Модули над кольцами формальных матриц*

П. А. КРЫЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, модуль.

Аннотация

Данная статья содержит как известные, так и новые результаты о модулях над кольцами формальных матриц. Основные результаты приведены с доказательствами.

Abstract

P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev, Modules over formal matrix rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 8, pp. 145—211.

This work contains some new and known results on modules over formal matrix rings. The main results are presented with proofs.

В теории колец заметную роль играют различные матричные кольца. Прежде всего это кольца формальных матриц. Кольца формальных матриц расширяют понятие кольца матриц порядка n над данным кольцом. Важный класс колец формальных матриц образуют кольца *контекста Мориты* (см., например, [42], [35, § 18C] или раздел 8 данной работы). Среди колец формальных матриц выделяются кольца треугольных матриц. Они часто появляются в теории представлений артиновых алгебр (см., например, [10]) и служат источником примеров колец с асимметричными свойствами (см., например, [29, 52]). Один параграф книги [19] посвящён кольцам треугольных матриц.

Любое кольцо с нетривиальными идемпотентами изоморфно некоторому кольцу формальных матриц. Кольцо эндоморфизмов разложимого модуля также является кольцом формальных матриц. Это говорит о целесообразности изучения колец формальных матриц. Они весьма полезны для решения некоторых задач о кольцах эндоморфизмов абелевых групп.

*Первый автор поддержан федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы, государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г. Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00693-а «Структурная теория колец».

Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 8, с. 145—211.

Изучение модулей над кольцами формальных матриц также представляет определённый интерес. Такие модули представляют собой конструкцию модуля «векторов-столбцов» или «векторов-строк». Примерами таких модулей являются столбцы или строки кольца матриц порядка n над некоторым кольцом.

В разделах 1 и 2 данной статьи приводятся общие свойства колец формальных матриц и модулей над ними. В разделах 3 и 4 изучаются различные подмодули модулей над кольцами формальных матриц. В разделах 5, 7 исследуются инъективные, плоские, проективные и наследственные модули над такими кольцами. В разделе 8 кратко излагаются известные результаты об эквивалентностях категорий модулей. При этом материал оформляется на базе определённого кольца формальных матриц. Раздел 9 содержит приложения к кольцам эндоморфизмов абелевых групп.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули предполагаются унитарными левыми, если не оговорено противное. Гомоморфизмы пишем слева от аргументов. За исключением раздела 9, композиция отображений $\alpha\colon X \to Y$ и $\beta\colon Y \to Z$ обозначается через $\alpha\beta$. Таким образом, $(\alpha\beta)(x) = \beta\bigl(\alpha(x)\bigr)$ для всех $x \in X$. (В разделе 9 предполагается, что $(\alpha\beta)(x) = \alpha\bigl(\beta(x)\bigr)$.) Категория всех левых модулей над кольцом T обозначается через T-mod. Мы часто используем известные способы превращения групп гомоморфизмов и тензорного произведения в модули, а также естественные изоморфизмы, связанные с этими объектами.

1. Построение и свойства колец формальных матриц

Определим *кольцо формальных матриц* (его называют также *кольцом обобщённых матриц*). Пусть даны два кольца R и S, R-S-бимодуль M и S-R-бимодуль N. Обозначим через K множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix},$$

где $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$. Относительно матричного сложения K является абелевой группой. Чтобы превратить K в кольцо, нужно уметь вычислять «произведение» $mn \in R$ и «произведение» $nm \in S$. Корректно это можно сделать следующим образом. Предположим, что даны бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$. Полагаем $\varphi(m \otimes n) = mn$ и $\psi(n \otimes m) = nm$ для всех $m \in M$, $n \in N$. Теперь матрицы из K можно умножать как в обычном кольце матриц:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr_1 + mn_1 & rm_1 + ms_1 \\ nr_1 + sn_1 & nm_1 + ss_1 \end{pmatrix},$$
$$r, r_1 \in R, \quad s, s_1 \in S, \quad m, m_1 \in M, \quad n, n_1 \in N.$$

Уточним, что rm_1, ms_1, nr_1, sn_1 — это соответствующие модульные произведения. Пусть также для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполнены равенства ассоциативности $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$. Тогда относительно указанных операций сложения и умножения K является кольцом. При проверке аксиом кольца нужно также учесть основные свойства тензорного произведения и бимодульность φ и ψ. Верно и обратное: если K — кольцо, то выполнены указанные соотношения ассоциативности. Кольцо K называется *кольцом формальных матриц* и также обозначается через

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Когда нужно подчеркнуть, что кольцо K построено с помощью гомоморфизмов φ и ψ, пишем $K(\varphi, \psi)$. Если $N = 0$ или $M = 0$, то K — кольцо треугольных матриц. Для его задания гомоморфизмы φ и ψ не нужны.

