Кольца без кручения

Е. И. КОМПАНЦЕВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа без кручения, кольцо на группе, радикал кольца, абсолютный радикал абелевой группы.

Аннотация

Работа посвящена изучению взаимосвязи между свойствами кольца без кручения и строением его аддитивной группы. Описаны все умножения на редуцированных алгебраически компактных и на делимых абелевых группах без кручения. Найден абсолютный радикал Джекобсона и абсолютный ниль-радикал в ряде классов абелевых групп без кручения. Полученные результаты применяются для описания в рассматриваемых классах абелевых групп полупростых групп, а также групп, на которых любое ассоциативное кольцо является ниль-кольцом (нильпотентным кольцом, радикальным кольцом).

Abstract

E. I. Kompantseva, Torsion-free rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 8, pp. 95—143.

The aim of this paper is to study the correlation between the properties of rings and the structure of their additive groups. In this paper, all multiplications on reduced algebraically compact groups and on divisible torsion-free Abelian groups are described. Absolute Jacobson radicals and absolute nil-radicals in some classes of Abelian groups are found. Using these results, we will give a description of semisimple groups and also of groups on which every ring is a nilpotent ring (a nil-ring, a radical ring) in some concerned classes of Abelian groups.

Введение

Одним из направлений современной теории абелевых групп является изучение абелевой группы как аддитивной группы кольца. Для определения кольцевой структуры на абелевой группе G необходимо указать гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$, который называется умножением на G. Группа G с заданным на ней умножением определяет некоторое кольцо (не обязательно ассоциативное), аддитивная группа которого совпадает с G, это кольцо называется кольцом на группе G.

Впервые проблема исследования взаимосвязи между строением абелевой группы и свойствами колец на ней была сформулирована Бьюмонтом [3], который рассматривал кольца на прямых суммах циклических групп. Программа систематического исследования аддитивных структур колец была сформулирована Селе [5]. В дальнейшем этим исследованиям были посвящены работы Селе, Уиклесса, Винсонхалера, Ри, Уиснера, Фукса, Хэймо, Пирса, Редея, Лоувера, Цукермана и др. Серьёзное внимание теории аддитивных групп колец уделено в [2].

Задача изучения соотношений между свойствами кольца и строением его аддитивной группы весьма многогранна. При этом в классе периодических групп ряд проблем может быть легко решён. Дело в том, что отличительной чертой периодических групп является то, что кольцевые структуры на них полностью определяются умножениями на базисных подгруппах. Что касается групп без кручения, то даже если сама группа довольно проста, изучение свойств колец на ней требует больших усилий. Настоящая работа посвящена изучению колец на абелевых группах без кручения.

Первая часть посвящена вопросам, связанным с продолжением частичных умножений и построением колец на группах. Все группы, рассматриваемые в данной работе, абелевы, и слово «группа» здесь и везде в дальнейшем означает «абелева группа». В разделе 1 приводятся результаты о продолжении частичного умножения на группе до умножений на её делимой, сервантно инъективной и копериодической оболочках. Они показывают, что изучение колец на делимых, алгебраически компактных и копериодических группах может дать полезную информацию о свойствах колец с произвольной аддитивной группой (таким путём, например, получены некоторые результаты разделов 6—8). Эти факты определили приоритеты в выборе классов групп без кручения для исследования колец на них. Так, в разделе 1 даётся описание всех умножений на делимых группах без кручения, а в разделе 2 — описание всех умножений на алгебраически компактных группах.

Вторая часть работы посвящена изучению абсолютного радикала Джекобсона и абсолютного ниль-радикала группы без кручения. Под абсолютным радикалом Джекобсона (абсолютным ниль-радикалом) группы G понимается пересечение $R^*(G)$ (соответственно $N^*(G)$) радикалов Джекобсона (соответственно верхних ниль-радикалов) всех ассоциативных колец на G. Проблема изучения абсолютных радикалов сформулирована в [2, проблема 94]. Поскольку речь идёт о свойствах кольца, обусловленных строением его аддитивной группы, рассматриваемые вопросы представляют определённый интерес не только для теории абелевых групп, но и для теории колец.

Во многих работах по теории аддитивных групп колец ставятся следующие задачи: в данном классе абелевых групп описать группы, на которых любое ненулевое кольцо нильпотентно (радикально, полупросто и т. д.), и группы, на которых существует кольцо, являющееся нильпотентным (радикальным, полупростым и т. д.). Решить данные проблемы в некоторых классах абелевых групп без кручения — цель третьей части работы. Бьюмонт и Лоувер [4] сформулировали проблему изучения полупростых групп, т. е. групп, на которых существует полупростое кольцо. Ясно, что такие группы находятся среди групп с нулевым абсолютным радикалом Джекобсона (этим свойством обладают, например, нередуцированные группы без кручения), но при этом Эклоф и Мец [6] отмечают, что даже для такой простой группы, как прямая сумма аддитивных групп рациональных чисел и целых p-адических чисел, вопрос о существовании на ней полупростого кольца до последнего времени оставался открытым. В разделе 8 даётся описание полупростых групп в классе нередуцированных групп без кручения (откуда, в частности, следует отрицательный ответ на указанный вопрос из [6]). Описание абсолютных радикалов групп из рассматриваемых классов позволило в разделе 7 выделить в этих классах группы, на которых любое ассоциативное кольцо является ниль-кольцом (нильпотентным кольцом, радикальным кольцом и т. д.).

Список обозначений

(G,μ) — кольцо, определяемое группой G и умножением μ на ней;
$N(G,\mu)$ — верхний ниль-радикал кольца (G,μ);
$R(G,\mu)$ — радикал Джекобсона кольца (G,μ);
$\mathrm{h}_p(g)$ — p-высота элемента g;
$\mathrm{o}(g)$ — порядок элемента g;
$\langle g\rangle$ — циклическая группа, порождённая элементом g;
nG — множество всех элементов вида ng, где $g \in G$;
G^1 — первая ульмовская подгруппа группы G;
$\mathrm{t}(G)$ — тип однородной группы без кручения G;
$\mathrm{t}(g)$ — тип элемента g;
$\chi(g)$ — характеристика элемента g;
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел;
$\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, кольцо целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, поле рациональных чисел;
$\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с p;
J_p — группа целых p-адических чисел;
$\mathbb{Q}_p^*$ — кольцо целых p-адических чисел;
$U[X]$ — кольцо многочленов над ассоциативным кольцом U;
Ue — циклический модуль над ассоциативным кольцом U с образующим элементом e;
$|I|$ — мощность множества I;
$\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ — прямая сумма групп G_i $(i \in I)$;
$\prod\limits_{i\in I} G_i$ — прямое произведение групп G_i $(i \in I)$;

$\sum_{i\in I} g_i$ — элемент прямой суммы $\bigoplus_{i\in I} G_i$ в случае конечного множества I;

$(g_i)_{i\in I}$ — элемент прямого произведения $\prod_{i\in I} G_i$;

$A\otimes B$ — тензорное произведение групп A и B;

$\hat{G}$ — $\mathbb{Z}$-адическое пополнение группы G;

$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов группы G;

$\lim\limits_{n\to\infty}\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — предел последовательности Коши элементов группы G в $\mathbb{Z}$-адической топологии;

π_A — проекция группы $G = A\oplus B$ на подгруппу A.

Умножение μ на группе G часто будем обозначать знаками $\times$, $\circ$ и т. д., т. е. $\mu(g_1\otimes g_2) = g_1\times g_2$ для любых g_1 и g_2 из G. Кольцо, определяемое умножением $\times$ на группе G, верхний ниль-радикал и радикал Джекобсона этого кольца обозначаются соответственно $(G,\times)$, $N(G,\times)$, $R(G,\times)$. Прямые суммы и прямые произведения идеалов обозначаются так же, как прямые суммы и прямые произведения групп, но кольцевой смысл таких сумм и произведений оговаривается особо. Другие обозначения будем вводить по мере необходимости. Нумерация формул независимая в пределах каждого утверждения. За всеми определениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [1, 2].

I. Умножения на группе

1. Продолжения частичных умножений

Умножением на группе G называется отображение $G\otimes G\to G$. Группа G с заданным на ней умножением определяет кольцо (G,μ), называемое кольцом на группе G. Это кольцо будем обозначать $(G,\times)$, если $\mu(a\otimes b) = a\times b$ для всех $a, b\in G$. Под кольцом подразумевается необязательно ассоциативное (или коммутативное) кольцо. Если это не вызывает недоразумений, мы будем приписывать кольцу свойства его аддитивной группы (кольцо без кручения, делимое или редуцированное кольцо, сервантный идеал и т. п.).

В этом разделе рассмотрим проблему продолжения частичных умножений. Пусть C — подгруппа группы A. Отображение $\nu\colon C\otimes C\to A$ называется умножением из C в A. Продолжение этого отображения до отображения $\mu\colon A\otimes A\to A$ называется продолжением умножения ν до умножения на A. Например, часто бывает необходимо кольцо на группе C вложить в качестве подкольца в кольцо на группе A, содержащей C.

Приведём ряд утверждений из [2], на которые часто будем ссылаться в дальнейшем. В них показано, что кольцо без кручения может быть вложено в кольцо на делимой оболочке его аддитивной группы, единственное с точностью до изоморфизма, и что умножение на произвольной группе всегда продолжается до умножений на её сервантно инъективной и копериодической оболочках, причём такое продолжение единственно, если соответствующая оболочка является редуцированной.

Теорема 1.1 [2]. *Всякое кольцо без кручения (A, ν) может быть вложено как подкольцо в минимальное делимое кольцо без кручения (D, μ), единственное с точностью до изоморфизма.*

Напомним, что плотность подгруппы C в группе A означает делимость группы A/C.

Лемма 1.2 [2]. *Пусть A — сервантная плотная подгруппа редуцированной группы G. Тогда частичное умножение $\nu\colon A \otimes A \to G$ может быть продолжено до умножения $\mu\colon G \otimes G \to G$ не более чем одним способом.*

Другими словами, лемма утверждает, что всякое умножение на редуцированной группе полностью определяется своим ограничением на любой сервантной плотной подгруппе.

Теорема 1.3 [2]. *Пусть G — сервантно инъективная оболочка группы A. Всякое частичное умножение $\nu\colon A \otimes A \to G$ может быть продолжено до умножения $\mu\colon G \otimes G \to G$. Если G — редуцированная группа, то это продолжение единственно.*

Из сформулированной теоремы видно, что рассматриваемая ситуация представляет особый интерес, если сервантно инъективная оболочка редуцированна. Это имеет место, когда $A^1 = 0$.

Для копериодической оболочки имеет место точный аналог теоремы 1.3.

Теорема 1.4 [2]. *Всякое частичное умножения $\nu\colon A \otimes A \to G$, где G — копериодическая оболочка группы A, может быть продолжено до умножения $\mu\colon G \otimes G \to G$. Умножение μ единственно, если G — редуцированная группа.*

Как мы уже говорили, в связи с приведёнными результатами возникает необходимость в изучении колец на делимых, алгебраически компактных и копериодических (которые в случае групп без кручения являются алгебраически компактными) группах.

Класс делимых колец без кручения описывается без труда. Более того, можно описать все умножения на произвольной прямой сумме циклических модулей без кручения над кольцом с единицей.

Теорема 1.5. *Пусть $G = \bigoplus\limits_{i \in I} Ra_i$, где Ra_i — циклический модуль без кручения над кольцом с единицей R. Тогда для любого множества $\{\tau_{ij}^{(k)} \mid i, j, k \in I\}$ элементов из R, такого что для каждой фиксированной пары индексов i, j почти все $\tau_{ij}^{(k)}$ равны нулю, существует, и притом единственное, кольцо $(G, \times)$, в котором $a_i \times a_j = \sum\limits_k \tau_{ij}^{(k)} a_i$.*

Доказательство. Умножение $\times$ на G определяется следующим образом:

$$\sum_i x_i a_i \times \sum_i y_i a_i = \sum_k \Bigl(\sum_{i,j} \bigl(a_i y_i \tau_{ij}^{(k)} a_k \bigr) \Bigr).$$

Единственность этого умножения следует из дистрибутивности. Кольцо $(G, \times)$ ассоциативно тогда и только тогда, когда

$$\sum_k \tau_{ij}^{(k)} \tau_{kl}^{(m)} = \sum_k \tau_{ik}^{(m)} \tau_{jl}^{(k)}$$

при всех i, j, l, m. □

Описание колец на алгебраически компактных группах потребует бо́льших усилий, и мы посвятим этому следующий раздел.

2. Умножения на алгебраически компактной группе

В этом разделе даётся описание умножений на редуцированной алгебраически компактной группе. Редуцированная алгебраически компактная группа G однозначно представляется в виде $G = \prod\limits_p G_p$, где для каждого простого числа p группа G_p является p-адической алгебраически компактной группой, т. е. G_p — $\mathbb{Q}_p^*$-модуль, полный в своей p-адической топологии.

Предложение 2.1. *Пусть $G = \prod\limits_p G_p$, где для каждого p группа G_p является редуцированным модулем над кольцом $\mathbb{Q}_p^*$. Тогда при любом умножении $\times$ на группе G разложение $G = \prod\limits_p G_p$ является также разложением кольца $(G, \times)$ в прямое произведение идеалов.*

Доказательство. Пусть p — простое число. Тогда $G = G_p \oplus G'$, где $G' = \prod\limits_{q \neq p} G_q$. Покажем, что это разложение группы G является также и разложением в кольцевом смысле.

Пусть $g_1, g_2 \in G_p$. Тогда элемент $g_1 \times g_2$ лежит в подгруппе группы G, которая является q-делимой для всех простых чисел q, отличных от p. Так как G_p — максимальная подгруппа G с таким свойством, то $g_1 \times g_2 \in G_p$.

Пусть $g'_1, g'_2 \in G'$. Покажем, что $g_1 \times g'_1 = g'_1 \times g_1 = 0$ и $g'_1 \times g'_2 \in G$. Действительно, элементы $g_1 \times g'_1$ и $g'_1 \times g_1$ лежат в делимой подгруппе группы G, элемент $g'_1 \times g'_2$ содержится в её p-делимой подгруппе. Из редуцированности группы G и того, что G' — максимальная p-делимая подгруппа G, следуют нужные соотношения.

Пусть $a = (a_p)_p$, $b = (b_p)_p$ и $a \times b = c = (c_p)_p$. Покажем, что $c_p = a_p \times b_p$. В самом деле, если $a = a_p + a'$, $b = b_p + b'$, $c = c_p + c'$ ($a_p, b_p, c_p \in G_p$, $a', b', c' \in G'$), то $a \times b = a_p \times b_p + a' \times b' = c_p + c'$, где $a_p \times b_p \in G_p$, $a' \times b' \in G'$, откуда и получаем нужное равенство. □

Предложение 2.1 сводит исследование колец на редуцированной алгебраически компактной группе к изучению колец на её p-адических компонентах. Для описания умножений на p-адических алгебраически компактных группах нам понадобятся следующие определения.

Определение 2.2. Пусть I — множество индексов. Набор целых p-адических чисел $\{a_i \mid i \in I\}$ называется почти конечным, если

1) не более чем счётное число a_i $(i \in I)$ отлично от нуля;
2) для любого натурального числа n почти все a_i $(i \in I)$ делятся в $\mathbb{Q}_p^*$ на p^n.

Определение 2.3. Пусть $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — счётная последовательность целых p-адических чисел. Если последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится к целому p-адическому числу a по p-адической норме, то будем говорить, что этот ряд сходится и его сумма равна a.

Определение 2.4. Пусть дан почти конечный набор целых p-адических чисел $\{a_i \mid i \in I\}$. Занумеруем его ненулевые элементы натуральными числами, получим почти конечный набор $\{\bar{a}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Суммой ряда $\sum\limits_{i\in I} a_i$ будем называть сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k$ (заметим, что в силу условия 2) определения 2.2 этот ряд всегда сходится).

Определение 2.5. Пусть I — множество индексов. Обозначим через $\prod\limits_{i\in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$ прямое произведение циклических p-адических модулей с образующими элементами e_i. Подгруппу группы $\prod\limits_{i\in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$, состоящую из таких элементов $(a_i e_i)_{i\in I}$, что $\{a_i \mid i \in I\}$ является почти конечным набором целых p-адических чисел, назовём регулярной прямой суммой циклических p-адических модулей и обозначим $\widetilde{\sum\limits_{i\in I}} \mathbb{Q}_p^* e_i$. Элемент a этой регулярной прямой суммы будем обозначать $a = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} a_i e_i$ $(a_i \in \mathbb{Q}_p^*)$.

Каждая p-адическая алгебраически компактная группа A изоморфна p-адическому пополнению своего базисного подмодуля $B = \bigoplus\limits_{i\in I} \mathbb{Q}_p^* e_i$, где I — некоторое множество индексов [2, теорема 40.2], следовательно, A является регулярной прямой суммой циклических модулей: $A = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} \mathbb{Q}_p^* e_i$.

Теорема 2.6. *Пусть $A = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} \mathbb{Q}_p^* e_i$, τ_{ij} — элементы группы A $(i, j \in I)$, удовлетворяющие следующему условию: для любых $i, j \in I$ верно неравенство $\mathrm{o}(\tau_{ij}) \leqslant \leqslant \min\{\mathrm{o}(e_i), \mathrm{o}(e_j)\}$. Тогда существует, и притом единственное, умножение μ на A, при котором $\mu(e_i \otimes e_j) = \tau_{ij}$.*

Доказательство. Пусть $B = \bigoplus\limits_{i\in I} \langle e_i \rangle$. Нетрудно убедиться, что существует, и притом единственный, естественным образом определённый гомоморфизм

$B = \bigoplus\limits_{i\in I}\langle e_i\rangle$, при котором $\mu'(e_i\otimes e_j) = \tau_{ij}$ для любых $i,j\in I$. Так как группа A изоморфна p-адическому пополнению группы B, то по сформулированной выше теореме 119.3 из [2] μ' продолжается, и притом однозначно, до умножения μ на A. □

Лемма 2.7. *Пусть I — бесконечное множество, $A = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}}\mathbb{Q}_p^* e_i$, $a,b\in A$ и $\times$ — произвольное умножение на A. Тогда существует такое счётное подмножество $\bar I$ множества I, что подгруппа $\bar A = \widetilde{\sum\limits_{i\in \bar I}}\mathbb{Q}_p^* e_i$ группы A содержит элементы a, b и является подкольцом кольца $(A,\times)$.*

Доказательство. Пусть $a = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} a_i e_i$, $b = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} b_j e_j$ $(a_i, b_j\in\mathbb{Q}_p^*)$. Очевидно, существует такое счётное подмножество I_1 множества I, что $a,b\in \widetilde{\sum\limits_{i\in I_1}}\mathbb{Q}_p^* e_i$.

Пусть умножение $\times$ на A определяется элементами $\tau_{ij} = e_i\times e_j\in A$ $(i,j\in I)$. Обозначим через I_{ij} такое счётное подмножество множества I, что $\tau_{ij}\in\widetilde{\sum\limits_{k\in I_{ij}}}\mathbb{Q}_p^* e_k$. Положим $I_2' = \bigcup\limits_{i,j\in I_1} I_{ij}$ и $I_2 = I_1\cup I_2'$. Очевидно, I_2' и I_2 — счётные множества. Предположим теперь, что построено счётное множество I_{n-1} $(n = 2,3,\ldots)$. Определим счётные множества $I_n' = \bigcup\limits_{i,j\in I_{n-1}} I_{ij}$, $I_n = I_{n-1}\cup I_n'$. Получим возрастающую цепочку счётных множеств $I_1\subseteq I_2\subseteq\ldots\subseteq I_n\subseteq\ldots$, их объединение $\bar I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ также счётно.

