_1^{(m+1)} = C^{(m+1)} \cap C_1^{(m)}?$$
4. Представляется интересным нахождение базиса $T$-пространства $C_1$ как линейного пространства над полем $k$. От ответа на этот вопрос напрямую зависит решение следующего вопроса. Какова система порождающих для $D_p$-модуля $C_1$, а также $D_p$-модуля $\overline{C_1^{(m)}}$ (образ $C_1^{(m)}$ в $\overline{C^{(m)}} = C^{(m)}/C^{(m+1)}$)?

**Случай $p = 2$.**

5. В работе не исследована взаимосвязь между элементарными составляющими $CD_2^{(1,s)}$ из $T$-пространства $CD_2$ с $CD_2^{(m)}$ и другими элементарными составляющими $C_{2^l}^{(m)}$ и $CD_{2^l}^{(m)}$.
6. Теорема о мономиальности (см. теорему 1.3.1) доказывается с использованием соотношений Фробениуса. Поэтому вопрос о справедливости этой теоремы для $CD_2^{(m)}$ открыт, хотя для $C_2^{(m)}$ она имеет место.
7. Теорема о независимости элементарных составляющих (см. теорему 3.1.1) доказана для
$$\Lambda\big(C_{2^{l+1}}^{(m)}\big) = C_{2^l}^{(m)} + \sum_{i<m} CD_4^{(i)} + C^{(m+1)}$$
и
$$\Lambda\big(CD_{2^l}^{(m)}\big) = CD_{2^{l+1}}^{(m)} + \sum_{i<m} CD_4^{(i)} + C^{(m+1)},$$
но для
$$\Omega\big(C_{2^{l+1}}^{(m)}\big) = C_{2^l}^{(m)} + \sum_{i<m} CD_2^{(i)} + C^{(m+1)}$$
и
$$\Omega\big(CD_{2^l}^{(m)}\big) = CD_{2^{l+1}}^{(m)} + \sum_{i<m} CD_2^{(i)} + C^{(m+1)}$$
вопрос об аналоге этой теоремы остаётся открытым.
8. Какова линейная структура $T$-пространства $W_2$ (для сравнения см. предложение 1.3.1, где описана линейная структура $W_p$ при $p > 2$)?

**Для $F^{(3)^*}$.**

9. Вопросы о взаимосвязи между $W_n^*$ и $W_r^*$ и их компонентами, сформулированные в замечании П.1.1 и перед диаграммой 4.

**Общие вопросы и замечания.**

10. Можно заметить, что для доказательства утверждений используются подстановки определённого вида: например, линейные, мономиальные, переобозначение переменных на конечном числе мест и т. д. Хотелось бы выделить все используемые подстановки. Если они образуют подполугруппу $T^0$ в полугруппе $T$, то представляется весьма интересным вопрос об изучении различных классических (проективных, инъективных, свободных и т. д.) модулей над полугрупповой алгеброй $kT^0$.
11. Во введении отмечалось, что методы и результаты представленной работы могут быть использованы для дальнейшего построения структурной теории $T$-пространств не только в относительно свободной алгебре Грассмана, но и в других относительно свободных алгебрах, в частности соответствующих тождеству коммутатора длины $n$, $n > 3$.
12. По аналогии с разделом 4.2 можно продолжить изучение $F^{(3)^*}$ и его основных подпространств как модулей над $W_n^*$, $D_n^*$ и т. д.

# Список обозначений

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | множество натуральных чисел |
| $\mathbb{Z}$ | множество целых чисел |
| $k$ | бесконечное поле |
| $p$ | характеристика поля $k$ |
| $[x_1, x_2]$ | коммутатор $x_1x_2 - x_2x_1$ |
| $\binom{n}{m}$ | число сочетаний из $n$ элементов по $m$ |
| $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ | ядро, образ гомоморфизма $\varphi$ |
| $k[1, x_1^{p^l}, \ldots, x_i^{p^l}, \ldots]$ | алгебра коммутативных многочленов (с единицей), *11* |
| $k[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots]$ | алгебра коммутативных многочленов (без единицы), *12* |
| $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ | свободная ассоциативная алгебра с единицей, *13* |
| $k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ | свободная ассоциативная алгебра без единицы, *15* |
| $T$ | полугруппа эндоморфизмов (подстановок) алгебры $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$, *13* |
| $T^*$ | полугруппа эндоморфизмов (подстановок) алгебры $k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$, *15* |