Образы I и J гомоморфизмов φ и ψ являются идеалами колец R и S соответственно — это *идеалы следа* кольца K. Будем говорить, что K — кольцо *с нулевыми идеалами следа*, в случае когда $\varphi = 0 = \psi$, т. е. $I = 0 = J$. Кольцо формальных треугольных матриц является кольцом с нулевыми идеалами следа. Договоримся через MN (NM) обозначать множество всех конечных сумм элементов вида mn (соответственно nm). Выполнены равенства

$$I = MN, \quad J = NM, \quad IM = MJ, \quad NI = JN.$$

Как правильно сформулировать проблему изучения колец формальных матриц?

Под изучением кольца

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

естественно понимать выяснение того, как свойства этого кольца зависят от свойств колец R и S, бимодулей M и N, гомоморфизмов φ и ψ.

Для удобства и сокращения записей мы отождествляем матрицы с соответствующими элементами. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

отождествляется с элементом $r \in R$ и т. п. Аналогичные соглашения принимаются для множеств матриц. Например, множество матриц

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

записывается в виде (X, Y) (или просто X при $Y = 0$). Аналогичные правила действуют для матриц с нулевой верхней строкой.

Если $M = 0 = N$, то $K = R \times S$ — прямое произведение колец. В основном, мы считаем, что кольца $R \times S$ — кольца формальных матриц. Заметим, что иногда кольца $R \times S$ не считаются кольцами формальных матриц, но в таком случае класс колец формальных матриц не всегда замкнут относительно фактор-колец и не содержит коммутативных колец.

Пусть T — некоторое кольцо. Сохраним в T прежнее сложение и определим новое умножение $\circ$ формулой $x \circ y = yx$, $x, y \in T$. В результате мы получим новое кольцо T°, называемое *противоположным* к T. Непосредственно проверяется, что кольцо, противоположное к

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R^\circ & N \\ M & S^\circ \end{pmatrix},$$

где N рассматривается как R°-S°-бимодуль, а M рассматривается как S°-R°-бимодуль. Попутно заметим, что

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} S & N \\ M & R \end{pmatrix}.$$

Если V — правый T-модуль, то соотношение $tv = vt$, $t \in T$, $v \in V$, задаёт на V структуру левого T°-модуля и наоборот.

Пусть K — некоторое кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

формальных матриц. Рассмотрим строение его идеалов и фактор-колец. Используя соглашение о записях матриц, можно записать равенство

$$K = \begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}.$$

При таком подходе действие соответствующих гомоморфизмов φ и ψ совпадает с умножением в кольце K. Если L — некоторый идеал кольца K, то непосредственно проверяется, что L совпадает с множеством матриц

$$\begin{pmatrix} eLe & eL(1-e) \\ (1-e)Le & (1-e)L(1-e) \end{pmatrix},$$

где eLe и $(1-e)L(1-e)$ — идеалы колец R и S соответственно, а $eL(1-e)$ и $(1-e)Le$ — подбимодули в M и N соответственно. Подгруппы, находящиеся в одной из четырёх позиций в L, совпадают с множествами соответствующих компонент всех элементов из L.

Образуем группу матриц $\bar{K}$:

$$\begin{pmatrix} eKe/eLe & eK(1-e)/eL(1-e) \\ (1-e)Ke/(1-e)Le & (1-e)K(1-e)/(1-e)L(1-e) \end{pmatrix}.$$

В действительности мы имеем кольцо формальных матриц $\bar{K}$, понимаемое в том широком смысле, о котором мы условились. Умножение матриц в $\bar{K}$ индуцируется умножением в K. Непосредственно проверяется, что отображение

$$K/L \to \bar{K}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} + L \to \begin{pmatrix} \bar{r} & \bar{m} \\ \bar{n} & \bar{s} \end{pmatrix},$$

является кольцевым изоморфизмом, где черта обозначает соответствующий смежный класс.