Покажем, что $\bar A$ является подкольцом кольца $(A,\times)$. Пусть $i,j\in\bar I$. Тогда существует такое натуральное число n, что $i,j\in I_n$, и следовательно, имеют место включения $I_{ij}\subseteq I_{n'+1}\subseteq I_{n+1}\subseteq\bar I$. Значит, $\tau_{ij}\in\bar A$. Элементы τ_{ij} $(i,j\in\bar I)$ определяют кольцо на группе $\bar A$, являющееся подкольцом кольца $(A,\times)$. □

Лемма 2.8. *Пусть $A = \widetilde{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}}\mathbb{Q}_p^* e_i$, и пусть дано счётное множество*

$$\left\{b_i^{(m)}\;\middle|\; i,m\in\mathbb{N}\right\}$$

целых p-адических чисел, для которого выполняются следующие условия:

а) *для любого фиксированного $i\in\mathbb{N}$ последовательность $\left\{b_i^{(m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши в p-адической топологии;*

б) *для любого $t\in\mathbb{N}$ найдётся такое $n_t\in\mathbb{N}$, что для любых $i>n_t$ и $m\in\mathbb{N}$ справедливо $b_i^{(m)}\in p^t\mathbb{Q}_p^*$.*

Тогда

1) *выражения*

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}} b_i^{(m)} e_i\right\}_{m\in\mathbb{N}},\quad \widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}\Big(\lim_{m\to\infty}\{b_i^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}\Big)e_i$$

имеют смысл в группе A и выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}b_i^{(m)}e_i\right\}_{m\in\mathbb{N}}=\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}\Big(\lim_{m\to\infty}\big\{b_i^{(m)}\big\}_{m\in\mathbb{N}}\Big)e_i; \tag{1}$$

2) *выражения*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\big\{b_i^{(m)}\big\}_{m\in\mathbb{N}},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\big\{b_i^{(m)}\big\}_{m\in\mathbb{N}}$$

имеют смысл в $\mathbb{Q}_p^*$ и выполняется равенство

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\big\{b_i^{(m)}\big\}_{m\in\mathbb{N}}=\sum_{i=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\big\{b_i^{(m)}\big\}_{m\in\mathbb{N}}. \tag{2}$$

Доказательство. По условию а) для каждого $i\in\mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}_p^*$ существует предел $\lim\limits_{m\to\infty}\{b_i^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}=b_i$. Из условия б) следует, что последовательность целых p-адических чисел $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши. Поэтому правые части равенства (1) и (2) имеют смысл соответственно в A и $\mathbb{Q}_p^*$.

По условию б) последовательность целых p-адических чисел $\big\{b_i^{(m)}\ \big|\ i\in\mathbb{N}\big\}$ является почти конечной, и следовательно, при любом фиксированном $m\in\mathbb{N}$ в группе A определён элемент $\widetilde{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}}b_i^{(m)}e_i$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i^{(m)}$ сходится в $\mathbb{Q}_p^*$.

Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i^{(m)}=b^{(m)}$. Покажем, что последовательности $\Big\{\widetilde{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}}b_i^{(m)}e_i\Big\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\big\{b^{(m)}\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ являются последовательностями Коши в p-адической топологии на A и $\mathbb{Q}_p^*$ соответственно. Пусть $t\in\mathbb{N}$. Из условия а) имеем, что для любого $i\in\mathbb{N}$ найдётся $m'_i\in\mathbb{N}$, такое что для любых $m_1,m_2>m'_{it}$ справедливо $b_i^{(m_1)}-b_i^{(m_2)}\in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Из условия б) имеем, что для любых $i\in\mathbb{N}$ и $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ выполнено $b_i^{(m_1)}\in p^t\mathbb{Q}_p^*$, $b_i^{(m_2)}\in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Следовательно, $b_i^{(m_1)}-b_i^{(m_2)}\in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Полагая $m_0=\max\{m'_i\mid 1\leqslant i\leqslant n_t\}$, получим, что для любых $i\in\mathbb{N}$ и $m_1,m_2>m_i$ выполнено $b_i^{(m_1)}-b_i^{(m_2)}\in p^t\mathbb{Q}_p^*$, откуда будем иметь, что для любых $m_1,m_2>m_i$

$$\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}b_i^{(m_1)}e_i-\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}b_i^{(m_2)}e_i=\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}\big(b_i^{(m_1)}-b_i^{(m_2)}\big)e_i\in p^tA$$

и

$$b^{(m_1)}-b^{(m_2)}=\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{(m_1)}-\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{(m_2)}=\sum_{i=1}^{\infty}\big(b_i^{(m_1)}-b_i^{(m_2)}\big)\in p^t\mathbb{Q}_p^*.$$

Следовательно, пределы в левых частях равенств (1) и (2) имеют смысл соответственно в A и $\mathbb{Q}_p^*$.

Докажем равенство (1). Пусть

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}b_i^{(m)}e_i\right\}_{m\in\mathbb{N}}=\widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}}d_ie_i,$$

где $d_i \in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Зафиксируем натуральные числа t и i и покажем, что $b_i - d_i \in$ $\in p^t\mathbb{Q}_p^*$.

Из определения предела следует, что найдётся $m' \in \mathbb{N}$, такое что для любых $m > m'$ выполнено $b_i^{(m)} - d_i \in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Из определения b_i имеем, что найдётся $m'' \in \mathbb{N}$, такое что для любых $m > m''$ справедливо $b_i - b_i^{(m)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*$.

Полагая $m_0 = \max\{m', m''\}$, получим, что для всех $m > m_0$ выполняется $b_i^{(m)} - d_i \in p^t\mathbb{Q}_p^*$ и $b_i - b_i^{(m)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*$, откуда следует, что $b_i - d_i \in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Следовательно, $b_i = d_i$ при любом натуральном i, что доказывает равенство (1).

Докажем равенство (2). Пусть $t \in \mathbb{N}$. Обозначим $\lim\limits_{m\to\infty}\Big\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^{(m)}\Big\}_{m\in\mathbb{N}}$ через b, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\big\{b_i^{(m)}\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ через c и покажем, что $b - c \in p^t\mathbb{Q}_p^*$.

Имеем из определения b, что найдётся такое $m' \in \mathbb{N}$, что для любых $m > m'$ выполнено
$$b - \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(m)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*.$$
Из определения c следует, что найдётся $n' \in \mathbb{N}$, такое что для любых $n > n'$ справедливо
$$c - \sum_{i=1}^{n} b_i \in p^t\mathbb{Q}_p^*.$$
Из определения b_i $(i = 1, 2, \dots)$ получаем, что для любого $i \in \mathbb{N}$ найдётся $m_i \in \mathbb{N}$, такое что для любых $m > m_i$ выполнено $b_i - b_i^{(m)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Полагая $m'' = \max\{m_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n_t\}$, получим, что для всех $m > m''$
$$\sum_{i=1}^{n_t} b_i - \sum_{i=1}^{n_t} b_i^{(m)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*.$$
По условию б) найдётся $n > n_t$, такое что для всех $m > m''$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(m)} = \left(\sum_{i=1}^{n_t} b_i - \sum_{i=1}^{n_t} b_i^{(m)}\right) + \sum_{i=n_t+1}^{n} b_i - \sum_{i=n_t+1}^{\infty} b_i^{(m)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*.$$

Пусть $\bar{n} = \max\{n', n_t\}$, $\bar{m} = \max\{m', m''\}$. Тогда для любых $n > \bar{n}$ и $m > \bar{m}$
$$b - c = \left(b - \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(m)}\right) - \left(c - \sum_{i=1}^{n} b_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(m)} - \sum_{i=1}^{n} b_i\right) \in p^t\mathbb{Q}_p^*.$$
Следовательно, $b = c$. □

Следующая теорема вместе с предложением 2.1 даёт метод построения колец на редуцированных алгебраически компактных группах.

Теорема 2.9. *Пусть* $A = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}}\mathbb{Q}_p^* e_i$, $\tau_{ij} = \widetilde{\sum\limits_{k\in I}}\tau_{ij}^{(k)} e_k$ $(i, j \in I)$ — *элементы группы* A, *удовлетворяющие следующему условию: для любых* $i, j \in I$ *выполняется* *неравенство* $\mathrm{o}(\tau_{ij}) \leqslant \min\{\mathrm{o}(e_i), \mathrm{o}(e_j)\}$. *Тогда существует, и притом единственное, умножение* $\times$ *на* A, *при котором* $\mu(e_i \times e_j) = \tau_{ij}$. *Это умножение* $\times$ *определяется следующим образом. Если* $a = \widetilde{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}} a_i e_i$ *и* $b = \widetilde{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}} b_i e_i$ *— произвольные элементы из* A, *то*

1) *при любом* $k \in I$ *набор целых* p*-адических чисел* $\{a_i\, b_j \tau_{ij}^{(k)} \mid i, j \in I\}$ *является почти конечным*;
2) *набор целых* p*-адических чисел* $\{c_k \mid k \in I\}$, *где* $c_k = \sum\limits_{i,j\in I} a_i b_j \tau_{ij}^{(k)}$, *является почти конечным*;
3) $a \times b = \widetilde{\sum\limits_{k\in I}} c_k e_k$.

Доказательство. Существование и единственность умножения $\times$ на A следует из теоремы 2.6. Если множество I конечно, то доказательство второй части теоремы тривиально.

Пусть I — бесконечное множество. Тогда в силу леммы 2.7 имеем

$$a \times b = \widetilde{\sum_{i\in\bar{I}}} a_i e_i \times \widetilde{\sum_{i\in\bar{I}}} b_i e_i = \widetilde{\sum_{i\in\bar{I}}} d_i e_i \quad (d_i \in \mathbb{Q}_p^*),$$

где $\bar{I}$ — счётное подмножество множества I. Поэтому без потери общности можно считать множество I счётным. Для простоты положим $I = \mathbb{N}$.

Пусть $t \in \mathbb{N}$. Тогда только для конечного числа индексов $i, j \in \mathbb{N}$ элементы a_i и b_j не делятся на p^t. Следовательно, при любом натуральном числе k только конечное число членов набора $\left\{a_i b_j \tau_{ij}^{(k)} \mid i, j \in \mathbb{N}\right\}$ не делится на p^t в $\mathbb{Q}_p^*$, т. е. этот набор является почти конечным, и ряд $\sum\limits_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j \tau_{ij}^{(k)}$ сходится в $\mathbb{Q}_p^*$ при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$. Условие 1) доказано.

Покажем теперь, что выполняется условие 2). Пусть $t \in \mathbb{N}$. Тогда существуют такие натуральные числа i_t и j_t, что при всех $i > i_t$ справедливо $a_i \in p^t\mathbb{Q}_p^*$ и при всех $j > j_t$ справедливо $b_j \in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Так как $\widetilde{\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}} \tau_{ij}^{(k)} e_k$ — элемент регулярной суммы при любой паре натуральных чисел i, j, то для любых $i, j \in \mathbb{N}$ найдётся $k_{ij} \in \mathbb{N}$, такое что для всех $k > k_{ij}$ выполнено $\tau_{ij}^{(k)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*$. Полагая $k_t = \max\{k_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant i_t,\ 1 \leqslant j \leqslant j_t\}$, получим, что для всех $k > k_t$ $c_k = \sum\limits_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j \tau_{ij}^{(k)} \in p^t\mathbb{Q}_p^*$, т. е. $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ — почти конечный набор целых p-адических чисел.

Заметим, что для любого натурального $k > k_t$ и для любого натурального n конечная сумма $\sum\limits_{i=1;\, j=1}^{n} a_i b_j \tau_{ij}^{(k)} = c_k^{(n)}$ делится на p^t в $\mathbb{Q}_p^*$. Поэтому в силу 1) множество $\left\{c_k^{(n)} \mid k, n \in \mathbb{N}\right\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.6 и, очевидно, $\lim\left\{c_k^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = c_k$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

Докажем равенство 3). Покажем сначала, что $a_i e_i \times b_j e_j = a_i b_j \tau_{ij}$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$. Заметим, что если $a \in A$ и $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность целых p-адических чисел, то $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда $\{\alpha_i a\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши элементов группы A в p-адической топологии. В этом случае

$$\lim_{i\to\infty}\{\alpha_i a\}_{i\in\mathbb{N}} = \Big(\lim_{i\to\infty}\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}\Big)a.$$

Пусть

$$a_i = \lim_{k\to\infty}\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad b_j = \lim_{k\to\infty}\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}},$$

где $m_k, r_k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} a_ie_i \times b_je_j &= \Big(\lim_{k\to\infty}\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}\Big)e_i \times \Big(\lim_{k\to\infty}\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}\Big)e_j = \\ &= \lim_{k\to\infty}\{m_ke_i\}_{k\in\mathbb{N}} \times \lim_{k\to\infty}\{r_ke_j\}_{k\in\mathbb{N}} = \\ &= \lim_{k\to\infty}\{m_kr_k\tau_{ij}\}_{k\in\mathbb{N}} = \Big(\lim_{k\to\infty}\{m_kr_k\}_{k\in\mathbb{N}}\Big)\tau_{ij} = a_ib_j\tau_{ij}. \end{aligned}$$

Запишем элементы a и b в виде

$$a = \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\Big\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad b = \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{j=1}^{n} b_je_j\Big\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Тогда, используя лемму 2.8, получим

$$\begin{aligned} a\times b &= \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_ie_i \times \sum_{j=1}^{n} b_je_j\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{i=1;\,j=1}^{n}(a_ie_i\times b_je_j)\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{i=1;\,j=1}^{n} a_ib_j\tau_{ij}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{i=1;\,j=1}^{n} a_ib_j\Big(\widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}}\tau_{ij}^{(k)}e_k\Big)\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big\{\widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}}\Big(\sum_{i=1;\,j=1}^{n} a_ib_j\tau_{ij}^{(k)}\Big)e_k\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{n\to\infty}\Big\{\widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}}c_k^{(n)}e_k\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \\ &= \widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}}\Big(\lim_{n\to\infty}\{c_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}\Big)e_k = \widetilde{\sum_{k\in\mathbb{N}}}c_ke_k. \end{aligned}$$

Таким образом, получено нужное равенство. □

II. Абсолютные радикалы групп без кручения

Под абсолютным радикалом Джекобсона (абсолютным ниль-радикалом) группы G понимается пересечение радикалов Джекобсона (верхних ниль-радикалов) всех ассоциативных колец на G. Проблема описания абсолютных радикалов группы сформулирована в [2, проблема 94].

3. Абсолютные радикалы прямых сумм и прямых произведений групп

Цель данного раздела — изучить соотношения между абсолютными радикалами прямой суммы (прямого произведения) групп и абсолютными радикалами слагаемых (сомножителей). Указываются также некоторые общие свойства абсолютных радикалов.

Лемма 3.1. *Пусть $G = A \oplus B$. Тогда*

$$R^*(G) \subseteq R^*(A) \oplus R^*(B), \quad N^*(G) \subseteq N^*(A) \oplus N^*(B).$$

Доказательство. Пусть $g = a + b \in G$ ($a \in A$, $b \in B$). Допустим, что $g \in R^*(G)$ и $g \notin R^*(A) \oplus R^*(B)$. Пусть, например, $a \notin R^*(A)$, т. е. существует ассоциативное умножение μ на A, при котором $a \notin R(A, \mu)$. Определим умножение $\times$ на G следующим образом: для любых $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$

$$(a_1 + b_1) \times (a_2 + b_2) = \mu(a_1 \otimes a_2).$$

Пусть $(a)_A$ — идеал, порождённый элементом a в кольце $(A, \times)$, $(g)_G$ — идеал, порождённый элементом g в кольце $(G, \times)$. Если $u \in (a)_A$, то $u = v + mb$, где $v \in (g)_G$, m — некоторое целое число. Поскольку $g \in R^*(G)$, то $g \in R(G, \times)$ и, значит, существует элемент $v' \in G$, квазиобратный к элементу v в кольце $(G, \times)$. Тогда в этом кольце элемент $v' - mb$ является квазиобратным к элементу u:

$$u + (v' - mb) - u \times (v' - mb) = v + v' - v \times v' = 0.$$

Следовательно, $(a)_A \subseteq R(G, \times) \cap A$. Но так как A является идеалом кольца $(G, \times)$, имеет место равенство $R(G, \times) \cap A = R(A, \times)$ [1, § 7, теорема 1], и поэтому $a \in R(A, \times)$, что противоречит выбору элемента a. Следовательно, $R^*(G) \subseteq R^*(A) \oplus R^*(B)$.

Пусть теперь $g \notin N^*(A) \oplus N^*(B)$. Допустим, $a \notin N^*(A)$, т. е. существует такое ассоциативное умножение μ на A, что $a \notin N(A, \mu)$. Определим умножение $\times$ на G так же, как выше. Так как $a \notin N(A, \mu)$, то существует такой элемент $u \in (a)_A$, что $u^n \neq 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ (u^n — степень элемента u в кольце (A, μ)). Как и раньше, $u = v + mb$ ($v \in (g)_G$, $m \in \mathbb{Z}$). Нетрудно убедиться, что $v^n = (u - mb)^n = u^n \neq 0$ при любом натуральном $n \geqslant 2$ (v^n — степень элемента v в кольце $(G, \times)$), т. е. $(g)_G$ не является ниль-идеалом в кольце $(G, \times)$. Значит, $g \notin N^*(G)$, поэтому $N^*(G) \subseteq N^*(A) \oplus N^*(B)$. □

Следующий пример показывает, что обратные включения верны не всегда.

Пример 3.2. Пусть $G = A \oplus D$, где A — группа без кручения ранга 1 неидемпотентного типа, D — делимая группа без кручения счётного ранга. Тогда $R^*(A) = A$ (теорема 6.5), $R^*(D) = 0$, $R^*(A \oplus D) = 0$ (теорема 4.2). Таким образом, $R^*(A) \oplus R^*(D)$ не содержится в $R^*(A \oplus D)$.

Теорема 3.3. *Для любого множества индексов I и для любого семейства групп $\{G_i \mid i \in I\}$ имеют место включения*

$$N^*\Big(\prod_{i\in I} G_i\Big) \subseteq \prod_{i\in I} N^*(G_i), \quad N^*\Big(\bigoplus_{i\in I} G_i\Big) \subseteq \bigoplus_{i\in I} N^*(G_i),$$
$$R^*\Big(\prod_{i\in I} G_i\Big) \subseteq \prod_{i\in I} R^*(G_i), \quad R^*\Big(\bigoplus_{i\in I} G_i\Big) \subseteq \bigoplus_{i\in I} R^*(G_i).$$

Доказательство. Докажем, что $N^*\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big) \subseteq \prod\limits_{i\in I} N^*(G_i)$. Пусть $g = (g_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} G_i$, $g \notin \prod\limits_{i\in I} N^*(G_i)$, т. е. существует такой индекс $j \in I$, что $g_i \notin N^*(G_j)$. Выделяя группу G_j прямым слагаемым в группе $\prod\limits_{i\in I} G_i$ и применяя включение из леммы 3.1, получим, что $g \notin N^*\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big)$, и значит, $N^*\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i\Big) \subseteq \prod\limits_{i\in I} N^*(G_i)$.

Остальные включения доказываются аналогично. □

Лемма 3.4. *Пусть A — вполне характеристическая подгруппа группы G и $\varphi\colon G \to G/A$ — естественный эпиморфизм. Тогда*

1) *если $A \subseteq R^*(G)$, то $\varphi^{-1}[R^*(G/A)] \subseteq R^*(G)$;*
2) *если $A \subseteq N^*(G)$, то $\varphi^{-1}[N^*(G/A)] \subseteq N^*(G)$.*

Доказательство. Пусть μ — ассоциативное умножение на G.