| | |
|---|---|
| $kT$ | полугрупповая $k$-алгебра полугруппы $T$, *14* |
| $kT^*$ | полугрупповая $k$-алгебра полугруппы $T^*$, *15* |
| $\tau$ | элемент $kT$ или $kT^*$ |
| $f^\tau$ | образ многочлена $f$ относительно действия элемента $\tau$ |
| $S^T$ | $T$-пространство, порождённое подмножеством $S$ в некотором $T$-пространстве, *14*, *14* |
| $F^{(3)}$ $(F^{(3)^*})$ | унитарная (неунитарная) относительно свободная алгебра Грассмана, *14* |
| $\big[[x_1,x_2],x_3\big]=0$ | тождество коммутатора длины 3 (тройного коммутатора), тождество Грассмана, *14* |
| $T^{(3)}$ | $T$-идеал, порождённый тождеством Грассмана, *14* |
| $\Phi_2$ | аналог алгебры Грассмана, *15* |
| $h_{a,b}$, $c_a$, $d_b$ | многочлены, *17* |
| $c_{(a_i,a_i')}(x_i,y_i)$ | $i$-й блок многочлена $c_a$, *17* |
| $D_b$, $C_a$, $CD_{a,b}$ | $T$-подпространства в алгебре $F^{(3)}$, *18* |
| $W_n$ | $T$-пространство, порождённое в $F^{(3)}$ всевозможными $n$-словами, *7*, *18* |
| $W_n^*$ | $T^*$-пространство, порождённое в $F^{(3)^*}$ всевозможными $n$-словами, *7*, *18* |
| $d_s(n)$ | чисто степенной (диагональный) одночлен, *18* |
| $c_m(n)$ | чисто коммутаторный многочлен, *18* |
| $c_m(n)d_s(n)$ | коммутаторный многочлен, *18* |
| $D_n$, $C_n$, $CD_n$ | $T$-подпространства в $W_n$, *19* |
| $D_n^*$, $C_n^*$, $CD_n^*$ | $T^*$-подпространства в $W_n^*$, *19*, *71* |
| $C_1^*$, $C^*$ | $T^*$-пространство, $T^*$-идеал, порождённые коммутатором, *71* |
| $c_{m,l}$ | коммутаторный многочлен кратности $m$ уровня $l$, *19* |
| $g_{m,l}$ | многочлен $c_{m,l}z_1^{p^l}$, *19* |
| $D_{p^l}$, $C_{p^l}$, $CD_{p^l}$ | $T$-подпространства в $W_{p^l}$, *20* |
| $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$ | элементарные составляющие $T$-пространств $C_{p^l}$, $CD_{p^l}$ для любых $p$ и $l$, кроме $p=2$, $l=1$, *20* |
| $CD_2^{(1,s)}$ | элементарные составляющие $T$-пространства $CD_2$ для $p=2$, $l=1$, *20* |
| $c_{m,0}$ | коммутаторный многочлен кратности $m$ уровня 0, *20* |
| $C_1^{(m)}$, $C^{(m)}$ | $T$-пространство, $T$-идеал, порождённые многочленом $c_{m,0}$, *20* |
| $C_1$, $C$ | $T$-пространство, $T$-идеал, порождённые коммутатором, *20* |