Если абстрактное кольцо T содержит идемпотент e, отличный от 0 и 1, то T канонически изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} eTe & eT(1-e) \\ (1-e)Te & (1-e)T(1-e) \end{pmatrix}$$

при соответствии

$$x \to \begin{pmatrix} exe & ex(1-e) \\ (1-e)xe & (1-e)x(1-e) \end{pmatrix}, \quad x \in T.$$

Класс колец формальных матриц совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей над всевозможными кольцами. Пусть $G = A \oplus B$ — правый модуль над некоторым кольцом T. Его кольцо эндоморфизмов канонически изоморфно кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} \mathrm{End}_T(A) & \mathrm{Hom}_T(B, A) \\ \mathrm{Hom}_T(A, B) & \mathrm{End}_T(B) \end{pmatrix}$$

с обычными операциями сложения и умножения матриц (там, где нужно, в качестве произведения берётся композиция гомоморфизмов). Понятно, что мы имеем дело с кольцом формальных матриц. Соответствующие бимодульные гомоморфизмы определяются как композиции.

Среди колец формальных матриц, помимо колец треугольных матриц, можно выделить ещё один интересный вид колец. Это кольца матриц со значениями в данном кольце R. Пусть R — некоторое кольцо и K_1 — «обычное» кольцо (2×2)-матриц над R. Кольцу K_1 соответствуют два совпадающих R-R-бимодульных изоморфизма

$$\omega \colon R \otimes_R R \to R, \quad x \otimes y \to xy.$$

Исходя из других бимодульных гомоморфизмов $R \otimes_R R \to R$, можно получать кольца (2×2)-матриц над R (как кольца формальных матриц), не изоморфные K_1.

Заметим, что каждый R-R-бимодульный эндоморфизм α бимодуля R совпадает с умножением кольца R на некоторый центральный элемент. Действительно, существуют такие элементы $s, t \in R$, что $\alpha(x) = sx$ и $\alpha(x) = xt$ для всех $x \in R$. При $x = 1$ получаем $s = t$. Поэтому $sx = xs$, т. е. s — центральный элемент. Рассмотрим некоторый R-R-бимодульный гомоморфизм $\varphi \colon R \otimes_R R \to R$ и запишем $\varphi = \alpha\omega$ для какого-то бимодульного эндоморфизма α кольца R. Взяв элемент $s \in Z(R)$ ($Z(R)$ обозначает центр кольца R), для которого $\alpha(x) = sx$, $x \in R$, получим, что $\varphi(x \otimes y) = sxy$, $x, y \in R$.

Предположим теперь, что

$$K(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} -$$

некоторое кольцо матриц с R-R-бимодульными гомоморфизмами

$$\varphi, \psi\colon R \otimes_R R \to R,$$

удовлетворяющими двум законам ассоциативности:

$$\varphi(x \otimes y)z = x\psi(y \otimes z), \quad \psi(x \otimes y)z = x\varphi(y \otimes z).$$

Пусть элементы $s, t \in Z(R)$ таковы, что

$$\varphi(x \otimes y) = sxy, \quad \psi(x \otimes y) = txy, \quad x, y \in R.$$

При $x = y = z = 1$ находим, что

$$s = \varphi(1 \otimes 1)1 = 1\psi(1 \otimes 1) = t, \quad \varphi = \psi.$$

Таким образом, в кольце $K(\varphi, \psi)$ умножение матриц выполняется по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + sbg & af + bh \\ ce + dg & scf + dh \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Обозначим это кольцо $K(\varphi, \psi)$ через K_s. Элемент s будем называть *множителем* кольца K_s. Верно и обратное. А именно, любой центральный элемент s кольца R определяет кольцо (2×2)-матриц над R, умножение в котором выполняется по правилу $(*)$. Следовательно, это кольцо K_s. Тривиальное кольцо K_s (когда $\varphi = \psi = 0$) получается при $s = 0$, «обычное» кольцо получается при $s = 1$.