1. Если не существует неприводимого модуля над кольцом (G,μ), то $R(G,\mu) = G$ и, следовательно, $\varphi^{-1}[R^*(G/A)] \subseteq R(G,\mu)$. Пусть S — неприводимый модуль над кольцом (G,μ) с модульной композицией $\eta\colon S\otimes G \to S$. Так как A является идеалом кольца (G,μ), содержащимся в его радикале Джекобсона, то определено фактор-кольцо $(G/A,\mu)$ и S является неприводимым $(G/A,\mu)$-модулем с модульной композицией $\eta'\colon S\otimes G/A \to S$, определяемой следующим образом: для любых $s\in S$ и $g \in G$
$$\eta'\big(s\otimes\varphi(g)\big) = \eta(s\otimes g).$$
Тогда
$$\eta(S\otimes\varphi^{-1}[R^*(G/A)]) = \eta'(S\otimes R^*(G/A) = 0.$$
Следовательно, $\varphi^{-1}[R^*(G/A)] \subseteq R(G,\mu)$.

Так как умножение μ на G произвольно, получаем, что $\varphi^{-1}[R^*(G/A)] \subseteq R^*(G)$.

2. Пусть $g \in \varphi^{-1}[N^*(G/A)]$. Тогда $\varphi(g) \in N^*(G/A)$. Так как A является идеалом кольца (G,μ), то определено фактор-кольцо $(G/A,\mu)$, причём φ является кольцевым гомоморфизмом кольца (G,μ) на $(G/A,\mu)$.

Пусть $(g)_\mu$ — идеал, порождённый элементом g в кольце (G,μ), $\big(\varphi(g)\big)_\mu$ — идеал, порождённый элементом $\varphi(g)$ в кольце $(G/A,\mu)$. Пусть $u\in(g)_\mu$. Тогда $\varphi(u) \in \big(\varphi(g)\big)_\mu \subseteq N(G/A,\mu)$. Следовательно, существует такое натуральное число n, что $[\varphi(u)]^n = \varphi(u^n) = 0$ (здесь $[\varphi(u)]^n$ — степень элемента $\varphi(u)$ в кольце $(G/A,\mu)$; u^n — степень элемента u в кольце (G,μ)). Значит, $u^n \in A \subseteq N(G,\mu)$, поэтому существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $u^{mn} = 0$. Следовательно, $(g)_\mu$ — ниль-идеал кольца (G,μ), и значит, $g \in N^*(G)$, откуда и следует нужное включение. □

Предложение 3.5. *Пусть G — такая группа, что $N^* = N^*(G)$ и $R^* = R^*(G)$ — её вполне характеристические подгруппы. Тогда $N^*(G/N^*) = 0$ и $R^*(G/R^*) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon G \to G/R^*$, $\psi\colon G \to G/N^*$ — естественные эпиморфизмы. Тогда по лемме 3.4 $\varphi^{-1}[R^*(G/R^*)] \subseteq R^*(G) = R^*$ и $\psi^{-1}[N^*(G/N^*)] \subseteq N^*(G) = N^*$. Следовательно, $R^*(G/R^*) = 0$ и $N^*(G/N^*) = 0$. □

Замечание 3.6.

1. В лемме 3.4 (предложении 3.5) условие вполне характеристичности подгруппы A (подгрупп N^* и R^*) можно заменить следующим: подгруппа A (подгруппы N^* и R^*) является идеалом в любом ассоциативном кольце на группе G.
2. Во всех рассмотренных ниже классах групп абсолютный ниль-радикал и абсолютный радикал Джекобсона являются вполне характеристическими подгруппами. В общем случае вопрос, являются ли абсолютные радикалы группы G её вполне характеристическими подгруппами, остаётся открытым.

Теорема 3.7. *Пусть группа G не имеет ненулевых делимых гомоморфных образов без кручения. Тогда $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$.*

Доказательство. Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G, S — неприводимый $(G, \times)$-модуль. Тогда существует модулярный максимальный правый идеал I кольца $(G, \times)$, такой что аддитивная группа S изоморфна фактор-группе G/I [1].

Так как модуль S неприводим и для любого простого числа p подгруппа pS является подмодулем модуля S, то возможны следующие случаи.

1. $pS = 0$ для некоторого p. Тогда идеал $\bigcap_p pG$ кольца $(G, \times)$ аннулирует модуль S, и следовательно, $\bigcap_p pG \subseteq R(G, \times)$.

2. $pS = S$ для всех p, т. е. группа S делима. Так как $S \cong G/I$, а группа G не имеет ненулевых делимых гомоморфных образов без кручения, то S — периодическая группа. Так как для любого p подгруппа $S[p]$ является подмодулем модуля S, то $S = 0$, что противоречит неприводимости модуля S. Таким образом, $\bigcap_p pG \subseteq R(G, \times)$ и $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$, так как умножение $\times$ на G произвольно. □

Замечание 3.8. Включение $R^*(G) \subseteq \bigcap_p pG$ выполняется не для всех групп G, удовлетворяющих условию теоремы 3.7. Например, если G — группа без кручения ранга 1 неидемпотентного типа, то, очевидно, G не имеет нетривиальных гомоморфных образов без кручения. Ясно также, что группа G является редуцированной, и следовательно, $\bigcap_p pG \neq G$. Однако в силу теоремы 6.5 имеет место равенство $R^*(G) = G$.

4. Абсолютные радикалы нередуцированной группы

В этом разделе описаны абсолютные радикалы групп, содержащих ненулевую делимую подгруппу без кручения. Далее вопрос об описании абсолютных радикалов сводится к исследованию абсолютных радикалов редуцированных групп. Полученное описание позволяет в разделе 8 свести вопрос о том, при каких условиях любое ассоциативное кольцо на группе G является ниль-кольцом (радикальным кольцом), к случаю редуцированных групп без кручения.

Лемма 4.1. *Если G — смешанная группа, то $R^*(G) \cap T(G) = \bigcap\limits_p pT(G)$.*

Доказательство. Пусть $g \in T(G) \setminus \Big(\bigcap\limits_p pT(G)\Big)$. Тогда существует простое число p, не делящее g. Элемент g представим в виде $g = b + b'$, где $b \in T_p(G)$, $b' \in \bigoplus\limits_{q \neq p} T_q(G)$ и b не делится на p. Докажем, что $g \notin R^*(G)$.

Пусть n — такое натуральное число, что $p^n b = p^{n+c} b_1$ для некоторого элемента $b_1 \in G$ и некоторого натурального числа c, и $\mathrm{h}_p(p^m b) = m$ для всех целых неотрицательных $m < n$. Тогда $b = p^c b_1 + t$, где $t \in G$, $p^n t = 0$.

Нетрудно убедиться, что для любого целого неотрицательного числа $m < n$ выполняется равенство $\mathrm{h}_p(p^m t) = m$. Значит, $\langle t\rangle$ — сервантная подгруппа группы G, и следовательно, $G = \langle t\rangle \oplus G'$ для некоторой подгруппы G' группы G.

Пусть $b_1 = lt + b_1'$ ($l \in \mathbb{Z}$, $b_1' \in G'$). Тогда

$$g = p^c b_1 + t + b' = (p^c l + 1)t + (p^c b_1' + b'),$$

где $p^c l + 1 \in \mathbb{Z}$, $p^c b_1' + b' \in G'$.

Так как $R^*(\langle t\rangle) = p\langle t\rangle$ [2, следствие 120.7], то по лемме 3.1

$$R^*(G) \subseteq R^*(\langle t\rangle) \oplus R^*(G') = p\langle t\rangle \oplus R^*(G').$$

Следовательно, $g \notin R^*(G)$, поэтому

$$R^*(G) \cap T(G) \subset \bigcap_p pT(G).$$

Обратное включение следует из того, что $\bigcap\limits_p pT(G)$ является ниль-идеалом в любом кольце на G. □

Теорема 4.2. *Пусть группа G содержит ненулевую делимую подгруппу без кручения. Тогда $N^*(G) = R^*(G) = \bigcap\limits_p pT(G)$. В частности, если G — нередуцированная группа без кручения, то $N^*(G) = R^*(G) = 0$.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что подгруппа $\bigcap\limits_p pT(G)$ является ниль-идеалом в любом кольце на G, следовательно, $\bigcap\limits_p pT(G) \subseteq N^*(G)$. Докажем, что $R^*(G) \subseteq \bigcap\limits_p pT(G)$.

Пусть $G = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}a_i \oplus G'$, где I — некоторое множество индексов, G' — группа, не содержащая ненулевой делимой подгруппы без кручения. Группа $G = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}a_i$ является аддитивной группой некоторого поля [2, лемма 122.2], поэтому $R^*\Big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}a_i\Big) = 0$. По лемме 4.1 имеет место включение $R^*(G) \subseteq R^*(G')$.

Пусть $g \in G'$ и $g \notin \bigcap_p pT(G)$. Если $g \in T(G')$, то $g \notin R^*(G)$ по лемме 5.1. Пусть $g \in G' \setminus T(G)$. Построим ассоциативное умножение μ на G, при котором $g \notin R(G,\mu)$. Рассмотрим делимую оболочку E группы G:

$$E = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}a_i \oplus \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Q}a_j \oplus D,$$

где J — некоторое множество индексов, D — делимая периодическая группа. Существует естественное вложение группы G в группу E. Пусть

$$g = r_{j_1}a_{j_1} + \ldots + r_{j_k}a_{j_k} + d,$$

где $j_i \in J$ $(l = 1,\ldots,k)$, $d \in D$ и $r_{j_1} \neq 0$.

Зафиксируем индекс $i_0 \in I$ и запишем группу E в виде

$$E = \mathbb{Q}a_{i_0} \oplus \mathbb{Q}a_{j_1} \oplus B,$$

где

$$B = \bigoplus_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mathbb{Q}a_i \oplus \bigoplus_{j\in J\setminus\{j_1\}} \mathbb{Q}a_j \oplus D.$$

Положим

$$\mu(B\otimes E) = \mu(E\otimes B) = 0,$$
$$\mu(a_{i_0}\otimes a_{j_1}) = \mu(a_{j_1}\otimes a_{i_0}) = \mu(a_{j_1}\otimes a_{j_1}) = \mu(a_{i_0}\otimes a_{i_0}) = a_{i_0}.$$

Нетрудно убедиться, что отображение μ однозначно продолжается до ассоциативного и коммутативного умножения $\mu\colon E\otimes E \to \mathbb{Q}a_{i_0}$, причём (G,μ) — подкольцо кольца (E,μ). Заметим, что $(\mathbb{Q}a_{i_0},\mu)$ является идеалом кольца (G,μ), изоморфным полю рациональных чисел.

Допустим, что элемент g принадлежит $R(G,\mu)$. Тогда элемент $\mu(g\otimes r_{j_1}^{-1}a_{i_0}) = a_{i_0}$ также принадлежит $R(G,\mu)$, и значит,

$$a_{i_0} \in R(G,\mu)\cap \mathbb{Q}a_{i_0} = R(\mathbb{Q}a_{i_0},\mu),$$

что противоречит тому, что a_{i_0} является единичным элементом поля $(\mathbb{Q}a_{i_0},\mu)$. Следовательно, $g \notin R(G,\mu)$. □

Теорема 4.3. *Пусть $G = G_1 \oplus D$, где G_1 — редуцированная группа, D — делимая периодическая группа. Тогда*

$$R^*(G) = R^*(G_1)\oplus D, \quad N^*(G) = N^*(G_1)\oplus D.$$

Доказательство. Пусть $\varphi\colon G \to G/D$ — естественный эпиморфизм. Так как D — вполне характеристическая подгруппа группы G, являющаяся ниль-группой, то в любом кольце на группе G подгруппа D является нильпотентным идеалом. Следовательно, $D \subseteq N^*(G) \subseteq R^*(G)$. Тогда по лемме 3.4 имеют место включения

$$R^*(G_1) \oplus D \subseteq \varphi^{-1}[R^*(G/D)] \subseteq R^*(G), \quad N^*(G_1) \oplus D \subseteq \varphi^{-1}[N^*(G/D)] \subseteq N^*(G).$$

В силу леммы 3.1 верны обратные включения. □

Результаты этого раздела позволяют в дальнейшем при описании абсолютных радикалов групп рассматривать только редуцированные группы.

5. Абсолютные радикалы алгебраически компактной группы

Лемма 5.1. *Пусть A — редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа. Тогда $pA \subseteq R^*(A)$.*

Доказательство. Пусть $A = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} \mathbb{Q}_p^* e_i$. Будем считать, что множество I бесконечно (в случае конечного множества I теорема доказывается аналогично).

Пусть $\times$ — произвольное ассоциативное умножение на группе A,

$$e_i \times e_j = \tau_{ij} = \widetilde{\sum_{k\in I}} \tau_{ij}^{(k)} e_k \in A,$$

где $\tau_{ij}^{(k)} \in \mathbb{Q}_p^*$ $(i,j \in I)$, $a = \widetilde{\sum\limits_{i\in I}} a_i e_i \in pA$ $(a_i \in p\mathbb{Q}_p^*)$. Покажем, что в $(A,\times)$ существует элемент b, удовлетворяющий уравнению

$$a + x - a \times x = 0, \tag{1}$$

причём такой элемент можно найти в таком подкольце $\bar{A} = \widetilde{\sum\limits_{i\in \bar{I}}} \mathbb{Q}_p^* e_i$ кольца $(A,\times)$, что $a \in \bar{A}$, $\bar{I}$ — счётное подмножество множества I (такое подкольцо существует в силу леммы 2.7). Поэтому будем считать $I = \mathbb{N}$.

Рассмотрим систему уравнений над кольцом $\mathbb{Q}_p^*$

$$a_k + x_k - \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i x_j \tau_{ij}^{(k)} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Наша задача — доказать, что существует элемент

$$(b_1, b_2, \ldots) \in \prod_{\aleph_0} \mathbb{Q}_p^*,$$

для которого выполняются следующие условия.

I. $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — почти конечный набор. Тогда, в частности, в каждом уравнении системы (2) левая часть имеет смысл при замене x_i на b_i, а элемент $a = \widetilde{\sum_{i\in I}} b_i e_i$ принадлежит группе A.

II. Координаты элемента $(b_1, b_2, \ldots) \in \prod_{\aleph_0} \mathbb{Q}_p*$ удовлетворяют системе уравнений (2). Тогда из теоремы 2.9 следует, что элемент $b = \widetilde{\sum_{i\in\mathbb{N}}} b_i e_i \in A$ является решением уравнения (1).

Запишем систему (2) в следующем виде:

$$a_k + x_k - \left(\sum_{i=1} a_i \tau_{i1}^{(k)}\right) x_1 - \ldots - \left(\sum_{i=1} a_i \tau_{ik}^{(k)}\right) x_k - \ldots = 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \qquad (3)$$

При каждом натуральном k в k-м уравнении системы (3) коэффициентами при x_n ($n \in \mathbb{N}$) являются сходящиеся ряды целых p-адических чисел, суммы которых обозначим $s_n^{(k)}$, причём все эти коэффициенты делятся на p в $\mathbb{Q}_p^*$. Система (3) принимает вид

$$a_k - s_1^{(k)} x_1 - \ldots - s_{k-1}^{(k)} x_{k-1} + \bigl(1 - s_k^{(k)}\bigr) x_k - \ldots = 0 \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad (4)$$

где 1 — единичный элемент кольца $\mathbb{Q}_p^*$.

Теперь определим для каждого $t \in \mathbb{N}$ натуральные числа n_t следующим образом. Зафиксируем такие целые положительные числа i_t, что для всех $i > i_t$ справедливо, что $a_i \in p^t \mathbb{Q}_p^*$. Для каждой пары натуральных чисел (i, j) зафиксируем целые положительные числа $k_t^{(i,j)}$, такие что для всех $k > k_t^{(i,j)}$ справедливо, что $\tau_{ij}^{(k)} \in p^t \mathbb{Q}_p^*$. Положим

$$n_1 = 1, \quad n_t = \max\bigl\{i_t, k_t^{(i,j)} \bigm| 1 \leqslant i \leqslant i_t,\ 1 \leqslant j \leqslant n_{t-1}\bigr\}.$$

Далее рассмотрим множества

$$X_k = \left\{ (b_1, b_2, \ldots) \in \prod_{\aleph_0} \mathbb{Q}_p^* \;\middle|\; \text{для любых } t \in \mathbb{N},\ j > n_t \right.$$
$$\left. b_j \in p^t \mathbb{Q}_p^* \ (b_1, b_2, \ldots) \text{ — решение } k\text{-го уравнения системы (4)} \right\}.$$

Очевидно, элементы каждого множества X_k ($k \in \mathbb{N}$) удовлетворяют условию I, а элементы пересечения $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ удовлетворяют условиям I и II. При каждом натуральном k множество X_k является подмножеством пространства $\prod_{\aleph_0} \mathbb{Q}_p^*$, компактного в топологии произведения, индуцированной p-адической топологией на каждом $\mathbb{Q}_p^*$. Поэтому если мы докажем, что

а) все множества X_k ($k \in \mathbb{N}$) замкнуты в этой топологии,

б) всякое конечное подмножество множества всех X_k имеет непустое пересечение,

то из этого будет следовать, что пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ не пусто.

Покажем сначала, что для множеств X_k ($k \in \mathbb{N}$) выполняется условие б). Для этого рассмотрим систему n первых уравнений системы (4):

$$\begin{cases} a_1 + \bigl(1 - s_1^{(1)}\bigr)x_1 - s_2^{(1)}x_2 - \ldots - s_n^{(1)}x_n - s_{n+1}^{(1)}x_{n+1} - \ldots = 0, \\ a_2 - s_1^{(2)}x_1 + \bigl(1 - s_2^{(2)}\bigr)x_2 - \ldots - s_n^{(2)}x_n - s_{n+1}^{(2)}x_{n+1} - \ldots = 0, \\ \ldots \\ a_n - s_1^{(n)}x_1 - s_2^{(n)}x_2 - \ldots + \bigl(1 - s_n^{(n)}\bigr)x_n - s_{n+1}^{(n)}x_{n+1} - \ldots = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Придадим переменным $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ соответственно значения $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots$ ($b \in \mathbb{Q}_p^*$), выбранные произвольно с одним лишь условием:

$$\text{для всех } i > n \text{ и } t \in \mathbb{N} \text{ из того, что } i > n_t, \text{ следует, что } b_i \in p^t\mathbb{Q}_p^*. \tag{$*$}$$

Система (5) примет вид

$$\begin{cases} a_1 + \bigl(1 - s_1^{(1)}\bigr)x_1 - s_2^{(1)}x_2 - \ldots - s_n^{(1)}x_n = s_{n+1}^{(1)}b_{n+1} + \ldots, \\ a_2 - s_1^{(2)}x_1 + \bigl(1 - s_2^{(2)}\bigr)x_2 - \ldots - s_n^{(2)}x_n = s_{n+1}^{(2)}b_{n+1} + \ldots, \\ \ldots \\ a_n - s_1^{(n)}x_1 - s_2^{(n)}x_2 - \ldots + \bigl(1 - s_n^{(n)}\bigr)x_n = s_{n+1}^{(n)}b_{n+1} + \ldots . \end{cases} \tag{6}$$

По условию ($*$) правая часть k-го уравнения системы (6) является сходящимся рядом, сумму которого обозначим R_k ($R_k \in \mathbb{Q}_p^*$). Запишем систему (6) в виде

$$\begin{cases} a_1 + \bigl(1 - s_1^{(1)}\bigr)x_1 - s_2^{(1)}x_2 - \ldots - s_n^{(1)}x_n = R_1, \\ a_2 - s_1^{(2)}x_1 + \bigl(1 - s_2^{(2)}\bigr)x_2 - \ldots - s_n^{(2)}x_n = R_2, \\ \ldots \\ a_n - s_1^{(n)}x_1 - s_2^{(n)}x_2 - \ldots + \bigl(1 - s_n^{(n)}\bigr)x_n = R_n. \end{cases} \tag{7}$$

Система уравнений (7) имеет решение $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ в $\mathbb{Q}_p^*$, так как её определитель обратим в этом кольце. Следовательно, система (5) имеет решение $(b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots)$ в $\mathbb{Q}_p^*$.

Покажем, что элемент $(b_1, b_2, \ldots)$ принадлежит всем множествам X_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Для этого надо только показать, что выполняется следующее условие:

$$\text{для всех } t \in \mathbb{N} \text{ и } r \in \mathbb{N} \text{ из того, что } n_t < r \leqslant n, \text{ следует, что } b_r \in p^t\mathbb{Q}_p^*.$$

Докажем это индукцией по t. Для $t = 1$ наше утверждение очевидно.