| | |
|---|---|
| $c(x_1,\ldots,x_t)$ | многочлен, *20* |
| $\lambda(h_{\alpha,\beta})$, $\mu(h_{\alpha,\beta})$ | функции от многочлена $h_{\alpha,\beta}$, *27* |
| $\Delta$ | подсистема канонического базиса алгебры $F^{(3)}$, *34* |
| $\Delta_p$ | множество всех $p$-многочленов, *34* |
| $\Delta_1$ | множество 1-многочленов, лежащих в $\Delta$, *34* |
| $k\Delta_p$ | линейная оболочка $\Delta_p$, *34* |
| $(x^m)^{T^*}$ | не унитарно замкнутый $T^*$-идеал в $F^{(3)^*}$, *34* |
| $\mathcal{M}$ | произвольный элемент диаграммы 1, *46* |
| $\Omega(\mathcal{M})$ | $T$-пространство, *46* |
| $\hat{C}$ | фактор-$T$-пространство $C/C^{(m+1)}$, *48* |
| $\widehat{\mathcal{M}}$ | образ $\mathcal{M}$ в $\hat{C}$, *48* |
| $C^{(m)}_{p^{l+1}}/C^{(m)}_{p^l}$ | элементарный фактор, *49* |
| $CD^{(m)}_{p^l}/CD^{(m)}_{p^{l+1}}$ | элементарный фактор, *49* |
| $\overline{C_{p^l}}$, $\overline{CD_{p^l}}$ | фактор-$T$-пространства, *53* |
| $\overline{C^{(m)}_{p^l}}$, $\overline{CD^{(m)}_{p^l}}$ | образы $C^{(m)}_{p^l}$, $CD^{(m)}_{p^l}$ в $\overline{C_{p^l}}$, $\overline{CD_{p^l}}$, *53* |
| $\Lambda\big(C^{(m)}_{2^{l+1}}\big)$, $\Lambda\big(CD^{(m)}_{2^l}\big)$ | $T$-пространства, *59* |
| $ZF^{(3)}$ | центр алгебры $F^{(3)}$, *61* |
| $u(r_{i_1},\ldots,r_{i_l})$ | одночлен, *63* |
| $(S)$ | $T$-идеал в $W_p$, порождённый подмножеством $S$ в $W_p$, *67* |
| $\overline{C^{(m)}}$ | $D_p$-модуль $C^{(m)}/C^{(m+1)}$, *68* |
| $F^{(3)^*}/C^*$ | алгебра коммутативных многочленов (без единицы), *77* |
| $k[x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots]$ | подалгебра коммутативных многочленов в $F^{(3)^*}$, *78* |
| $k\langle x_1^n,\ldots,x_i^n,\ldots\rangle$ | подалгебра в $F^{(3)^*}$, *84* |
| $k[U]$ | коммутативная подалгебра в $F^{(3)^*}/C^*$, совпадающая с $\overline{D_n^*}$, *86* |

# Литература


[1] Аладова Е. В., Гришин А. В., Киреева Е. А. $T$-пространства. История вопроса, приложения и последние результаты // Чебышёвский сб. — 2004. — Т. 5, вып. 4 (12). — С. 39—57.

[2] Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. Фундам. напр. Т. 18. — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 117—240.

[3] Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фундамент. прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 47—66.

[4] Белов А. Я. Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — М., 2002.

[5] Белов А. Я. О кольцах, асимптотически близких к ассоциативным // Мат. тр. — 2007. — Т. 10, № 1. — С. 29—96.

[6] Белов А. Я. Ряды Гильберта для $T$-пространств // Успехи мат. наук. — В печати.

[7] Гришин А. В. О конечной базируемости систем обобщённых многочленов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 899—927.

[8] Гришин А. В. О конечной базируемости абстрактных $T$-пространств // Фундамент. прикл. мат. — 1995. — Т. 1, № 3. — С. 669—700.

[9] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости $T$-пространств и $T$-идеалов в характеристике 2 // Фундамент. прикл. мат. — 1999. — Т. 5. — С. 101—118.

[10] Гришин А. В. Структурные и алгоритмические вопросы в $T$-пространствах над полем характеристики $p > 0$ // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 3. — С. 175—176.

[11] Гришин А. В. О независимых системах в относительно свободных унитарных алгебрах // Фундамент. прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 69—71.

[12] Гришин А. В. О $T$-пространствах и связанных с ними понятиях и результатах // Фундамент. прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 5. — С. 77—84.

[13] Гришин А. В. On center of a relatively free Grassmann algebra // Междунар. конф. «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. Материалы конференции. — М., 2009. — С. 406—407.

[14] Гришин А. В. О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 4. — С. 191—192.

[15] Гришин А. В., Сурмина Л. М. О структуре некоторых $T$-пространств в относительно свободной алгебре Грассмана // Актуальные проблемы математики, информатики и образования. — М.: МПГУ, 2007. — С. 73—82.

[16] Гришин А. В., Сурмина Л. М. О $T$-алгебре $n$-слов // Междунар. конф. по алгебре и теории чисел, посвящённая 80-летию В. Е. Воскресенского. Тезисы докладов. — Самара: Универс групп, 2007. — С. 15—16.

[17] Гришин А. В., Сурмина Л. М. О $T$-пространствах $n$-слов над полем характеристики $p > 0$ // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 4 (376). — С. 145—146.