Вернёмся к произвольным кольцам формальных матриц. Конкретное такое кольцо $K(\varphi, \psi)$ определяется с помощью двух бимодульных гомоморфизмов φ и ψ. Выбор иной пары гомоморфизмов приводит в общем случае к другому кольцу. Возникает задача о классификации колец формальных матриц в зависимости от соответствующих пар бимодульных гомоморфизмов. Говоря более точно, возникает следующая *проблема изоморфизма*. Пусть $K(\varphi, \psi)$ и $K(\varphi_1, \psi_1)$ — два кольца формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

с соответствующими бимодульными гомоморфизмами φ, ψ и φ_1, ψ_1. Как должны быть связаны гомоморфизмы φ, ψ и φ_1, ψ_1, чтобы существовал изоморфизм $K(\varphi, \psi) \cong K(\varphi_1, \psi_1)$? В общем случае эта проблема кажется довольно сложной. Рассмотрим её для колец матриц со значениями в данном кольце R.

Проблема изоморфизма для колец матриц K_s имеет следующий вид: если s и t — два центральных элемента кольца R, то при каких условиях кольца K_s и K_t будут изоморфны?

Центр кольца T обозначается через $Z(T)$. Следующая лемма проверяется прямым вычислением.

Лемма 1.1.

1. *Центр кольца формальных матриц*
$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$
состоит из всех диагональных матриц
$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$
где $r \in Z(R)$, $s \in Z(S)$, $rm = ms$, $nr = sn$ *для всех* $m \in M$ *и* $n \in N$.
2. *Пусть* $s \in Z(R)$. *Тогда*
$$Z(K_s) = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in Z(R) \right\}.$$

В этой части работы, посвящённой проблеме изоморфизма, мы не считаем прямые произведения $R \times S$ *кольцами формальных матриц.*

Лемма 1.2. *Если кольцо* R *не является кольцом формальных матриц, то* $K_0 \ncong K_s$ *для любого ненулевого центрального элемента* t.

Доказательство. Напомним, что K_0 — это кольцо K_s при $s = 0$. Допустим, что $K_0 \cong K_t$ для некоторого ненулевого $t \in Z(R)$. Зафиксируем кольцевой изоморфизм $f\colon K_0 \to K_t$. Пусть I — идеал
$$\begin{pmatrix} 0 & R \\ R & 0 \end{pmatrix}$$
кольца K_0, а J — идеал $f(I)$ кольца K_t. Непосредственно проверяется, что идеал J состоит из матриц
$$\begin{pmatrix} X & A \\ B & Y \end{pmatrix},$$
где X, Y, A, B — некоторые идеалы кольца R (они связаны между собой посредством элемента t).

Покажем, что A и B — собственные идеалы. Допустим, что $A = R$. Тогда
$$tR \subseteq X, \quad tR \subseteq Y, \quad t \in X, \quad t \in Y, \quad \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in J.$$
По лемме 1.1 также получаем, что
$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in Z(K_t), \quad f^{-1}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in I \cap Z(K_0) = 0.$$
Отсюда вытекает, что равенство $t = 0$ невозможно. Итак, $A \neq R$. Аналогично $B \neq R$.

Изоморфизм f индуцирует изоморфизм фактор-колец K_0/I и K_t/J. Первое кольцо изоморфно $R{\times}R$, а второе кольцо изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R/X & R/A \\ R/B & R/Y \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $R \times R$ — кольцо формальных матриц. Поэтому R — кольцо формальных матриц. Получено противоречие. $\square$

Лемма 1.3. *Пусть R — произвольное кольцо, α — его автоморфизм, s, v — центральные элементы кольца R, причём v обратим. Тогда*

$$K_s \cong K_{vs} \cong K_{\alpha(s)} \cong K_{v\alpha(s)}.$$

Доказательство. Изоморфизм $K_s \cong K_{vs}$ действует по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ v^{-1}c & d \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм $K_s \cong K_{\alpha(s)}$ действует по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ \alpha(c) & \alpha(d) \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм $K_s \cong K_{v\alpha(s)}$ получается из двух указанных изоморфизмов. $\square$

Следствие 1.4. *Если R — простое кольцо, то $K_s \cong K_t$ для любых двух ненулевых центральных элементов s, t.*

Доказательство. Так как центр простого кольца является полем, то утверждение вытекает из леммы 1.3. $\square$