Предположив, что $b_r \in p^t\mathbb{Q}_p^*$ для всех таких r, что $n_{t-1} < r < n$, для r, бо́льших n_t и меньших n, будем иметь

$$a_r - s_1^{(r)}b_1 - \ldots + \bigl(1 - s_r^{(r)}\bigr)b_r - s_{r+1}^{(r)}b_{r+1} - \ldots = 0,$$

или

$$a_r + \bigl(1 - s_r^{(r)}\bigr)b_r - \\ - \Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\tau_{i1}^{(r)}\Bigr)b_1 - \ldots - \Bigl(\sum_{i=i_t}^{\infty} a_i\tau_{i,r-1}^{(r)}\Bigr)b_{r-1} - \Bigl(\sum_{i=i_t}^{\infty} a_i\tau_{i,r+1}^{(r)}\Bigr)b_{r+1} - \ldots = 0.$$

Поскольку сходящиеся p-адические ряды «ведут себя» так же, как абсолютно сходящиеся числовые ряды, последнее равенство можем записать в виде

$$a_r + \bigl(1 - s_r^{(r)}\bigr)b_r - \Bigl(\sum_{i=i_t}^{\infty} a_i\tau_{i1}^{(r)}\Bigr)b_1 - \ldots - \Bigl(\sum_{i=i_t}^{\infty} a_i\tau_{i,r-1}^{(r)}\Bigr)b_{r-1} - \\ - \Bigl(\sum_{i=i_t}^{\infty} a_i\tau_{i,r+1}^{(r)}\Bigr)b_{r+1} - \ldots - \Bigl(\sum_{i=1}^{i_t-1} a_i\tau_{i1}^{(r)}\Bigr)b_1 - \ldots - \\ - \Bigl(\sum_{i=1}^{i_t-1} a_i\tau_{i,n_{t-1}}^{(r)}\Bigr)b_{n_{t-1}} - \Bigl(\sum_{i=1}^{i_t-1} a_i\tau_{i,n_{t-1}+1}^{(r)}\Bigr)b_{n_{t-1}+1} - \ldots - \\ - \Bigl(\sum_{i=1}^{i_t-1} a_i\tau_{i,r-1}^{(r)}\Bigr)b_{r-1} - \Bigl(\sum_{i=1}^{i_t-1} a_i\tau_{i,r+1}^{(r)}\Bigr)b_{r+1} - \ldots = 0.$$

По определению чисел i_t, n_t и по предположению индукции в левой части последнего равенства все слагаемые, кроме, может быть, $\bigl(1 - s_r^{(r)}\bigr)b_r$, делятся на p^t в $\mathbb{Q}_p^*$. Поскольку $1 - s_r^{(r)}$ является p-адической единицей, то $b_r \in p^t\mathbb{Q}_p^*$.

Таким образом, пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} X_k$ не пусто.

По лемме 2.8 для множеств X_k $(k \in \mathbb{N})$ выполняется условие а). Надо только заметить, что если $\bigl\{\bigl(b_1^{(m)}, b_2^{(m)}, \ldots\bigr)\bigr\}_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательность Коши элементов из X_k $(k \in \mathbb{N})$ в топологии произведения из $\prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{Q}_p^*$, то для каждого натурального i последовательность целых p-адических чисел $\bigl\{b_i^{(m)}\bigr\}_{m\in\mathbb{N}}$ является последовательностью Коши, и предел последовательности $\bigl\{\bigl(b_1^{(m)}, b_2^{(m)}, \ldots\bigr)\bigr\}_{m\in\mathbb{N}}$ в топологии произведения равен

$$\Bigl(\lim_{m\to\infty}\bigl\{b_1^{(m)}\bigr\}_{m\in\mathbb{N}},\ \lim_{m\to\infty}\bigl\{b_2^{(m)}\bigr\}_{m\in\mathbb{N}}, \ldots\Bigr).$$

Итак, для множеств X_k $(k \in \mathbb{N})$ выполняются условия а) и б). Поэтому существует элемент $(b_1, b_2, \ldots) \in \prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{Q}_p^*$, удовлетворяющий условиям I и II. Следовательно, элемент $b = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} b_i e_i \in A$ удовлетворяет уравнению (1), т. е. является квазиобратным элементом к a в кольце $(A, \times)$.

Значит, pA — квазирегулярный идеал кольца $(A, \times)$, откуда следует, что $pA \in R(A, \times)$. Поскольку умножение $\times$ на A произвольно, заключаем, что $pA \subseteq R^*(A)$. □

Отметим, что включение $pA \subseteq R^*(A)$ неверно, если A — бесконечная прямая сумма циклических p-адических модулей. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 5.2. *Пусть A — прямая сумма циклических p-адических модулей. Тогда $N^*(A) = pT(A)$. Если число циклических слагаемых без кручения в разложении группы A конечно, то $R^*(A) = pA$, в противном случае $R^*(A) = pT(A)$.*

Доказательство. Запишем группу A в виде $A = \bigoplus\limits_m J_p \oplus T$, где m — некоторое кардинальное число, $T = T(A)$. Так как на группе J_p существует кольцо, изоморфное кольцу $\mathbb{Q}_p^*$, то $N^*(J_p) = 0$ и $R^*(J_p) \subseteq pJ_p$ [1]. По теореме 3.3 $N^*(A) \subseteq N^*(T) = pT$ [2, теорема 120.6]. Так как pT является ниль-идеалом в любом кольце на A, то $pT \subseteq N^*(A) \subseteq R^*(A)$.

Пусть m — бесконечное кардинальное число, и пусть $g \notin pT$. Если $g \in T$, то $g \notin R^*(A)$ по лемме 4.1. Допустим, что $g \notin T$, т. е. $g = a + t$, где $a \in \bigoplus\limits_m J_p$, $t \in T$, причём $a \neq 0$. Тогда существует подгруппа $\bigoplus\limits_{\aleph_0} J_p$ группы A, содержащая элемент a, такая что

$$A = \bigoplus_{\aleph_0} J_p \oplus \bigoplus_{m_1} J_p \oplus T,$$

где m_1 — некоторое кардинальное число. На группе $\bigoplus\limits_{\aleph_0} J_p$ существует полупростое кольцо, изоморфное кольцу $\mathbb{Q}_p^*[X]$. Следовательно,

$$R(A) \subseteq R^*\Bigl(\bigoplus_{\aleph_0} J_p\Bigr) \oplus R^*\Bigl(\bigoplus_{m_1} J_p \oplus T\Bigr) = R^*\Bigl(\bigoplus_{m_1} J_p \oplus T\Bigr),$$

и значит, $g \notin R^*(A)$. Таким образом, $R^*(A) \subseteq pT$.

Пусть теперь m — натуральное число. Тогда A/pT — p-адическая алгебраически компактная группа. Пусть $\varphi\colon A \to A/pT$ — естественный эпиморфизм. Из лемм 3.4 и 5.1 имеем

$$\varphi A \subseteq \varphi^{-1}(pA/pT) \subseteq \varphi^{-1}[p(A/pT)] \subseteq \varphi^{-1}[R^*(A/pT)] \subseteq R^*(A).$$

Согласно теореме 3.3

$$R^*(A) \subseteq \bigoplus_m R^*(J_p) \oplus R^*(T) \subseteq \bigoplus_m pJ_p \oplus pT = pA. \qquad \square$$

Теорема 5.3. *Пусть G — редуцированная алгебраическая компактная группа. Тогда $R^*(G) = \bigcap\limits_p pG$, $R^*(G) = 0$.*

Доказательство. Запишем группу A в виде $A = \prod\limits_p A_p$, где A_p — p-адическая алгебраически компактная группа для каждого простого p. Из предложения 2.1 и леммы 5.1 легко следует, что подгруппа $\bigcap\limits_p pA = \prod\limits_p pA_p$ группы A является квазирегулярным идеалом в любом кольце A. Следовательно, $\bigcap\limits_p pA \subseteq R^*(A)$.

Докажем обратное включение. Группа A_p представима в виде $A_p = \widetilde{\sum_{i\in I_p}} \mathbb{Q}_p^* a_i^{(p)}$, где I_p — некоторое множество индексов. Для каждого простого числа p и для всех $i, j \in I_p$ определим элементы

$$\mu_p\big(a_i^{(p)} \otimes a_j^{(p)}\big) = \begin{cases} a_i^{(p)}, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Эти элементы определяют ассоциативное и коммутативное умножение μ_p на A_p (теорема 2.6). Умножения μ_p естественным образом задают единственное умножение μ на группе A (предложение 2.1).

Нетрудно убедиться, что фактор-кольцо $\Big(A \;/\; \bigcap\limits_p pA, \mu\Big)$ изоморфно кольцу $\prod\limits_p \Big(\bigoplus\limits_{|I_p|} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)$ (здесь прямая сумма и прямое произведение являются прямой суммой и прямым произведением идеалов). Так как это кольцо полупросто, то $R(A,\mu) \subseteq \bigcap\limits_p pA$. Так как в кольце (A,μ) нет нильпотентных элементов, то $N(A,\mu) = 0$. □

Следствие 5.4. *На редуцированной алгебраически компактной группе без кручения A существует ассоциативное и коммутативное кольцо, радикал Джекобсона которого совпадает с подгруппой $\bigcap\limits_p pA$, а верхний ниль-радикал нулевой.*

6. Абсолютные радикалы вполне разложимой и векторной сепарабельной групп без кручения

Определение 6.1. Векторной группой называется прямое произведение групп без кручения ранга 1, т. е. группа $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$, где R_i — рациональные группы.

Определение 6.2. Группа без кручения G называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из G содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы G.

В этой разделе мы часто будем использовать следующий критерий сепарабельности векторной группы, доказанный А. П. Мишиной.

Теорема. *Векторная группа $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ (где R_i — рациональная группа типа t_i) сепарабельна в том и только том случае, когда выполняются следующие условия:*

1) *множество типов $\{t_i \mid i \in I\}$ удовлетворяет условию минимальности;*
2) *в множестве типов $\{t_i \mid i \in I\}$ нет ни одного бесконечного подмножества несравнимых типов;*
3) *семейство групп R_i где t_i — неидемпотентный тип, конечно.*

Пусть $\{G_i \mid i \in I\}$ — семейство редуцированных однородных групп без кручения, J — подмножество множества I. Будем использовать следующие обозначения :

$T(J)$ — множество различных типов в семействе $\{\mathrm{t}(G_j) \mid j \in J\}$;
$J^{(i)} = \{j \in J \mid \mathrm{t}(G_j) \geqslant \mathrm{t}(G_i)\}$ для каждого $i \in I$;
$I_\circ = \{i \in I \mid \mathrm{t}(G_i)$ — идемпотентный тип$\}$;
$\Lambda_i = \{p \mid$ найдётся такое $k \in I_\circ^i$, что $pG_k \neq G_k\}$ для каждого $i \in I$;
если $J \subseteq I_\circ$, то $J' = \{j \in J \mid \mathrm{t}(G_j)$ содержит лишь конечное число нулей$\}$.

Определение 6.3. Группа G_i удовлетворяет условию (с), если существует счётное подмножество $\{i_1, i_2, \ldots\}$ множества I, такое что $i_1 = i$ и $\mathrm{t}\big(G_{i_{n+1}}\big) \geqslant \mathrm{t}(G_{i_n}) \cdot \mathrm{t}(G_{i_n})$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Определим подмножества $\underline{\underline{I}}$, $\widetilde{I}$, $\underline{I}$ множества I следующим образом:

$$\underline{\underline{I}} = \big\{i \in I \;\big|\; I_\circ^{(i)} = \varnothing\big\};$$
$$\widetilde{I} = \big\{i \in I \;\big|\; \mathrm{t}(G_i) \text{ — неидемпотентный тип и } I_\circ^{(i)} \neq \varnothing\big\};$$
$$\underline{I} = \{i \in I \mid G_i \text{ не удовлетворяет условию (с)}\}.$$

Замечание 6.4.

1. Если $i \in I_\circ$, то условие (с) для группы G_i равносильно тому, что существует бесконечное подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\} \subseteq I$, такое что $\mathrm{t}(G_i) \leqslant \mathrm{t}(G_{i_2}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{t}(G_{i_n}) \leqslant \ldots$.
2. Если $i \in I_\circ'$, то условие (с) для группы G_i равносильно тому, что $I^{(i)}$ — бесконечное множество.
3. Если $i \in I_\circ$, то $\bigcap\limits_{p \in \Lambda_i} pG_i = \bigcap\limits_p pG_i$.
4. Равенство $\Lambda_i = \varnothing$ выполняется тогда и только тогда, когда $i \in \underline{\underline{I}}$. В этом случае будем считать, что $\bigcap\limits_{p \in \Lambda_i} pG_i = G_i$.
5. Из п. 3, 4 следует, что

$$\prod_{i \in I}\Big(\bigcap_{p \in \Lambda_i} pG_i\Big) = \bigcap_p p\Big(\prod_{i \in I_\circ} G_i\Big) \oplus \prod_{i \in \widetilde{I}}\Big(\bigcap_{p \in \Lambda_i} pG_i\Big) \oplus \prod_{i \in \underline{\underline{I}}} G_i.$$

Везде в дальнейшем $\{R_i \mid i \in I\}$ — семейство редуцированных групп без кручения ранга 1.

Теорема 6.5. *Пусть G — редуцированная группа без кручения ранга* 1. *Тогда*

1) *если $\mathrm{t}(G)$ — неидемпотентный тип, то $N^*(G) = R^*(G) = G$;*
2) *если $\mathrm{t}(G)$ — идемпотентный тип, то $N^*(G) = 0$, $R^*(G) = \bigcap\limits_p pG$.*

Доказательство. В [4] доказано, что если $\mathrm{t}(G)$ — неидемпотентный тип, то G является ниль-группой, следовательно, $N^*(G) = R^*(G) = G$.

Пусть тип $\mathrm{t}(G)$ идемпотентен. Как следует из [4], никакое ненулевое кольцо на группе G не имеет делителей нуля, поэтому $N^*(G)=0$. Докажем, что $\bigcap\limits_p pG \subseteq R^*(G)$. Если $\mathrm{t}(G)$ содержит бесконечное число нулей, то $\bigcap\limits_p pG=0$, и указанное включение очевидно.

Пусть в $\mathrm{t}(G)$ конечное число нулей и $\times$ — произвольное умножение на G. Запишем группу G в виде $G=Ae$, где A — подкольцо с единицей 1 кольца рациональных чисел. Умножение $\times$ полностью определяется значением $e\times e=me$, где $m\in A$. Пусть $ae\in\bigcap\limits_p pG$, тогда a делится в A на все простые числа, которым в $t(G)$ соответствуют нули; а элемент $1-am$ взаимно прост со всеми такими простыми числами. Значит, элемент $1-am$ обратим в кольце A, и элемент $[-a(1-am)^{-1}]e\in G$ является квазиобратным к элементу ae в кольце $(G,\times)$:

$$ae+[-a(1-am)^{-1}]e-ae\times[-a(1-am)^{-1}]e=ae-[a(1-am)^{-1}(1-am)]e=0.$$

Следовательно, $\bigcap\limits_p pG$ — квазирегулярный идеал кольца $(G,\times)$, откуда следует, что $\bigcap\limits_p pG\subseteq R(G,\times)$. Так как умножение $\times$ на G произвольно, получаем, что $\bigcap\limits_p pG\subseteq R^*(G)$.

Покажем, что $R^*(G)\subseteq\bigcap\limits_p pG$. Пусть $\frac{m}{n}e\notin\bigcap\limits_p pG$, где m, n — взаимно простые целые числа, $\frac{m}{n}\in A$. Тогда существует простое число p, не делящее me, и такие целые числа t и s, что $pt+ms=1$. Определим на G умножение $\times$, положив $e\times e=se$. Предположим, что $\frac{m}{n}e\in R^*(G)$, тогда $me\in R(G,\times)$ и в кольце $(G,\times)$ существует элемент ae, квазиобратный к me. Пусть $ae=\frac{r}{k}e$, где r, k — взаимно простые числа, $\frac{r}{k}\in A$ и p не делит k. Тогда

$$me+\frac{r}{k}e-(me)\times\left(\frac{r}{k}e\right)=me+\frac{r}{k}e-\left(\frac{r}{k}ms\right)e=0,$$

откуда следует, что $m+\frac{r}{k}(1-ms)=m+\frac{r}{k}pt=0$ и $mk+rpt=0$, т. е. p делит mk, противоречие. Следовательно, $\frac{m}{n}e$ не принадлежит $R^*(G)$ и имеет место включение $R^*(G)\subseteq\bigcap\limits_p pG$. □

Лемма 6.6. *Пусть $(G,\times)$ — ассоциативное кольцо, $g\in G$. Пусть существует такой элемент $b\in G$, что $g+b-g\times b$ — квазирегулярный элемент кольца $(G,\times)$. Тогда g — квазирегулярный элемент этого кольца.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из того факта, что множество элементов группы G с заданной на нём «круговой» композицией $\circ$, определяемой правилом

$$g_1\circ g_2=g_1+g_2-g_1\times g_2 \text{ для всех } g_1,g_2\in G,$$

является полугруппой [1]. □

Лемма 6.7. *Пусть $G=R_1\oplus R_2$, где R_1, R_2 — такие группы без кручения ранга 1, что $\mathrm{t}(R_1)$ — неидемпотентный тип, $\mathrm{t}(R_2)$ — идемпотентный тип и*

$\mathrm{t}(R_1) \leqslant \mathrm{t}(R_2)$. *Пусть q — такое простое число, что $qR_2 \neq R_2$. Тогда*

$$R^*(G) \subseteq qR_1 \oplus \bigcap_p pR_2, \quad N^*(G) = 0.$$

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = R_1 a_1 \oplus R_2 a_2$, выбрав элементы a_1 и a_2 таким образом, чтобы в характеристике $\chi(a_2)$ были только нули и символы ∞, а в $\chi(a_1)$ нули стояли на всех тех местах, где в $\chi(a_2)$ стоят нули. Тогда можно определить умножение $\times$ на G, положив

$$a_1 \times a_1 = a_1 \times a_2 = a_2 \times a_1 = a_2 \times a_2 = a_2.$$

Заметим, что $R_2 a_2$ — идеал кольца $(G, \times)$.

Так как

$$R^*(R_2 a_2) = \Big(\bigcap_p pR_2\Big) a_2$$

(теорема 6.5), то

$$R^*(G) \subseteq R^*(R_1 a_1) \oplus \Big(\bigcap_p pR_2\Big) a_2$$

по лемме 3.1. Пусть $g = r_1 a_1 + r_2 a_2 \in R^*(G)$, где $r_1 \in R_1$, $r_2 \in \bigcap_p pR_2$. Допустим, что $r_1 \notin qR_1$. Группу R_1 можно рассматривать как подгруппу группы R_2. В группе R_2 рассмотрим элемент $r_1 + r_2 = \frac{n}{l}$ (n, l — целые числа). Так как $r_2 \in \bigcap_p pR_2$ и $r_1 \notin qR_1$, то q не делит n (очевидно, q не делит l). Следовательно, существуют целые числа s и t, такие что $qt + ns = 1$. Так как $g \in R^*(G)$, то

$$g \times a_2 = (r_1 + r_2) a_2 = \frac{n}{l} a_2 \in R(G, \times).$$

Следовательно,

$$nsa_2 \in R(G, \times) \cap (R_2 a_2, \times) = R(R_2 a_2, \times).$$

Значит, существует элемент $\frac{c}{d} a_2 \in R_2 a_2$ (c, d — целые числа, q не делит d), такой что

$$nsa_2 + \frac{c}{d} a_2 - \left(\frac{c}{d} ns\right) a_2 m = 0,$$

откуда следует, что

$$ns + \frac{c}{d} - \frac{c}{d} ns = ns + \frac{c}{d}(1 - ns) = ns + \frac{c}{d} qt = 0.$$

Следовательно, $nsd + cqt = 0$, что противоречит тому, что ни одно из чисел n, s, d не делится на q. Таким образом, $g \notin R^*(G)$ и $R^*(G) \subseteq qR_1 \oplus \bigcap_p pR_2$.