[18] Гришин А. В., Урбаханов С. В. О коразмерностях в пространствах 2-слов над полем характеристики 2 и свойствах экстремальности // Чебышёвский сб. — 2002. — Т. 3, вып. 2 (4). — С. 34—42.

[19] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О $(p, n)$-проблеме // Вестн. Самарск. гос. ун-та. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 35—55.

[20] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. Две теоремы о строении относительно свободной алгебры Грассмана // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 4. — С. 186—187.

[21] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О $T$-пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана // Мат. сб. — 2009. — Т. 200, № 9. — С. 41—80.

[22] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[23] Кемер А. Р. Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 1042—1059.

[24] Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26. — С. 597—641.

[25] Кемер А. Р. Тождества конечно порождённых алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54, №4. — С. 726—753.

[26] Киреева Е. А. О конечной порождённости вполне инвариантных подмодулей в алгебрах многочленов // Чебышёвский сб. Труды IV Междунар. конф. «Современные проблемы теории чисел и её приложения». — 2001. — Т. 2. — С. 54—60.

[27] Киреева Е. А. Предельные $T$-пространства // Фундамент. прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 135—159.

[28] Киреева Е. А., Красильников А. Н. О некоторых экстремальных многообразиях ассоциативных алгебр // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, вып. 4. — С. 542—558.

[29] Коуровская тетрадь: нерешённые вопросы теории групп. Вып. 14. — Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. СО АН СССР, 1967.

[30] Латышев В. Н. О сложности нематричных многообразий ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 2. — С. 149—183.

[31] Размыслов Ю. П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 83—113.

[32] Сурмина Л. М. О некоторых $T$-пространствах $n$-слов // Междунар. конф. по алгебре и теории чисел, посвящённая 80-летию В. Е. Воскресенского. Тезисы докладов. — Самара: Универс групп, 2007. — С. 47—48.

[33] Цыбуля Л. М. Теорема о независимости // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Междунар. науч. конф., посвящённая 100-летию проф. В. В. Вагнера. Тезисы докладов. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. — С. 138—140.

[34] Цыбуля Л. М. Теоремы о выравнивании и мономиальности в относительно свободной алгебре Грассмана // Фундамент. прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 5. — С. 197—218.

[35] Цыбуля Л. М. $T^*$-пространство $n$-слов в относительно свободной алгебре Грассмана без единицы // Деп. в ВИНИТИ 18.12.2008, № 975-В2008.

[36] Чирипов П. Ж., Сидеров П. Н. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981. — Т. 2. — С. 103—115.

[37] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых $T$-идеалов // Фундамент. прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 307—312.

[38] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых $T$-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191. — С. 143—160.

[39] Щиголев В. В. Конечная базируемость $T$-пространств над полями нулевой характеристики // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — Т. 65, № 5. — С. 191—224.

[40] Grishin A. V. On the finite basis property of $T$-spaces over a field of finite characteristic // Proc. of Moscow—Tainan Algebraic Workshop. — 1994. — P. 225—227.

[41] Grishin A. V. On non-Spechtianness of the variety of associative rings that satisfy the identity $x^{32} = 0$ // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. — 2000. — No. 6. — P. 50—51.

[42] Grishin A. V. The variety of associative rings which satisfy the identity $x^{32} = 0$ is not Specht // 12th Int. Conf. FPSAC'00 (Moscow 2000). Proceedings. — P. 686—691.

[43] Grishin A. V., Shchigolev V. V. On $T$-spaces and their applications // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 134, no. 1. — P. 1799—1878.

[44] Grishin A. V., Tsybulya L. M. Decomposition of the commutator quotient $T$-spaces into the direct sum of simple components // Междунар. алгебраическая конф., посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. — С. 302—303.

[45] Gupta C. K., Krasilnikov A. N. A non-finitely based system of polinomial identities which contains the identity $x^6 = 0$ // Quart. J. Math. — 2002. — Vol. 53. — P. 173—183.

[46] Okhitin S. V. Central polynomials of an algebra of second-order matrices // Moscow Univ. Math. Bull. — 1988. — Vol. 43, no. 4. — P. 49—51.

[47] Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — B. 52. — S. 557—589.

[48] Tsybulya L. M. Reduction to monomial substitutions // Междунар. алгебраическая конф., посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. — С. 367—368.