Теорема 1.5. *Пусть R — коммутативное кольцо, s и t — некоторые его элементы, причём хотя бы один из них не является делителем нуля. Кольца K_s и K_t изоморфны в точности тогда, когда существуют такие обратимый элемент $v \in R$ и автоморфизм α кольца R, что $t = v\alpha(s)$.*

Доказательство. Достаточность условия содержится в лемме 1.3. Теперь допустим, что имеется изоморфизм $f\colon K_s \to K_t$. Согласно лемме 1.2 можно считать, что $s \neq 0$ и t — неделитель нуля. Изоморфизм f индуцирует изоморфизм центров $\alpha\colon Z(K_s) \to Z(K_t)$. На основании леммы 1.1 и соглашений об отождествлении матриц с элементами можно рассматривать α как автоморфизм кольца R. Рассмотрим идеал

$$sK_s = \begin{pmatrix} sR & sR \\ sR & sR \end{pmatrix}$$

кольца K_s. Его образом при действии f будет идеал кольца K_t, равный

$$f(s)K_t = \alpha(s)K_t = \begin{pmatrix} \alpha(s)R & \alpha(s)R \\ \alpha(s)R & \alpha(s)R \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм f также индуцирует изоморфизм фактор-колец

$$\bar{f}\colon K_s/sK_s \to K_t/\alpha(s)K_t.$$

Кольцо K_s/sK_s — тривиальное кольцо матриц (т. е. с множителем 0), а кольцо $K_t/\alpha(s)K_t$ — кольцо матриц с множителем $\bar{t} = t + \alpha(s)R$ над кольцом $R/\alpha(s)R$. Кольца R/sR и $R/\alpha(s)R$ изоморфны. Поэтому из леммы 1.2 вытекает, что $\bar{t} = 0$ или $t \in \alpha(s)R$. Таким образом, $t = \alpha(s)x$, $x \in R$. Рассматривая обратный изоморфизм f^{-1}, аналогично получим, что $s = \alpha^{-1}(t)y$, $y \in R$. Тогда

$$t = \alpha(s)x = t\alpha(y)x, \quad t(1 - \alpha(y)x) = 0, \quad x\alpha(y) = 1,$$

поскольку t — неделитель нуля. Поэтому элемент x обратим. Можно записать $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент, а α — автоморфизм кольца R. □

Следствие 1.6. *Пусть R — либо коммутативная область, либо коммутативное локальное кольцо и $s, t \in R$. Изоморфизм $K_s \cong K_t$ имеет место в точности тогда, когда существуют такие обратимый элемент $v \in R$ и автоморфизм α кольца R, что $t = v\alpha(s)$.*

Доказательство. В случае области утверждение непосредственно следует из теоремы 1.5. Если R — коммутативное локальное кольцо, то будем повторять рассуждения из доказательства теоремы 1.5, пока не получим равенство $t(1 - \alpha(y)x) = 0$. Далее согласно лемме 1.2 можно считать, что $t \neq 0$. Тогда элемент $1 - \alpha(y)x$ не обратим. Так как кольцо R локально, то элемент $\alpha(y)x$ обратим. Поэтому элемент x обратим. □

Вычислим радикал Джекобсона кольца формальных матриц. Радикал (Джекобсона) некоторого кольца T обозначается через $J(T)$. Будем использовать приведённые ниже свойства радикала. Правый идеал L кольца T лежит в $J(T)$ в точности тогда, когда элемент $1 - x$ обратим справа для любого элемента $x \in L$. Аналогичное утверждение верно для левых идеалов.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \text{ —}$$

произвольное кольцо формальных матриц. Определим четыре подбимодуля бимодулей M и N. Обозначим

$$A_{\mathrm{l}}(M) = \{m \in M \mid Nm \subseteq J(S)\}, \quad A_{\mathrm{r}}(M) = \{m \in M \mid mN \subseteq J(R)\},$$
$$A_{\mathrm{l}}(N) = \{n \in N \mid Mn \subseteq J(R)\}, \quad A_{\mathrm{r}}(N) = \{n \in N \mid nM \subseteq J(S)\}.$$