По теореме 6.5 $N^*(R_2 a_2) = 0$, и следовательно, $N^*(G) \subseteq N^*(R_1 a_1)$. Пусть $g = r_1 a_1 \in N^*(G)$. Тогда $g \times a_2 = r_1 a_2 \in N(G, \times)$. Но $R_2 a_2$ — идеал кольца $(G, \times)$, не имеющий делителей нуля, следовательно, $r_1 = 0$ и $N^*(G) = 0$. $\square$

Лемма 6.8. *Пусть I — неизмеримое множество* [2, § 94], $G = \prod_{i \in I} R_i$, *где все группы R_i имеют один и тот же идемпотентный тип t. Тогда $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$.*

Доказательство. Пусть $g \in \bigcap_p pG$ и $\mu\colon G \otimes G \to G$ — ассоциативное умножение на G. Так как G — сепарабельная однородная группа [2, лемма 96.4], то сервантная подгруппа, порождённая элементом g, выделяется в G прямым слагаемым. Так как каждое прямое слагаемое группы G изоморфно прямому произведению некоторого подсемейства групп R_i [2], то можно считать, что $G = R_1 \oplus \prod_{i \in I_1} R_i$ и $I = \{1\} \cup I_1$, $g \in R_1$.

Рассмотрим группу $\hat{G} = \prod_{i \in I} \hat{R}_i$ ($\hat{R}_i$ — $\mathbb{Z}$-адическое пополнение группы R_i). Так как группа $\hat{G}$ алгебраически компактна, G — сервантная подгруппа группы $\hat{G}$ и фактор-группа $\hat{G}/G$ делима, то по [2, лемма 41.8] $\hat{G}$ — сервантно инъективная оболочка группы G. Следовательно, умножение μ на G однозначно продолжается до умножения на $\hat{G}$ (теорема 1.3). В кольце $\hat{G}$ элемент g имеет квазиобратный элемент

$$g = \lim_{n \to \infty} \{-g - g^2 - \ldots - g^n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

где g^n — n-я степень элемента g в кольце $(\hat{G}, \mu)$. Обозначим через π_i проекцию $\hat{G}$ на группу $\hat{R}_i$. Тогда сужение π_i на группу G есть проекция G на R_i. Пусть $k \in I$. Покажем, что $\pi_k(b) \in R_k$, т. е. $b \in G$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon G \to R_k$, определённый следующим образом:

$$\varphi(c) = \pi_k \mu(c \otimes g) \text{ для всех } c \in G.$$

Так как R_k — узкая группа, то $\varphi(R_i) = \{\varphi(r) \mid r \in R_i\} = 0$ почти для всех $i \in I$. Рассмотрим множества $F_1 = \{i \in I \mid \varphi(R_i) \neq 0\}$, $F = \{1, k\} \cup F_1$ и $S = I \setminus F$. Тогда F — конечное множество. Пусть $\hat{G}_F = \bigoplus_{i \in F} \hat{R}_i$, $G_F = \bigoplus_{i \in F} R_i$ и η — проекция группы $\hat{G}$ на группу $\hat{G}_F$. Сужение η на группу G есть проекция G на G_F. Так как $\varphi\Big(\bigoplus_{i \in S} R_i\Big) = 0$ и множество I неизмеримо, то $\varphi\Big(\prod_{i \in S} R_i\Big) = 0$ [2, теорема 94.4]. Следовательно, $\varphi(G) = \varphi\Big(\bigoplus_{i \in F} R_i\Big)$, т. е.

$$\pi_k \mu(c \otimes g) = \pi_k \mu(\eta(c) \otimes g) \text{ для всех } c \in G. \tag{1}$$

Рассмотрим гомоморфизм $\eta\mu\colon \hat{G} \otimes \hat{G} \to \hat{G}_F$. Сужение $\eta\mu$ на группу $\hat{G}_F \otimes \hat{G}_F$ является умножением на группе $\hat{G}_F$, т. е. определено кольцо $(\hat{G}_F, \eta\mu)$. Нетрудно убедиться, что $(G_F, \eta\mu)$ — подкольцо кольца $(\hat{G}_F, \eta\mu)$. Обозначим $g_1 \, [\times] \, g_2 = \eta\mu(g_1 \otimes g_2)$ и $g_1^{[2]} = g_1 [\times] g_1$, $g_1^{[n]} = g_1^{n-1} [\times] g_1$ для любых элементов $g_1, g_2 \in \hat{G}_F$. Так как группа $\hat{G}_F$ алгебраически компактна и $g \in \bigcap_p p\hat{G}_F$, то определён элемент

$$b' = \lim_{n \to \infty} \big\{-g - g^{[2]} - \ldots - g^{[n]}\big\}_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{G}_F$$

(предел берётся в $\mathbb{Z}$-адической топологии на $\hat{G}_F$), который удовлетворяет уравнению

$$g + x - x\,[\times]\,g = 0. \tag{2}$$

Покажем, что в кольце $(\hat{G}_F, [\times])$ это уравнение может иметь не более одного решения. Пусть существуют такие элементы $c_1, c_2 \in \hat{G}_F$, что

$$g + c_1 - c_1\,[\times]\,g = g + c_2 - c_2\,[\times]\,g = 0.$$

Тогда

$$c_1 - c_2 = (c_1 - c_2)\,[\times]\,g = \ldots = (\ldots(c_1 - c_2)\,[\times]\,g)\ldots)\,[\times]\,g$$

для любого числа множителей g. Так как $g \in \bigcap\limits_p pG$, то элемент $c_1 - c_2$ принадлежит делимой подгруппе редуцированной группы $\hat{G}_F$, т. е. $c_1 - c_2 = 0$.

Покажем, что уравнение (2) имеет решение в кольце $(G_F, [\times])$. Без потери общности можно считать, что $F = \{1, 2, \ldots, k, n\}$, где k, n — натуральные числа и $k \leqslant n$. Запишем группу G_F в виде $G_F = Ra_1 \oplus \ldots \oplus Ra_n$, где R — подкольцо с единицей 1 кольца рациональных чисел. Пусть $g = r_1a_1$, $x = x_1a_1 + \ldots + x_na_n$ ($r_1 \in \bigcap\limits_p pR$). Тогда из уравнения (2) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} r_1a_1 + x_1a_1 - \pi_1\bigl(x_1r_1(a_1\,[\times]\,a_1)\bigr) - \ldots - \pi_1\bigl(x_nr_1(a_n\,[\times]\,a_1)\bigr) = 0, \\ \ldots \\ x_na_n - \pi_1\bigl(x_1r_1(a_1\,[\times]\,a_1)\bigr) - \ldots - \pi_n\bigl(x_nr_1(a_n\,[\times]\,a_1)\bigr) = 0. \end{cases}$$

Обозначив $\pi_i(a_l\,[\times]\,a_1) = \tau_{il}a_i$ для любых $i, l \in F$, получим систему уравнений над кольцом R

$$\begin{cases} r_1 + x_1 - x_1r_1\tau_{11} - \ldots - x_nr_1\tau_{1n} = 0, \\ x_2 - x_1r_1\tau_{21} - \ldots - x_nr_1\tau_{2n} = 0, \\ \ldots \\ x_n - x_1r_1\tau_{n1} - \ldots - x_nr_1\tau_{nn} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (1 - r_1\tau_{11})x_1 - r_1\tau_{12}x_2 - \ldots - r_1\tau_{1n}x_n = -r_1, \\ -r_1\tau_{21}x_1 + (1 - r_1\tau_{22})x_2 - \ldots - r_1\tau_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ -r_1\tau_{n1}x_1 - r_1\tau_{n2}x_2 - \ldots + (1 - r_1\tau_{nn})x_n = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $(b_1, \ldots, b_n)$ в кольце R, так как её определитель обратим в этом кольце. Следовательно, уравнение (2) имеет решение $b_1a_1 + \ldots + b_na_n$ в кольце $(\hat{G}_F, [\times])$.

Поскольку в кольце $(\hat{G}_F, [\times])$ уравнение (2) имеет единственное решение b', то $b' = b_1a_1 + \ldots + b_na_n$ и, значит, $\pi_k(b') \in R_k$.

Покажем, что $\pi_k(b) = \pi_k(b')$. Нетрудно убедиться, что последовательности

$$\{-\pi_k(g) - \pi_k(g^2) - \ldots - \pi_k(g^n)\}_{n \in \mathbb{N}},$$
$$\bigl\{-\pi_k(g) - \pi_k\bigl(g^{[2]}\bigr) - \ldots - \pi_k\bigl(g^{[n]}\bigr)\bigr\}_{n \in \mathbb{N}}$$

являются последовательностями Коши элементов группы R в $\mathbb{Z}$-адической топологии и

$$\pi_k(b) = \lim_{n\to\infty}\{-\pi_k(g) - \ldots - \pi_k(g^n)\}_{n\in\mathbb{N}},$$
$$\pi_k(b') = \lim_{n\to\infty}\bigl\{-\pi_k(g) - \ldots - \pi_k\bigl(g^{[n]}\bigr)\bigr\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что $\pi_k(g^n) = \pi_k\bigl(g^{[n]}\bigr)$. Обозначая умножение μ на группе G знаком $\times$, из (1) будем иметь

$$\pi_k(g^n) = \pi_k\bigl((g\times g)\times g^{n-2}\bigr) = \pi_k(\eta(g\times g)\times g^{n-2}) = \pi_k\Bigl(\bigl(g^{[2]}\times g\bigr)\times g^{n-3}\Bigr) =$$
$$= \pi_k\bigl(\eta\bigl(g^{[2]}\times g\bigr)\times g^{n-3}\bigr) = \pi_k\bigl(g^{[3]}\times g^{n-3}\bigr) = \ldots = \pi_k\bigl(g^{[n]}\bigr).$$

Следовательно, $\pi_k(b) = \pi_k(b') \in R_k$. Так как k — произвольный индекс из I, то $b \in \prod\limits_{k\in I} R_k = G$.

Таким образом, $\bigcap\limits_p pG$ является квазирегулярным идеалом кольца (G,μ) и, значит, $\bigcap\limits_p pG \subseteq R(G,\mu)$. Так как умножение μ на G произвольно, получаем, что $\bigcap\limits_p pG \subseteq R^*(G)$. □

Лемма 6.9. *Пусть I — неизмеримое множество индексов, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ — редуцированная векторная сепарабельная группа. Пусть множество $T(I)$ конечно. Тогда*

$$\prod_{i\in I}\biggl(\bigcap_{p\in\Lambda_i} pR_i\biggr) \subseteq R^*(G).$$

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \prod\limits_{j\in J} G_j$, где G_j — прямое произведение групп R_i одного и того же типа. Тогда множество J конечно, и так как G — сепарабельная группа, то все группы G_j $(j \in J)$ являются однородными. Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G,

$$G^\circ = \prod_{i\in I}\biggl(\bigcap_{p\in\Lambda_i} pR_i\biggr).$$

Тогда группу G° можно представить в виде

$$G^\circ = \bigoplus_{j\in J}\biggl(\bigcap_{p\in\Lambda_j} pG_j\biggr).$$

Покажем, что G° — идеал кольца $(G,\times)$. Пусть $a \in G$ и $g = \sum\limits_{j\in J} g_j \in G^\circ$, где $g_j \in \bigcap\limits_{p\in\Lambda_j} pG_j$. Пусть $k \in J$. Тогда

$$g_k \in \bigoplus_{j\in J^{(k)}}\biggl(\bigcap_{p\in\Lambda_k} pG_j\biggr),$$

но для любого $j \in J^{(k)}$ множество $J_o^{(j)}$ содержится в $J_o^{(k)}$, поэтому $\Lambda_j \subseteq \Lambda_k$ и, следовательно,

$$\bigcap_{p\in\Lambda_k} pG_j \subseteq \bigcap_{p\in\Lambda_j} pG_j.$$

Таким образом,

$$g_k \times a \in \bigoplus_{j\in J}\Bigl(\bigcap_{p\in\Lambda_j} pG_j\Bigr)$$

и, значит, $g \times a \in G^\circ$. Аналогично $a \times g \in G^\circ$.

Запишем теперь множество J в виде $J = \{1, \dots, n\}$ и индукцией по n докажем, что $G^\circ \subseteq R^*(G)$.

При $n = 1$ группа G является однородной группой. Если $\mathrm{t}(G)$ — идемпотентный тип, то по лемме 6.8 $G^\circ = \bigcap\limits_p pG \subseteq R^*(G)$. Если $\mathrm{t}(G)$ — неидемпотентный тип, то любое умножение $\times$ на G нулевое, так как $\mathrm{t}(a \times b) > \mathrm{t}(a) = \mathrm{t}(G)$ для любых $a \neq 0$, $b \in G$. Поэтому $a \times b = 0$. Следовательно, $N^*(G) = R^*(G) = G$ и $G^\circ \subseteq R^*(G)$.

Допустим, что утверждение леммы верно для любого натурального $k \leqslant n-1$, и пусть $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$. Тогда среди типов $\mathrm{t}(G_1), \dots, \mathrm{t}(G_n)$ есть максимальный тип, пусть это $\mathrm{t}(G_n) = t_n$. Подгруппа G_n является идеалом кольца $(G, \times)$, и определено фактор-кольцо $(G/G_n, \times)$, аддитивная группа которого удовлетворяет индукционному предположению.

Пусть

$$g = \sum_{j\in J} g_j \in G^\circ, \quad g_j \in \bigcap_{p\in\Lambda_j} pG_j.$$

Тогда нетрудно убедиться, что по предположению индукции $g + G_n$ — квазирегулярный элемент кольца $(G/G_n, \times)$, т. е. существует такой элемент $b \in G_1 \oplus \ldots \oplus G_{n-1}$, что $g + b - g \times b = c \in G_n$.

Если t_n — неидемпотентный тип, то из сказанного выше следует, что G_n — ниль-идеал кольца $(G, \times)$. Следовательно, элемент c и, значит, элемент g квазиобратимы в кольце $(G, \times)$ (лемма 6.6).

Пусть t_n — идемпотентный тип и π — проекция группы G на G_n. Тогда $c = \pi(g) - \sum\limits_{j\in J}(g_j \times b)$. Так как t_n — идемпотентный тип, то

$$\pi(g) \in \bigcap_{p\in\Lambda n} p(G_n) \subset \bigcap_p p(G_n).$$

Покажем, что

$$\pi(g_j \times b) \in \bigcap_p p(G_n)$$

для всех $j \in J$. Если $\pi(g_j \times b) \neq 0$, то

$$t_n = \mathrm{t}\bigl(\pi(g_j \times b)\bigr) \geqslant \mathrm{t}(g_j \times b) \geqslant \mathrm{t}(g_j).$$

Следовательно, так как $g_j \in \bigcap\limits_{p\in\Lambda_j} pG_j$, то g_j, а значит и $\pi(g_j \times b)$, делится на все такие p, для которых $pG_n \neq G_n$, т. е. $\pi(g_j \times b) \in \bigcap\limits_{p} pG_n$. Таким образом,

$$c \in \bigcap_p pG_n \subseteq R(G_n, \times)$$

(лемма 6.8), т. е. c — квазирегулярный элемент кольца $(G, \times)$. Поэтому $G^\circ \subseteq$ $\subseteq R(G, \times)$. Так как умножение $\times$ на G произвольно, отсюда следует, что $G^\circ \subseteq$ $\subseteq R^*(G)$. □

Лемма 6.10. *Пусть $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, где каждая группа G_k $(k = 1, \ldots, n)$ является однородной группой без кручения неидемпотентного типа. Тогда любое ассоциативное кольцо на G является нильпотентным кольцом, индекс нильпотентности которого не больше 2^n.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 1$ группа G является однородной группой неидемпотентного типа, следовательно,

$$G \times G = \{g_1 \times g_2 \mid g_1, g_2 \in G\} = 0$$

при любом умножении $\times$ на G.

Пусть утверждение леммы верно для любого натурального $k \leqslant n-1$. Пусть $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$ и $\times$ — ассоциативное умножение на G. Тогда среди типов групп $G_1, \ldots, G_n$ есть максимальный, пусть это $\mathrm{t}(G_n)$. Очевидно, G_n — идеал кольца $(G, \times)$, поэтому определено фактор-кольцо, аддитивная группа которого удовлетворяет индукционному предположению. Следовательно, в кольце $(G, \times)$ произведение любых 2^{n-1} сомножителей лежит в G_n. Так как G_n — ниль-группа, то произведение любых 2^n сомножителей в кольце $(G, \times)$ равно нулю. □

Лемма 6.11. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ — редуцированная векторная сепарабельная группа. Пусть $\mathrm{t}(R_i)$ — идемпотентный тип для каждого $i \in I$. Тогда $\bigcap\limits_p pG \subseteq R^*(G)$.*

Доказательство. Пусть $g \in \bigcap\limits_p pG$ и $\times$ — ассоциативное умножение на G. Тогда, очевидно,

$$g \in G' = \prod_{i\in I} R_i.$$

Группа G' является сепарабельной [2, теорема 87.5], следовательно,

$$G' = G_1 \oplus \ldots \oplus G_m \oplus G'',$$

где G_k — группа ранга 1 для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathrm{t}(G_k) \in T(I')$ и $g =$ $= g_1 + \ldots + g_m$ $(g_k \in G_k)$.

Обозначим

$$I^{[k]} = \{i \in I \mid \mathrm{t}(R_i) \geqslant \mathrm{t}(G_k)\} \quad (k = 1, \ldots, m),$$
$$I^{(m)} = I^{[1]} \cup \ldots \cup I^{[m]}, \quad G^{(m)} = \prod_{i \in I^{(m)}} R_i.$$

Так как $\mathrm{t}(G_k)$ для любого натурального $k \leqslant m$ содержит лишь конечное число нулей, то множество $T\big(I^{[k]}\big)$ конечно. Следовательно, конечно и множество $T\big(I^{[m]}\big)$.

Покажем, что $G^{(m)}$ — идеал кольца $(G, \times)$, содержащий элемент g. Так как $\mathrm{t}(g_k) = \mathrm{t}(G_k)$ для всех натуральных $k \leqslant m$, то

$$g_k \in G = \prod_{i \in I^{[k]}} R_i \subseteq G^{(m)}$$

и, значит, $g \in G^{(m)}$. Пусть $a \in G^{(m)}$, $b \in G$. Так как группа $G^{(m)}$ сепарабельна, то элемент a можно представить в виде $a = a_1 + \ldots + a_l$ $(l \in \mathbb{N})$, где $t(a_k) \in T\big(I^{(m)}\big)$ для любого $k \leqslant l$. Следовательно, для каждого такого k существует натуральное число $s \leqslant m$, такое что $\mathrm{t}(a_k) \in T\big(I^{[s]}\big)$, откуда следует, что $t(a_k \times b) \geqslant t(a_k) \geqslant \mathrm{t}(G_s)$. Значит,

$$a_k \times b \in G = \prod_{i \in I^{[s]}} R_i \subseteq G^{(m)},$$

и следовательно, $a \times b \in G^{(m)}$. Аналогично $b \times a \in G^{(m)}$.

Итак, группа $G^{(m)}$ удовлетворяет условиям леммы 6.9. Следовательно,

$$\prod_{i \in I^{(m)}} \Big(\bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i \Big) = \bigcap_p pG^{(m)} \subseteq R(G^{(m)}, \times) = R(G, \times) \cap G^{(m)},$$

т. е. $g \in R(G, \times)$, откуда получаем, что $\bigcap_p pG \subset R(G, \times)$. Так как умножение $\times$ на G произвольно, $\bigcap_p pG \subseteq R^*(G)$. □

Теорема 6.12. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod_{i \in I} R_i$ — редуцированная векторная сепарабельная группа. Тогда*

$$N^*(G) = \prod_{i \in \underline{\underline{I}}} R_i, \quad R^*(G) = \prod_{i \in I} \Big(\bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i \Big).$$

Доказательство. Обозначим

$$I_1 = \{i \in I \mid \mathrm{t}(R_i) — \text{неидемпотентный тип}\},$$

$$G_\circ = \prod_{i \in I_\circ} R_i, \quad G'_\circ = \prod_{i \in I'_\circ} R_i, \quad \underline{\underline{G}} = \prod_{i \in \underline{\underline{I}}} R_i, \quad G^\circ = \prod_{i \in I} \Big(\bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i \Big).$$

Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G. Так как группа G сепарабельна, то множество $\underline{\underline{I}}$ конечно (см. критерий сепарабельности векторной группы). Пусть

$a \in G$, $g = \sum\limits_{i \in \underline{\underline{I}}} g_i \in \underline{\underline{G}}$ $(g_i \in R_i)$. Тогда

$$g \times a = \sum_{i \in \underline{\underline{I}}} (g_i \times a) \in \bigoplus_{i \in I} \prod_{k \in I^{(i)}} R_k.$$

Но $I^{(i)} \subseteq \underline{\underline{I}}$ для любого $i \in I$, поэтому $g \times a \in \underline{\underline{G}}$. Аналогично $a \times g \in \underline{\underline{G}}$, т. е. $\underline{\underline{G}}$ — идеал кольца $(G, \times)$. Из леммы 6.10 следует, что $\underline{\underline{G}}$ — ниль-идеал этого кольца, поэтому $G \subseteq N^*(G)$.

Покажем, что $\bigcap\limits_p pG_\circ$ — идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $g \in \bigcap\limits_p pG_\circ$, $a \in G$. Тогда $g \in \bigcap\limits_p pG'_\circ$. Так как группа $G'_\circ$ сепарабельна, то элемент g можно вложить в некоторое вполне разложимое прямое слагаемое группы $G'_\circ$, имеющее конечный ранг. Поэтому элемент g можно представить в виде $g = g_1 + \ldots + g_n$, где $\mathrm{t}(g_k) \in T(I'_\circ)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда $\mathrm{t}(g_k \times a) \geqslant \mathrm{t}(g_k)$ для каждого натурального $k \leqslant n$, т. е. $\mathrm{t}(g_k \times a)$ — идемпотентный тип с конечным числом нулей. Следовательно, $g_k \times a \in \prod\limits_{i \in I'_\circ} R_i = G'_\circ$. Значит, $g \times a = g_1 \times a + \ldots + g_n \times a \in G'_\circ$. Так как $g \in \bigcap\limits_p pG_\circ$, то $g \times a \in \bigcap\limits_p pG_\circ$. Аналогично $a \times g \in \bigcap\limits_p pG_\circ$.

Покажем теперь, что подгруппа G° является идеалом кольца $(G, \times)$. Так как множество I_1 конечно, то группу G° можно записать в виде

$$G^\circ = \bigoplus_{i \in I_1} \Bigl(\bigcap_{p \in \Lambda_i} pR_i \Bigr) \oplus \bigcap_p pG_\circ.$$

Пусть $a \in G$, $g = \sum\limits_{i \in I_1} g_i + g_\circ \in G^\circ$, где $g_i \in \bigcap\limits_{p \in \Lambda_i} pR_i$, $g_\circ \in \bigcap\limits_p pG_\circ$. Тогда $g \times a = \sum\limits_{i \in I_1} (g_i \times a) + g_\circ \times a$. Так же, как в доказательстве леммы 6.9, показывается, что $g_i \times a \in G^\circ$ для любого $i \in I_1$. Так как по доказанному выше $g_\circ \times a \in \bigcap\limits_p pG^\circ$, то $g \times a \in G^\circ$. Аналогично $a \times g \in G^\circ$.

Докажем, что идеал G° является квазирегулярным. Пусть $T(I) = T$. Определим множества $T'_1, \ldots, T'_n, \ldots$ и $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ следующим образом: $T'_1 = T$, и если множества $T'_1, \ldots, T'_n$ построены, то T_i — множество минимальных типов в T_i° $(i = 1, \ldots, n)$ (по сформулированной в начале раздела теореме такие типы существуют и их конечное число), $T'_{n+1} = T \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_n)$.

Так как группа G сепарабельна, то каждое из множеств $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ конечно и существует такое $n \in \mathbb{N}$, что в T'_n все типы идемпотентны. Пусть G_1 — прямое произведение таких групп R_i, что $\mathrm{t}(R_i) \in T'_n$, G_2 — прямое произведение таких групп R_i, что $\mathrm{t}(R_i) \in T_1 \cup \ldots \cup T_{n-1}$. Тогда $G = G_1 \oplus G_2$. Легко доказывается, что G_1 — идеал кольца $(G, \times)$. Следовательно, определено фактор-кольцо $(G/G_1, \times)$, аддитивная группа которого изоморфна G_2.

Пусть $g \in G^\circ$. Тогда, так как множество $T_1 \cup \ldots \cup T_{n-1}$ конечно, по лемме 6.9 элемент $g + G_1$ принадлежит радикалу Джекобсона кольца $(G/G_1, \times)$, т. е. в кольце $(G, \times)$ существует такой элемент b, что $g + b - g \times b = c \in G_1$.

Так же, как в доказательстве леммы 6.9, показывается, что $c=\bigcap\limits_p pG_1$. Значит, c — квазирегулярный элемент идеала $(G_1,\times)$ (лемма 6.11). Тогда по лемме 6.6 g — квазирегулярный элемент кольца $(G,\times)$, и следовательно, G° — квазирегулярный идеал этого кольца. Из произвольности умножения $\times$ на G следует $G^\circ\subseteq R^*(G)$.

Докажем обратные включения. Так как множество I_1 конечно и для групп R_i идемпотентного типа $N^*(R_i)=0$, $R^*(R_i)=\bigcap\limits_p pR_i$ (теорема 6.5), по теореме 3.3

$$N^*(G)\subseteq \underline{\underline{G}}\oplus\bigoplus_{i\in\overline{\overline{I}}}R_i,\quad R^*(G)\subseteq\bigcap_p pG_\circ\oplus\underline{\underline{G}}\oplus\bigoplus_{i\in\overline{\overline{I}}}R_i.$$

Пусть $g\in N^*(G)$, $g=\underline{\underline{g}}+\sum\limits_{i\in\overline{\overline{I}}}g_i$, где $\underline{\underline{g}}\in\underline{\underline{G}}$, $g_i\in R_i$ $(i\in\overline{\overline{I}})$. Допустим, что существует такой индекс $k\in\overline{\overline{I}}$, что $g_k\neq 0$. Тогда существует $i_\circ\in I_\circ$, для которого $\mathrm{t}(R_{i_\circ})\geqslant\mathrm{t}(R_k)$. Группу G запишем в виде $G=R_k\oplus R_{i_\circ}\oplus G'$, где $G'=\prod\limits_{i\neq k;\, i\neq i_0}R_i$. Так как $R_{i_\circ}$ — редуцированная группа, то по леммам 3.1 и 6.7 имеем

$$N^*(G)\subseteq N^*(R_k\oplus R_{i_\circ})\oplus N^*(G')=N^*(G').$$

Значит, $\underline{\underline{g}}\notin N^*(G)$, что противоречит выбору элемента g. Следовательно, $N^*(G)\subseteq\underline{\underline{G}}$.

Пусть $g\in R^*(G)$, $g=g_\circ+\underline{\underline{g}}+\sum\limits_{i\in I}g_i$, где $g_\circ\in\bigcap\limits_p pG_\circ$, $\underline{\underline{g}}\in\underline{\underline{G}}$, $g_i\in R_i$ $(i\in\overline{\overline{I}})$. Допустим, что существует $k\in\overline{\overline{I}}$, для которого $g_k\in\bigcap\limits_{p\in\Lambda_i}pR_k$, т. е. существует такое $q\in\Lambda_k$, что $g_k\notin qR_k$. Тогда существует такой индекс $i_\circ\in I_\circ$, что $\mathrm{t}(R_{i_\circ})\geqslant\mathrm{t}(R_k)$ и $qR_{i_\circ}\neq R_{i_\circ}$. Проводя дальнейшие рассуждения так же, как для $N^*(G)$, получим, что $g\notin R^*(G)$. Следовательно, $g_i\in\bigcap\limits_{p\in\Lambda_i}pR_i$ для любого $i\in\overline{\overline{I}}$, т. е.

$$g\in\bigcap_p pG_\circ\oplus\ldots\oplus\bigoplus_{i\in\overline{\overline{I}}}\Bigl(\bigcap_p pR_i\Bigr)=G^\circ. \qquad\square$$

Теорема 6.13. *Пусть $G=\bigoplus\limits_{i\in I}R_i$ — вполне разложимая редуцированная группа без кручения. Тогда*

$$N^*(g)=\bigoplus_{i\in\underline{I}\cap\underline{\underline{I}}}R_i,\quad R^*(G)=\bigoplus_{i\in\underline{I}}\Bigl(\bigcap_{p\in\Lambda_i}pR_i\Bigr).$$

Доказательство. Будем использовать следующие обозначения:

$$G_\circ = \bigoplus_{i\in I_\circ} R_i, \quad G^\circ = \bigoplus_{i\in I}\Bigl(\bigcap_{p\in\Lambda_i} pR_i\Bigr), \quad \underset{-}{G} = \bigoplus_{i\in \underset{-}{I}} R_i,$$

$$\underset{=}{G} = \bigoplus_{i\in I} R_i, \quad \underset{-}{G}^\circ = G^\circ \cap \underset{-}{G} = \bigoplus_{i\in I}\Bigl(\bigcap_{p\in\Lambda_i} pR_i\Bigr), \quad \underset{\equiv}{G} = \underset{=}{G} \cap \underset{-}{G} = \bigoplus_{i\in \underset{=}{I}\cap \underset{-}{I}} R_i.$$

Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G. Нетрудно убедиться, что $\underset{-}{G}$ — идеал кольца $(G,\times)$, надо только заметить, что если группа R_i $(i\in I)$ не удовлетворяет условию (c) и $\mathrm{t}(R_k)\geqslant \mathrm{t}(R_i)$ при некотором $k\in I$, то для группы R_k также не выполняется условие (c). Путём рассуждений, аналогичных рассуждениям в доказательствах леммы 6.9 и теоремы 6.12 показывается, что подгруппы G° и $\underset{=}{G}$ — идеалы кольца $(G,\times)$. Следовательно, $\underset{-}{G}^\circ$ и $\underset{\equiv}{G}$ — идеалы этого кольца.

Пусть $g\in \underset{-}{G}^\circ$ и π_i — проекция группы G на R_i $(i\in I)$. Определим натуральные числа $m_1,\ldots,m_n,\ldots$ и подмножества $I_1,\ldots,I_n,\ldots$ множества I следующим образом:

$$I_1 = \{i\in I \mid \pi_i(g)\neq 0\}, \quad m_1 = |I_1|,$$

если числа $m_1,\ldots,m_n$ и множества $I_1,\ldots,I_n$ определены, то

$$I_{n+1} = \bigl\{i\in I \bigm| \pi_i\bigl(g^{(m_1+1)\cdots(m_n+1)}\bigr)\neq 0\bigr\}, \quad m_{n+1} = |I_{n+1}|$$

(здесь $g^{(m_1+1)\cdots(m_n+1)}$ — степень элемента g в кольце $(G,\times)$).

Пусть $i_m\in I_m$, $i_n\in I_n$ $(n>m)$. Будем говорить, что i_n является продолжением i_m, если существует такое подмножество индексов $\{i_m, i_{m+1},\ldots,i_n,\ldots\}$, что $i_k\in I_k$ и $\mathrm{t}(R_{i_{k+1}})\geqslant \mathrm{t}(R_{i_k})$ для любого $k\in\{m,\ldots,n-1\}$.

Нетрудно убедиться, что для любого $n\in\mathbb{N}$ и любого $i\in I_{n+1}$ найдётся такое $j\in I_n$, что i является продолжением j. Докажем, что существует такое натуральное число n, что $\mathrm{t}(R_i)$ — идемпотентный тип для любого $i\in I_n$. Допустим противное, т. е. что для любого $n\in\mathbb{N}$ найдётся $\alpha_n\in I_n$, для которого $\mathrm{t}(R_{\alpha_n})$ — идемпотентный тип. Тогда для любого $n>1$ найдётся $i_1^{(n)}\in I_1$, для которого α_n является продолжением $i_1^{(n)}$.

Так как множество I_1 конечно, то существует индекс i_1, для которого выполняется следующее условие:

для любого $n>1$ найдётся $\alpha_n\in I_i$, такое что

$$\mathrm{t}(R_{\alpha_n}) \text{ — неидемпотентный тип и } \alpha_n \text{ является продолжением } i_1. \qquad (1)$$

Допустим, что построена цепочка индексов $i_1,\ldots,i_m$ $(i_k\in I_k,\ k=1,\ldots,m)$, в которой каждый член i_k является продолжением предыдущего и удовлетворяет условию (1) (при замене 1 на k). Так как множество I_{m+1} конечно, то в нём существует индекс i_{m+1}, являющийся продолжением i_m и удовлетворяющий условию (1). Таким образом получаем бесконечную цепочку $i_1,\ldots,i_m,\ldots$

($i_m \in I_m$, $m \in \mathbb{N}$), каждый член которой является продолжением предыдущего и удовлетворяет условию (1).

Так как $g \in \underset{-}{G}^{\circ}$, то для любого $n \in N$ и для любого $i \in I_n$ если $\mathrm{t}(R_i)$ — идемпотентный тип, то $\mathrm{t}(R_i)$ содержит конечное количество нулей. Поэтому если индекс $\alpha \in I_n$ является продолжением $i \in I_m$ ($n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$) и $\mathrm{t}(R_\alpha)$ — неидемпотентный тип, то и $\mathrm{t}(R_i)$ — неидемпотентный тип. Следовательно, для любого $m \in \mathbb{N}$ тип $\mathrm{t}(R_{i_m})$ неидемпотентен, и значит,

$$\mathrm{t}(R_{i_{m+1}}) \geqslant \mathrm{t}(R_{i_m}) \cdot \mathrm{t}(R_{i_m}) > \mathrm{t}(R_{i_m}).$$

Поэтому $i_{m+1} \neq i_m$. Следовательно, группа R_{i1} удовлетворяет условию (c), что противоречит тому, что $g \in \underset{-}{G}$.

Таким образом, существует такое натуральное число n, что $\mathrm{t}(R_i)$ — идемпотентный тип для любого $i \in I_n$.

Если $g \in \underset{\equiv}{G}$ ($\subseteq \underset{-}{G}^{\circ}$), т. е. $I_1 \subseteq \underset{\equiv}{I}$, то $I_n = \varphi$. Это значит, что $g^m = 0$ при некотором натуральном m. Следовательно, $\underset{\equiv}{G} \subseteq N(G, \times)$.

Если g — произвольный элемент из $\underset{-}{G}^{\circ}$, то

$$g^m \in G_\circ \cap \underset{-}{G}^{\circ} = \bigcap_p pG_\circ \cap \underset{-}{G}.$$

Пусть $g^m = g_1 + \ldots + g_s$, где $0 \neq g_k \in \bigcap\limits_p pR_{jk}$, R_{jk} — группа идемпотентного типа, не удовлетворяющая условию (c) ($k = 1, \ldots, s$). Рассмотрим множество $I^{(s)} = I^{(jk)} \cup \ldots \cup I^{(js)}$ и группу $G^{(s)} = \bigoplus\limits_{i \in I^{(s)}} R_i$. Так же, как в доказательстве леммы 6.11, показывается, что $G^{(s)}$ — идеал кольца $(G, \times)$, содержащий элемент g^m, и множество $T\big(I^{(s)}\big)$ содержит лишь конечное число типов. Так как ни одна из групп R_{jk} ($k = 1, \ldots, s$) не удовлетворяет условию (c), то множество $I^{(s)}$ конечно. Так как $g^m \in \bigcap\limits_p pG^{(s)}$, то по лемме 6.11 g^m является квазирегулярным элементом кольца $\big(G^{(s)}, \times\big)$. Но

$$g + (-g - g^2 - \ldots - g^{m-1}) - g \times (-g - g^2 - \ldots - g^{m-1}) = g^m.$$

Значит, по лемме 6.6 g является квазирегулярным элементом кольца $(G, \times)$. Следовательно, $\underset{-}{G}^{\circ} \subseteq R(G, \times)$.

Из того что $\times$ — произвольное умножение на G, следует, что $\underset{\equiv}{G} \subseteq N^*(G)$ и $\underset{-}{G}^{\circ} \subseteq R^*(G)$.

Докажем обратные включения. Так же, как и в теореме 6.12, доказывается, что

$$R^*(G) \subseteq G^{\circ}, \tag{2}$$

$$N^*(G) \subseteq \underset{=}{G}. \tag{3}$$

Пусть $g = g_1 + \ldots + g_m$, где $0 \neq g_k \in R_{ik}$, $i_k \in I$ ($k = 1, \ldots, m$).

Допустим, среди индексов $i_1, \ldots, i_m$ какой-то не принадлежит $\underline{I}$, пусть это i_1. Тогда существует такое счётное множество индексов $F = \{j_1, \ldots, j_n, \ldots\}$, что $i_1 = j_1$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо, что $\mathrm{t}(R_{jn}) \geqslant \mathrm{t}(R_{jn}) \cdot \mathrm{t}(R_{jn})$. Без потери общности можно считать, что $i_2, \ldots, i_m \notin F$. Запишем группу G в виде $G = G_F \oplus G'$, где $G_F = \bigoplus\limits_{i \in F} R_i$, $G' = \bigoplus\limits_{i \in I \setminus F} R_i$. Тогда $g = g_1 + g'$, где $g' \in G'$. Покажем, что $g \notin R^*(G)$. Так как по лемме 3.1 $R^*(G) \subseteq R^*(G_F) \oplus R^*(G')$, то достаточно доказать, что $g_1 \notin R^*(G_F)$.

Обозначим $R_{jn} = R_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и запишем группу G_F в виде $G_F = \bigoplus\limits_{n \in \mathbb{N}} R_n a_n$, где элементы a_n $(n \in \mathbb{N})$ выбраны таким образом, что $\chi(a_{n+1}) \geqslant \chi(a_n) \cdot \chi(a_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Определим ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на G_F, положив $a_n \times a_k = a_{n+k}$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$.

Это определение корректно, так как

$$\chi(a_{n+k}) \geqslant \chi(a_{n+k-1}) \cdot \chi(a_{n+k-1}) \geqslant \chi(a_n) \cdot \chi(a_k).$$

Пусть $g_1 = r_1 a_1$, $r_1 \neq 0$. Допустим, что $g \in R(G_F, \times)$. Тогда существует элемент $b = b_1 a_1 + \ldots + b_1 a_1 \in G_F$ $(b_k \in R_k)$, для которого выполняется соотношение

$$g_1 + b - g_1 \times b = 0,$$

то есть верна система равенств

$$\begin{cases} r_1 a_1 + b_1 a_1 = 0, \\ b_2 a_2 - r_1 b_1 a_2 = 0, \\ b_3 a_3 - r_1 b_2 a_3 = 0, \\ \ldots \\ b_x n a_n - r_1 b_{n-1} a_n = 0, \\ -r_1 b_n a_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_1 = 0$, т. е. $b = 0$ и, значит, $g_1 = 0$, что противоречит выбору элемента g_1. Следовательно, $g_1 \in R^*(G_F)$, и поэтому $g \notin R^*(G)$. Следовательно, $R^*(G) \in \underline{G}$, и в силу (2)

$$R^*(G) \subseteq G^\circ \cap \underline{G} = \underline{G}^\circ.$$

Из (3) и того, что $N^*(G) \subseteq R^*(G)$, следует, что

$$N^*(G) \subseteq \underline{\underline{G}} \cap \underline{G} = \underline{\underline{\underline{G}}}. \qquad \square$$

III. Аддитивные группы полупростых и радикальных колец

7. Полупростые нередуцированные группы без кручения

Группа называется полупростой, если на ней существует полупростое ассоциативное кольцо. Проблема изучения полупростых групп сформулирована Бьюмонтом и Лоувером в [4].

В разделе 4 было показано, что если G — нередуцированная группа без кручения, то $R^*(G) = 0$. В [6] ставится вопрос о том, реализуется ли абсолютный радикал такой группы в качестве радикала некоторого ассоциативного кольца на ней, т. е. является ли данная группа полупростой. В данном разделе приводятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы нередуцированная группа без кручения была полупростой.

В этом разделе рассматриваем только ассоциативные кольца, и слово «кольцо» здесь означает «ассоциативное кольцо».

Пусть нередуцированная группа G представлена в виде $G = A \oplus D$, где A — редуцированная, D — ненулевая делимая группы и ранг группы D равен m. Показано, что если ранг D конечен, то G является полупростой тогда и только тогда, когда полупростой является группа A. В этом случае получено описание радикала произвольного кольца на G.

Для описания полупростых групп в случае, когда m бесконечно, введём понятие m-полупростой группы. Группу A назовём m-полупростой, если на ней можно определить кольцо, в котором существует такой полупростой идеал A^*, что фактор-кольцо A/A^* разложимо в подпрямое произведение m колец без кручения, ранг каждого из которых не превосходит m (может быть нулевым). Из этого определения следует, что m-полупростыми являются, в частности, все группы, ранг которых не более 2^m.

Показано, что если m бесконечно, то группа G является полупростой тогда и только тогда, когда A — m-полупростая группа.

Если A и B — подмножества кольца $(G, \times)$, то

$$\operatorname{Ann}_A B = \{a \in A \mid a \times b = 0 \text{ для всех } b \in B\};$$

если $g \in G$, то

$$\operatorname{Ann}_A g = \{a \in A \mid a \times g = 0\}.$$

Пусть $G = A \oplus B$, $(G, \times)$ — кольцо. Определим умножение на A следующим образом: для любых $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \times_A a_2 = \pi_A(a_1 \times a_2).$$

Будем называть $\times_A$ умножением, индуцированным на A умножением $\times$.

Лемма 7.1. *Пусть $G = A \oplus B$, $(G, \times)$ — кольцо, B — идеал кольца $(G, \times)$. Тогда*

1) $(G/B, \times) \cong (A, \times_A)$;
2) $R(G, \times) \subset R(A, \times_A) \oplus B$;
3) *если B — квазирегулярный идеал, то $R(G, \times) = R(A, \times_A) \oplus B$;*
4) *если J — идеал кольца $(G, \times)$, то $\pi_A(J)$ — идеал кольца $\pi_A(J)$.*

Доказательство.

1. Легко убедиться, что π_A — эпиморфизм кольца $(G, \times)$ на кольцо $(A, \times_A)$ с ядром B.

2. Так как $\pi_A\big(R(G, \times)\big) \subset R(A, \times_A)$ [1], то $R(G, \times) \subset R(A, \times_A) \oplus B$.

3. Покажем, что $J = R(A, \times_A) \oplus B$ — квазирегулярный идеал $(G, \times)$. Пусть $a \in R(A, \times_A)$, $b \in B$, $g \in G$. Тогда

$$\pi_A\big((a+b) \times g\big) = \pi_A\big(a \times \pi_A(g)\big) = a \times_A \pi_A(g) \in R(A, \times_A),$$

следовательно, J — идеал $(G, \times)$. Так как $a \in R(A, \times_A)$, то существует такой элемент $c \in A$, что $a \circ c = a + c - a \times c = b_1 \in B$, где $\circ$ — круговая композиция в кольце $(G, \times)$. Следовательно,

$$(a+b) \circ (c-b) = (a+b) + (c-b) - (a+b) \times (c-b) = b_1 - b \times c + b^2 = b_2 \in B.$$

Так как B — квазирегулярный идеал, то $a + b$ является квазирегулярным элементом кольца $(G, \times)$ по лемме 6.6. Значит, J — квазирегулярный идеал $(G, \times)$, т. е. $J \subset R(G, \times)$. Обратное включение доказано в пункте 2.

4. Пусть $c \in \pi_A(J)$. Тогда для некоторого $b \in B$ элемент $c+b$ принадлежит J. Если $a \in A$, то

$$(c+b) \times a = \pi_A(c \times a) + \pi_B(c \times a) + b \times a \in J.$$

Так как $\pi_B(c \times a) + b \times a \in B$, то $c \times_A a = \pi_A(c \times a) \in \pi_A(J)$. Аналогично $a \times_A c \in \pi_A(J)$. Следовательно, $\pi_A(J)$ — идеал кольца $(A, \times)$. $\square$

Лемма 7.2. *Пусть $G = A \oplus B$ — прямая сумма групп, $(G, \times)$ — кольцо на G, B — полупростой идеал кольца $(G, \times)$ с единицей e. Тогда*

$$R(G, \times) = \{a - a \times e \mid a \in R(A, \times_A)\}.$$

Доказательство. Отметим сначала, что для любого элемента $g \in G$

$$g \times e = e \times g. \tag{1}$$

В самом деле, $(e \times g) \times e = e \times (g \times e)$ для любого $g \in G$, и из того что $e \times g$ и $g \times e$ принадлежат B, следует равенство (1).

Пусть

$$J = \{a - a \times e \mid a \in R(A, \times_A)\}.$$

Покажем, что J — правый идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $a - a \times e \in J$ ($a \in \in R(A, \times_A)$), и пусть $b \in B$. Тогда в силу (1)

$$(a - a \times e) \times b = (a - a \times e) \times (b \times e) = (a \times e - a \times e \times e) \times b = 0.$$

Пусть теперь $c \in A$. Тогда

$$(a - a \times e) \times c = a \times c - (a \times c) \times e = a \times c - \big(\pi_A(a \times c) + \pi_B(a \times c)\big) \times e =$$
$$= a \times c - \pi_A(a \times c) \times e - \pi_B(a \times c) = \pi_A(a \times c) - \pi_A a(a \times c) \times e =$$
$$= a \times_A c - (a \times_A c) \times e.$$

Так как $a \in R(A, \times_A)$, то и $a \times_A c \in R(A, \times_A)$. Следовательно, $(a - a \times e) \times c \in J$. Таким образом, J — правый идеал $(G, \times)$.

Покажем, что идеал J квазирегулярен. Пусть $a - a \times e \in J$. Тогда, так как $a \in R(A, \times_A)$, существует такой элемент $c \in A$, что $a + c - a \times_A c = 0$. Так как по доказанному выше $(a - a \times e) \times (c \times e) = 0$, то, используя (1), получаем

$$(a - a \times e) + (c - c \times e) - (a - a \times e) \times (c - c \times e) =$$
$$= a - a \times e + c - c \times e - a \times c + a \times c \times e =$$
$$= \big(a + c - \pi_A(a \times c)\big) - \pi_B(a \times c) - (a + b) \times e + (a \times c) \times e =$$
$$= -\pi_A(a \times c) - (a + c) \times e + \pi_A(a \times c) \times e + \pi_B(a \times c) =$$
$$= -e \times \big(a + c - \pi_A(a \times c)\big) = 0.$$

Следовательно, $c - c \times e$ является квазиобратимым элементом к $a - a \times e$, и значит, J — квазирегулярный идеал $(G, \times)$. Таким образом, $J \subset R(G, \times)$.

Докажем обратное включение. Пусть $g \in R(G, \times)$, и пусть $g = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда $g \times e \in R(G, \times) \cap B = R(B, \times) = 0$, т. е. $g \times e = a \times e + b \times e = 0$. Следовательно, $b \times e = -a \times e$, и значит, $g = a - a \times e$. По лемме 7.1 получаем, что $R(G, \times) \subset R(A, \times_A) \oplus B$, следовательно, $a \in R(A, \times_A)$. Таким образом, $R(G, \times) \subset J$. □

Пусть D — делимая группа конечного ранга и $(D, \times)$ — кольцо на ней. По основной теореме Веддерберна о сепарабельных конечномерных алгебрах существует разложение $(D, \times) = S \oplus N$ векторного пространства $(D, \times)$ в прямую сумму векторных пространств. Здесь S — полупростая подалгебра с единицей в алгебре D, N — радикал D, обязательно нильпотентный. Эти обозначения будем использовать в дальнейшем.

Теорема 7.3. *Пусть $G = A \oplus D$ — прямая сумма редуцированной группы A и делимой группы D конечного ранга. Пусть $(G, \times)$ — кольцо и для идеала $(D, \times)$ имеет место разложение $(D, \times) = S \oplus N$. Пусть e — единица подалгебры S и $B = \{a - a \times e \mid a \in R(A, \times_A)\}$. Тогда $R(G, \times) = B + N$.*

Доказательство. Так как $N = R(D, \times)$, то $N = R(G, \times) \cap D$, следовательно, N — нильпотентный идеал кольца $(G, \times)$. Значит, $R(G, \times) = R(A \oplus S, \times_{A \oplus S}) \oplus N$. Из леммы 7.1 следует, что $(S, \times_{A \oplus S}) = (S, \times)$ — полупростой идеал кольца $(A \oplus S, \times_{A \oplus S})$ с единицей e. Следовательно, по лемме 7.2

$$R(A \oplus S, \times_{A \oplus S}) = \{a - a_{A \oplus S} e \mid a \in R(A, \times_A)\} + N,$$

откуда следует, что $R(G, \times) = B + N$. □

Теорема 7.4. *Пусть $G = A \oplus D$ — прямая сумма редуцированной группы A и делимой группы D конечного ранга. Группа G является полупростой тогда и только тогда, когда полупростой является группа A.*

Доказательство. Если A — полупростая группа, то определим полупростое кольцо $(A, \times)$ и кольцо $(D, \times)$ как прямую сумму полей, изоморфных полю рациональных чисел. Определяя кольцо $(G, \times)$ как прямую сумму полупростых идеалов $(A, \times) \oplus (D, \times)$, получим полупростое кольцо G.

Обратно, если на G существует полупростое кольцо $(G, \times)$, то в нём идеал $(D, \times)$ является полупростым. Следовательно, в разложении $(D, \times) = S \oplus N$ идеал N является нулевым. Значит, согласно теореме 7.3

$$R(G, \times) = \{a - a \times e \mid a \in R(A, \times_A)\} = 0,$$

где e — единица идеала $D = S$. Так как для любого $a \in R(A, \times_A)$ элемент $a \times e$ принадлежит D, то из равенства $a - a \times e = 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, получаем, что $R(A, \times_A) = 0$, и следовательно, $(A, \times_A)$ — полупростое кольцо на A. Значит, группа A является полупростой. $\square$

Следствие 7.5. *Пусть $G = A \oplus D$, где A — редуцированная группа, D — делимая группа конечного ранга. Пусть $R^*(A) \neq 0$. Тогда G не является полупростой.*

Следствие 7.6. *Пусть $G = A \oplus D$, где A — редуцированная алгебраически компактная группа, D — делимая группа конечного ранга. Тогда G не является полупростой.*

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из того, что для редуцированной алгебраически компактной группа A имеет место равенство $R^*(A) = \bigcap pA \neq 0$ (теорема 5.3). $\square$

Замечание 7.7. В [6] отмечается, что даже для такой группы, как $J_p \oplus \mathbb{Q}$, неизвестно, является ли она полупростой. Следствие 7.6 даёт отрицательный ответ на этот вопрос.

Теперь рассмотрим группы, делимая часть которых имеет бесконечный ранг.

Лемма 7.8. *Пусть $G = A \oplus D$, где A — редуцированная группа, D — делимая группа бесконечного ранга m. Пусть группа G полупроста. Тогда группа A является m-полупростой.*

Доказательство. Пусть $(G, \times)$ — полупростое кольцо. Запишем группу D в виде $D = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} e_i$, где $|I| = m$, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

Рассмотрим отображение $\varphi \colon G \to \prod_m D$, определяемое следующим образом: $\varphi(g) = (g \times e_i)_{i \in I}$. Обозначим $A^* = \operatorname{Ker} \varphi$. Нетрудно убедиться, что $A^* = \operatorname{Ann}_G D$ и A^* является идеалом кольца $(G, \times)$. Так как $(D, \times)$ — идеал полупростого кольца $(G, \times)$, то $(D, \times)$ полупросто, и следовательно, $A^* \cap D = 0$. Без потери общности можно считать, что A^* содержится в A [2]. Очевидно,

A^* — идеал кольца $(G, \times)$, а значит, и кольца $(A, \times)$. В силу полупростоты кольца $(G, \times)$ идеал A^* является полупростым.

Для произвольного $i \in I$ рассмотрим отображение $\varphi_i \colon G \to D$, определяемое следующим образом: $\varphi_i(g) = g \times e_i$. Легко убедиться, что $\operatorname{Ker} \varphi_i = \operatorname{Ann}_G e_i$ и $|G / \operatorname{Ann}_G e_i| \leqslant |D| = m$.

Рассмотрим теперь подгруппы $G_i = \operatorname{Ann}_G e_i + (\operatorname{Ann}_G e_i) \times G$ и $\bar{G}_i$ — сервантную подгруппу, порождённую G_i. Так как $\operatorname{Ann}_G e_i$ — левый идеал $(G, \times)$, то G_i является двухсторонним идеалом этого кольца. Покажем, что $\bar{G}_i$ также является идеалом кольца $(G, \times)$. Пусть $c \in \bar{G}_i$. Тогда $c = rc'$, где r — некоторое рациональное число $c \in G$. Пусть $g \in G$. Тогда $c \times g = rc' \times g = r(c' \times g) \in \bar{G}_i$ и $g \times c = r(g \times c') \in \bar{G}_i$, так как $c' \times g \in G_i$ и $g \times c' \in G_i$.

По утверждению 4) леммы 7.1 $A_i = \pi_A(\bar{G}_i)$ является идеалом кольца $(A, \times_A)$. Рассмотрим фактор-кольцо $(A/A_i, \times_A)$. Так как $\operatorname{Ann}_G e_i \subset G \subset \bar{G}_i$, то $|G/\bar{G}_i| \leqslant m$. Для фактор-группы $G/\bar{G}_i$ имеет место изоморфизм $G/\bar{G}_i = A/A_i \oplus D/D_i$, следовательно, $|A/A_i| \leqslant m$. Так как A_i есть пересечение подгрупп $\bar{G}_i$ и A, сервантных в группе без кручения G, то A_i сервантна в G, а значит, и в A. Следовательно, A/A_i — кольцо без кручения.

Рассмотрим теперь отображение $\alpha \colon G \to \prod_{i \in I} G/\bar{G}_i$, при котором $\varphi(g) = (a + A_i\bar{G}_i)_{i \in I}$ для любого $g \in G$. Нетрудно убедиться, что это отображение является гомоморфизмом кольца $(G, \times)$ в прямом произведении $\prod_{i \in I} (G/\bar{G}_i, \times)$ колец $(G/\bar{G}_i, \times_A)$, $\operatorname{Ker} \alpha = \bigcap_{i \in I} G_i$ и $\operatorname{Im}(\pi_{G/\bar{G}_i}) = G/\bar{G}_i$ для всех $i \in I$. Очевидно, $A^* \subset \operatorname{Ker} \alpha$.

Докажем обратное включение. Пусть $g \in \bigcap \bar{G}_i$, $d \in D$, и пусть $i \in I$. Элемент g представим в виде $g = r_i(c_i + f \times g_i)$, где $r_i \in \mathbb{Q}$, $c_i, f_i \in \operatorname{Ann}_G$, $e_i, g_i \in G$. Обозначим $F_i = \bigoplus_{j \neq i} \mathbb{Q} e_j$. Тогда $g \times d = r_j c_j \times d + r_i f_i \times (g_i \times d) \in F_i$. Так как индекс $i \in I$ произволен, $g \times d \in \bigcap_{i \in I} F_i = 0$. Следовательно, $g \in A^*$ и $\bigcap_{i \in I} \bar{G}_i \subset A^*$.

Таким образом, $\operatorname{Ker} \alpha = \bigcap_{i \in I} G_i = A^*$ и фактор-кольцо $(G/A^*, \times)$ разложимо в подпрямую сумму колец без кручения $(G/\bar{G}_i, \times_A)$, мощность каждого из которых не более m.

Так как $G \cong A/A^* \oplus D$, то $(A/A^*, \times) \cong (G/d, \times)$, и значит, кольцо $(A/A^*, \times)$ является подпрямым произведением некоторых колец A_i $(i \in I)$, ранг каждого из которых не превосходит ранг $G/\bar{G}_i$, т. е. не превосходит ранг m. □

Лемма 7.9. *Пусть $G = A \oplus D$, где D — делимая группа бесконечного ранга m, A — группа, ранг которой не больше чем m. Пусть на группе A определено кольцо $(A, \times)$. Тогда кольцо $(A, \times)$ может быть вложено как подкольцо в кольцо $(G, \times)$, для которого выполняются следующие условия*:

1) *D — полупустой идеал кольца $(G, \times)$;*
2) *для любого ненулевого элемента $g \in G$ существует такой элемент $d \in D$, что $g \times d \neq 0$.*

Доказательство. Кольцо $(A, \times)$ вкладывается в кольцо $(\bar{A}, \times)$ на делимой оболочке $\bar{A}$ группы A (теорема 1.1). Пусть $\bar{A} = \bigoplus\limits_{j \in J} \mathbb{Q} a_j$, $D = \bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} a_i$, $|J| \leqslant m$, $|I| = m$, и пусть $a_j \times a_s = \sum\limits_{i \in I} r_{js}^{(t)} a_t$ для произвольных $j, s \in J$ ($r_{js}^{(t)} \in \mathbb{Q}$ и $r_{js}^{(t)} = 0$ почти для всех $t \in J$).

Пусть K — некоторое множество индексов мощности m, W — множество ассоциативных слов в алфавите $\{x_j, y_k \mid j \in J,\ k \in K\}$, не содержащих подслов вида x_j, x_s $(j, s \in J)$, и пусть $F = \bigoplus\limits_{w \in W} \mathbb{Q} w$.

Рассмотрим алгебру $(F, \bullet)$ над $\mathbb{Q}$, определив для любых $w_i, w_l \in W$ произведение $w_i \bullet w_l$ как результат приписывания слова w_l к слову w_i справа и замены в полученном слове подслова вида $x_j x_s$ (если оно есть) на элемент $\sum\limits_{t \in J} r_{js}^{(t)} x_t$ $(j, s \in J)$. Алгебра $(F, \bullet)$ изоморфна фактор-алгебре алгебры $\mathbb{Q}[x_j, y_k]$, порождённой множеством всех ассоциативных слов в алфавите $\{x_j, y_k \mid j \in J,\ k \in K\}$, по идеалу, порождённому множеством $\left\{x_j x_s - \sum\limits_{t \in J} r_{js}^{(t)} x_t \;\middle|\; j, s \in J\right\}$.

Пусть $\bar{W}$ — множество ассоциативных слов из W, содержащих хотя бы одно подслово вида y_k $(k \in K)$. Очевидно, мощность $\bar{W}$ равна m. Занумеруем слова множества $\bar{W}$ индексами из I: $\bar{W} = \{w_i \mid i \in I\}$. Тогда группу F можно записать в виде $F = \bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} x_j \oplus \bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} w_i$.

Отображение $\varphi\colon F \to \bar{A} \oplus D$, при котором $\varphi(x_j) = a_j$; $\varphi = (w_i) = e_i$ $(j \in J$, $i \in I)$ является изоморфизмом групп. Следовательно, на группе $\bar{A} \oplus D$ можно определить кольцо $(\bar{A} \oplus D, \times)$ так, что φ становится изоморфизмом колец $(F, \bullet)$ и $(\bar{A} \oplus D, \times)$. Как нетрудно убедиться, $(A, \times)$ и $(G, \times)$ — подкольца кольца $(\bar{A} \oplus D, \times)$, причём подкольцо $(A, \times)$ совпадает с заданным кольцом на A, а D — идеал кольца $(G, \times)$, изоморфный идеалу $\Bigl(\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} w_i, \bullet\Bigr)$ кольца $(F, \bullet)$.

Покажем, что кольцо $\Bigl(\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} w_i, \bullet\Bigr)$ полупросто. Пусть

$$a = r_{i_1} w_{i_1} + \ldots + r_{i_n} w_{i_n} \in R\Bigl(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} w_i, \bullet\Bigr),$$

где $r_{i_1}, \ldots, r_{i_n} \in \mathbb{Q}$, $w_{i_1}, \ldots, w_{i_n}$ — различные слова из $\bar{W}$. Допустим, что $a \neq 0$. Пусть $r_{i_n} \neq 0$ и $l(w_{i_1}) \leqslant \ldots \leqslant l(w_{i_n})$, где $l(w_{i_t})$ — длина слова w_{i_t}.

Зафиксируем произвольный индекс $k \in K$ и рассмотрим элемент

$$a \cdot y_k = r_{i_1} w'_{i_1} + \ldots + r_{i_n} w'_{i_n},$$

где $w'_{i_t} = w_{i_t} \cdot y_k$ $(t = 1, \ldots, n)$. Очевидно, $a \cdot y_k$ также ненулевой элемент $R\Bigl(\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} w_i, \bullet\Bigr)$. Следовательно, существует элемент

$$b = s_{j_1} w_{j_1} + \ldots + s_{j_m} w_{j_m} \neq 0$$

$(s_{j_1}, \ldots, s_{j_m} \in \mathbb{Q},\ w_{j_1}, \ldots, w_{j_m} \in W)$, такой что

$$a \cdot y_k + b - a \cdot y_k \cdot b = 0. \tag{1}$$

Пусть $s_{j_m} \neq 0$ и $l(W_{j_1}) \leqslant \ldots \leqslant l(w_{j_m})$. Равенство (1) перепишем в виде

$$r_{i_1} w'_{i_1} + \ldots + r_{i_n} w_{i_n} + s_{j_1} w_{j_1} + \ldots + s_{j_m} w_{j_m} - r_{i_1} s_{j_1} w_{i_1} w_{j_1} - \ldots - r_{i_n} s_{j_m} w_{i_n} w_{j_m} = 0. \tag{2}$$

Поскольку $w'_{i_n} = w_{i_n} \cdot y_k$, то $l(w'_{i_n} w_{j_m}) = l(w'_{i_n}) + l(w_{j_m})$. Следовательно, среди слов левой части равенства (2) длина слова $w_{i_n} w_{j_m}$ максимальна. Так как слово w_{i_n} отлично от слов $w'_{i_1}, \ldots, w'_{i_{n-1}}$, то среди всех слагаемых левой части равенства (2) нет слагаемых с буквенной частью $w'_{i_n} w_{j_m}$. Поэтому из (2) следует, что $r_{i_n} s_{j_m} = 0$, что противоречит выбору чисел r_{i_n} и s_{j_m}. Значит, $a = 0$. Следовательно, $R\Big(\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} w_{l_1}, \bullet\Big) = 0$. Таким образом, идеал $(D, \times)$ кольца $(G, \times)$, изоморфный кольцу $\Big(\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} w_{l_1}, \bullet\Big)$, полупрост.

Докажем, что выполняется условие 2). Если произвольный элемент a кольца $(F, \bullet)$ отличен от нуля, то $a \cdot y_k$ — ненулевой элемент идеала $\Big(\bigoplus\limits_{i \in I} \mathbb{Q} w_{l_1}, \bullet\Big)$. Так как кольцо $(G, \times)$ изоморфно подкольцу кольца $(F, \bullet)$, то для любого ненулевого элемента g кольца $(G, \times)$ существует элемент d идеала $(D, \times)$, такой что $g \times d \neq 0$. □

Лемма 7.10. *Пусть $G = A \oplus D$, где D — делимая группа бесконечного ранга m. Пусть на A существует кольцо $(A, \times)$, которое разложимо в подпрямое произведение m колец, ранг каждого из которых не больше m. Тогда кольцо $(A, \times)$ может быть вложено как подкольцо в полупростое кольцо $(G, \times)$.*

Доказательство. Пусть I — множество индексов мощности m, и пусть кольцо $(A, \times)$ разложимо в подпрямое произведение колец $(A_i, \times)$ $(i \in I)$. Запишем группу D в виде $D = \bigoplus\limits_{i \in I} D_i$, где D_i — делимая группа ранга m. Обозначим $D = A_i \oplus D_i$. По лемме 7.9 кольцо $(A_i, \times)$ вкладывается в кольцо $(G_i, \times)$, в котором D_i является полупростым идеалом. Рассмотрим прямое произведение колец $\prod\limits_{i \in I} (G_i, \times)$ и покажем, что G является в нём подкольцом. Так как A и D — подгруппы (с точностью до изоморфизма) групп $\prod\limits_{i \in I} A_i$ and $\prod\limits_{i \in I} D_i$ соответственно, то G — подгруппа $\prod\limits_{i \in I} G_i$. Так как D_i является идеалом кольца G_i для всех $i \in I$, то нетрудно убедиться, что $D = \bigoplus\limits_{i \in I} D_i$ — идеал кольца $\prod\limits_{i \in I} G_i$. Поэтому для любых элементов $g = a + d$ и $g' = a' + b'$ группы G $(a, a' \in A,\ d, d' \in D)$

$$g \times g' = a \times a' + a \times d' + d \times a' + d \times d' \in A \oplus D.$$

Следовательно, G — подкольцо кольца $\Big(\prod\limits_{i \in I} G_i, \times\Big)$.

Покажем, что кольцо $(G, \times)$ полупросто. Пусть $g \in R(G, \times)$ и $g = (g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$. Допустим, что $g \neq 0$. Тогда существует такой индекс $i_0 \in I$, что

$g_{i_0} \neq 0$. Легко убедиться, что $g_{i_0} \in R(G_{i_0}, \times)$. По лемме 7.9 существует элемент $d_{i_0} \in D_{i_0}$, для которого $g_{i_0} \times d_{i_0} \neq 0$. Но

$$g_{i_0} \times d_{i_0} \in R(G_{i_0}, \times) \cap D_{i_0} = R(D_{i_0}, \times) = 0.$$

Из полученного противоречия следует, что $g = 0$, и значит, $R(G, \times) = 0$. Таким образом, кольцо $(G, \times)$ полупросто. □

Лемма 7.11. *Пусть $G = A \oplus D$, D — делимая группа бесконечного ранга m, A — m-полупростая группа. Тогда группа G полупроста.*

Доказательство. Так как A — m-полупростая группа, то на ней существует кольцо $(A, \times)$ и в нём полупростой идеал A^*, такой что фактор-кольцо $(A/A^*, \times)$ разложимо в подпрямую сумму m колец без кручения, ранг каждого из которых не превосходит m. По лемме 7.10 кольцо $(A/A^*, \times)$ вложимо в качестве подкольца в полупростое кольцо $\big((A/A^*) + D, \times\big)$. Определим умножение $\bar{\times}$ на группе G следующим образом: для любых $a, a_1 \in A$, $d, d_1 \in D$

$$a \mathbin{\bar{\times}} a_1 = a \times a_1, \quad a \mathbin{\bar{\times}} d_1 = (a + A^*) \times d,$$
$$d \mathbin{\bar{\times}} a = d \times (a + A^*), \quad d \mathbin{\bar{\times}} d_1 = d \times d_1.$$

Нетрудно убедиться, что умножение $\bar{\times}$ ассоциативно, $(A^*, \bar{\times})$ — идеал кольца $(\bar{G}, \bar{\times})$, совпадающий с $(A^*, \times)$ и, следовательно, полупростой. Ясно также, что фактор-кольцо $(G/A^*, \times)$ изоморфно кольцу $\big((A/A^*) + D, \times\big)$ и, значит, тоже полупросто. Следовательно, и само кольцо $(G, \bar{\times})$ является полупростым. Действительно, $(R(G, \bar{\times}) + A^*)/A^* \subset R(G/A^*, \bar{\times})$, поэтому $R(G, \bar{\times}) \subset A^*$. Таким образом,

$$R(G, \bar{\times}) = R(G, \bar{\times}) \cap A^* = R(A^*, \bar{\times}) = 0.$$

Значит, кольцо $(G, \bar{\times})$ полупросто, поэтому и группа G является полупростой. □

Следующая теорема является следствием лемм 7.8 и 7.11.

Теорема 7.12. *Пусть $G = A \oplus D$, где D — делимая группа бесконечного ранга m. Группа G полупроста тогда и только тогда, когда A является m-полупростой группой.*

Следствие 7.13. *Пусть $G = A \oplus D$, где D — делимая группа бесконечного ранга m и ранг группы A не превосходит 2^m. Тогда группа G является полупростой.*

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из того, что если ранг группы A не превосходит 2^m, то A является m-полупростой. Действительно, на A можно определить кольцо с нулевым умножением, которое является подкольцом нулевого кольца на делимой оболочке группы A. Последнее кольцо, в свою очередь, можно рассматривать как прямое произведение m делимых колец с нулевым умножением, ранг каждого из которых не превосходит m. □

8. Аддитивные группы радикальных колец

В этом разделе изучаются группы, на которых любое ассоциативное кольцо нильпотентно (радикально). Исследованию таких групп посвящены статьи Селе, Уиклеса, Винсонхалера и других. Мы, используя результаты предыдущей части, сведём указанную проблему к изучению редуцированных групп без кручения. Затем группы, на которых любое ассоциативное кольцо является ниль-кольцом (радикальным кольцом, нильпотентным кольцом), описываются в классах редуцированных алгебраически компактных, векторных сепарабельных и вполне разложимых групп без кручения.

Теорема 8.1. *Любое ассоциативное кольцо на группе G является ниль-кольцом (радикальным кольцом) тогда и только тогда, когда $G = G_1 \oplus D$, где D — делимая периодическая группа, G_1 — редуцированная группа без кручения, и любое ассоциативное кольцо на G_1 является ниль-кольцом (радикальным кольцом).*

Доказательство. Пусть любое ассоциативное кольцо на G является ниль-кольцом. Тогда $N^*(G) = R^*(G) = G$, и по лемме 4.1 $T(G) = \bigcap\limits_p pT(G)$. Следовательно, $T(G)$ — делимая группа и $G = G_1 \oplus D$, где G_1 — группа без кручения, $D = T(G)$. Так как $N^*(G) = N^*(G_1) \oplus D = G_1 \oplus D$ по теореме 4.3, то $G_1 = N^*(G_1)$, т. е. любое ассоциативное кольцо на G_1 является ниль-кольцом. Из предложения 5.2 следует, что G_1 — редуцированная группа.

Пусть теперь $G = G_1 \oplus D$, где D — делимая периодическая группа, G_1 — редуцированная группа без кручения, и любое ассоциативное кольцо на G_1 является ниль-кольцом. Тогда $N^*(G_1) = G_1$, и следовательно, $N^*(G) = N^*(G_1) \oplus D = G$, т. е. любое ассоциативное кольцо на G — ниль-кольцо. Для случая, когда на G существуют только рациональные кольца, доказательство аналогично. □

Теорема 8.2. *Среди редуцированных алгебраически компактных групп без кручения не существует группы A, на которой любое ассоциативное кольцо радикально (в частности, на которой любое ассоциативное кольцо является ниль-кольцом).*

Доказательство. Если A — редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, на которой любое ассоциативное кольцо радикально, то $R^*(A) = A = \bigcap\limits_p pA$. Следовательно, A — делимая группа, что противоречит условию. □

Теорема 8.3. *Пусть I — неизмеримое множество, $G = \prod\limits_{i \in I} R_i$ — редуцированная векторная сепарабельная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *любое ассоциативное кольцо на G нильпотентно;*
2) *любое ассоциативное кольцо на G является ниль-кольцом;*
3) *любое ассоциативное кольцо на G радикально;*
4) *G — прямая сумма конечного числа групп R_i неидемпотентных типов.*

Доказательство. То, что из 1) следует 2), а из 2) следует 3), очевидно. Предположим, что выполняется условие 3). Тогда $G = R^*(G)$. Используя теорему 6.12 и обозначения, введённые в её доказательстве, получаем, что

$$G_\circ \oplus \bigoplus_{i\in I_1} R_i = \bigcap_p pG_\circ \oplus \bigoplus_{i\in I_1}\Bigl(\bigcap_{p\in\Lambda_i} pR_i\Bigr).$$

Следовательно, $G_\circ = \bigcap_p pG_\circ$, и значит, $G_\circ = 0$, так как группа G редуцированна. Таким образом, среди групп R_i ($i \in I$) нет групп идемпотентного типа и $\bigcap_{p\in\Lambda_i} pR_i = R_i$ для всех $i \in I$. Так как группа G сепарабельна, она является конечной прямой суммой.

То, что условие 4) влечёт 1), следует из леммы 6.10. □

Теорема 8.4. *Пусть* $G = \bigoplus_{i\in I} R_i$ *— редуцированная вполне разложимая группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *любое ассоциативное кольцо на* G *является ниль-кольцом*;
2) *любое ассоциативное кольцо на* G *радикально*;
3) *каждая группа* R_i ($i \in I$) *имеет неидемпотентный тип, ни одна из групп* R_i *не удовлетворяет условию* (c).

Доказательство. То, что из 1) следует 2), очевидно. Пусть для группы G выполняется условие 2). Тогда

$$G = R^*(G) = \bigoplus_{i\in I}\Bigl(\bigcap_{p\in\Lambda_i} pR_i\Bigr),$$

откуда сразу видно, что ни одна из групп R_i ($i \in I$) не удовлетворяет условию (c). Так же, как в доказательстве теоремы 8.3, показывается, что каждая группа R_i имеет неидемпотентный тип.

Предположим теперь, что выполнено условие 3). Тогда $I = \underline{I}$ и $I = \underline{\underline{I}}$. Следовательно, $G = \bigoplus_{i\in \underline{I}\cap\underline{\underline{I}}} R_i = N^*(G)$, т. е. любое ассоциативное кольцо на G является ниль-кольцом. □

Следующий пример показывает, что условия «любое ассоциативное кольцо на G нильпотентно» и «любое ассоциативное кольцо на G является ниль-кольцом» для вполне разложимых групп G неэквивалентны.

Пример 8.5. Занумеруем все простые числа парами натуральных чисел. Тогда для группы без кручения A характеристика $\chi(a)$ произвольного элемента $a \in A$ будет иметь вид $\chi(a) = (k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{21}, k_{22}, \ldots)$.

Пусть m, n — натуральные числа, $R_{n,m}$ — группа без кручения ранга 1, содержащая такой элемент $a_{n,m}$, что в $\chi(a_{n,m})$ координаты $k_{n,i}$ равны m для любого $i \in \mathbb{N}$, а все остальные координаты нулевые. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим группу G_n следующим образом: $G_n = R_{n1} \oplus R_{n2} \oplus \ldots \oplus R_{nn}$ и рассмотрим группу $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Нетрудно видеть, что среди всех типов $\mathrm{t}(R_{ij})$ групп R_{ij} из разложения группы G сравнимыми с произвольным типом $\mathrm{t}(R_{n,m})$ являются только типы $\mathrm{t}(R_{n1}), \ldots, \mathrm{t}(R_{nn})$, т. е. ни одна из групп R_{nm} ($n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$) не удовлетворяют условию (c). По теореме 8.4 любое ассоциативное кольцо на G является ниль-кольцом.

Покажем, что на G существует ассоциативное кольцо, не являющееся нильпотентным. Запишем каждую из групп G_n ($n \in \mathbb{N}$) в виде $G_n = R_{n1}a_{n1} \oplus \ldots \oplus R_{nn}a_{nn}$. Определим умножение $\times$ на G, положив для любых натуральных чисел m, n, s, r

$$a_{nm} \times a_{sr} = \begin{cases} a_{n,m+r}, & \text{если} \quad n = s \quad \text{и} \quad m + r \leqslant n, \\ 0, & \text{если} \quad n \neq s \quad \text{или} \quad m + r > n. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что умножение $\times$ ассоциативно и для любого $n \in \mathbb{N}$ степень a_{n1}^n элемента a_{n1} в кольце $(G, \times)$ равна $a_{nn} \neq 0$, т. е. кольцо $(G, \times)$ не является нильпотентным.

Заметим, что в теоремах 8.3 и 8.4 нельзя опустить условие ассоциативности колец. В [7, теорема 3] доказывается, что если $G = R_1 \oplus R_2$, где R_1, R_2 — группы без кручения ранга 1 неидемпотентных типов, то любое (не обязательно ассоциативное) кольцо на G нильпотентно и его индекс нильпотентности не больше трёх. В доказательстве теоремы 3 в [7] допущена ошибка, эта теорема верна в предположении, что для групп R_1 и R_2 выполняются неравенства $\mathrm{t}(R_1) \cdot \mathrm{t}(R_2) \neq \mathrm{t}(R_i)$ ($i = 1, 2$).

Теорема 8.6. *Пусть $G = R_1 \oplus R_2 \oplus A$, где R_1, R_2 — группы без кручения ранга 1 неидемпотентных типов, такие что $\mathrm{t}(R_1) \cdot \mathrm{t}(R_2) = \mathrm{t}(R_1)$, A — произвольная группа. Тогда на группе G существует коммутативное (неассоциативное) кольцо с ассоциативными степенями, которое не является ниль-кольцом.*

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = R_1a_1 \oplus R_2a_2 \oplus A$, где $\chi(a_1) \cdot \chi(a_2) = \chi(a_1)$, R_1, R_2 — подгруппы аддитивной группы рациональных чисел. Определим умножение $\times$ на G, положив для любых элементов $b, c \in A$

$$a_1 \times a_1 = a_2 \times a_2 = a_1 \times c = c \times a_1 = a_2 \times c = c \times a_2 = b \times c = 0,$$
$$a_1 \times a_2 = a_2 \times a_1 = a_1.$$

Нетрудно убедиться, что $(G, \times)$ — коммутативное кольцо. Следовательно, $(G, \times)$ — кольцо с ассоциативными степенями, так как для любого $g \in G$ справедливо равенство $(g \times g) \times g = g \times (g \times g)$. Легко проверяется, что для элемента $g = a_1 + a_2 \in G$ выполнено $g^n = 2a_1 \neq 0$ при любом натуральном $n \geqslant 2$, т. е. $(G, \times)$ не является ниль-кольцом. □

Пример 8.7. Среди вполне разложимых и векторных сепарабельных групп без кручения существуют такие группы G, что любое ассоциативное кольцо на G нильпотентно, но существует неассоциативное кольцо на G, не являющееся ниль-кольцом. Пусть $G = R_1 \oplus R_2$, где R_1, R_2 — группы без кручения ранга 1 и

$\mathrm{t}(R_1) = (1, \infty, 1, \infty, 1, \ldots)$, $\mathrm{t}(R_2) = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$. Согласно теоремам 8.3 и 8.6 группа G обладает указанным свойством.

Литература

[1] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[3] Beaumont R. A. Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15. — P. 367—369.

[4] Beaumont R. A., Lawver D. A. Strongly semisimple abelian groups // Publ. J. Math. — 1974. — Vol. 53, no. 2. — P. 327—336.

[5] Czele T. Zur Theorie der Zeroringe // Math. Ann. — 1949. — B. 121. — S. 242—246.

[6] Eclof P. C., Mez H. C. Abelian groups and modules // Proc. of Udine Conf., Udine (Italy), 1994. — Berlin: Springer. — (CISM Courses and Lectures; Vol. 287).

[7] Feigelstock S. The nilstufe of the direct sum of rank 1 torsion free groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1973. — Vol. 24, no. 3-4. — P. 265—272.