Обозначим также

$$A(M) = A_{\mathrm{l}}(M) \cap A_{\mathrm{r}}(M), \quad A(N) = A_{\mathrm{l}}(N) \cap A_{\mathrm{r}}(N).$$

Теперь образуем следующие множества матриц:

$$A_{\mathrm{l}}(K) = \begin{pmatrix} J(R) & A_{\mathrm{l}}(M) \\ A_{\mathrm{l}}(N) & J(S) \end{pmatrix}, \quad A_{\mathrm{r}}(K) = \begin{pmatrix} J(R) & A_{\mathrm{r}}(M) \\ A_{\mathrm{r}}(N) & J(S) \end{pmatrix},$$

$$A(K) = \begin{pmatrix} J(R) & A(M) \\ A(N) & J(S) \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что получены левый, правый и двусторонний идеалы кольца K.

Теорема 1.7. *Верны равенства*

$$J(K) = A_{\mathrm{l}}(K) = A_{\mathrm{r}}(K) = A(K).$$

Доказательство. Достаточно доказать включения

$$J(K) \subseteq A(K), \quad A_{\mathrm{l}}(K) \subseteq J(K), \quad A_{\mathrm{r}}(K) \subseteq J(K).$$

Запишем

$$J(K) = \begin{pmatrix} X & B \\ C & Y \end{pmatrix}.$$

Верны равенства

$$X = eJ(K)e = J(eKe) = J(R), \quad \text{где} \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем, что $Y = J(S)$. Далее получаем $B \subseteq A(M)$ и $C \subseteq A(N)$. Включение $J(K) \subseteq A(K)$ доказано.

В $A_{\mathrm{r}}(K)$ возьмём произвольную матрицу

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

и единичную матрицу E. Матрицы

$$E - \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & s \end{pmatrix}$$

обратимы справа в K. Их правыми обратными будут соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} x & xm \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ yn & y \end{pmatrix},$$

где x и y — правые обратные к $1 - r$ и $1 - s$ соответственно. Следовательно, матрицы

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

лежат в $J(K)$. Поэтому $A_{\mathrm{r}}(K) \subseteq J(K)$. Аналогично $A_{\mathrm{l}}(K) \subseteq J(K)$. □

Похожее строение имеет первичный радикал кольца K.

В оставшейся части этого раздела мы приведём ряд замечаний о кольцах формальных матриц порядка $n \geqslant 2$. Рассмотренный случай $n = 2$ достаточен для понимания того, как надо определять такие кольца.

Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — кольца, M_{ij} — R_i-R_j-бимодули, причём $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что для любых $i, j, k = 1, \ldots, n$, таких что $i \neq k$, $k \neq j$, задан R_i-R_j-бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ikj} \colon M_{ik} \otimes_{R_k} M_{kj} \to M_{ij}.$$

Для индексов $i = k$ и $k = j$ считаем, что φ_{iij} и φ_{ijj} — это канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ij} \to M_{ij}, \quad M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \to M_{ij}.$$

Вместо $\varphi_{ikj}(a \otimes b)$ пишем ab. Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kj}$, $c \in M_{jl}$ и индексов i, j, k, l.

Обозначим через K множество всех $(n \times n)$-матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij}. Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K является кольцом.

Говорят, что K — *кольцо формальных матриц порядка* n.

Для лучшего понимания строения колец формальных матриц опять проясним их связи с идемпотентами и кольцами эндоморфизмов. Они заключаются в следующем. Некоторое кольцо T является кольцом всех матриц порядка n в точности тогда, когда в T существует полная ортогональная система из n ненулевых идемпотентов, и в точности тогда, когда кольцо T изоморфно кольцу эндоморфизмов некоторого модуля, разложимого в прямую сумму n ненулевых слагаемых.

В конкретных задачах могут появляться кольца формальных матриц любого порядка n. В общей теории обычно изучаются кольца матриц порядка 2. Уменьшения общности не возникает, поскольку случай $n > 2$ можно в определённом смысле свести к случаю матриц порядка 2. Именно, кольцо формальных матриц порядка $n > 2$ изоморфно некоторому кольцу формальных матриц порядка k для каждого $k = 2, \ldots, n-1$. Это утверждение становится вполне понятным, если рассмотреть представление колец матриц с помощью идемпотентов или колец эндоморфизмов. Достаточно определённым образом «укрупнять» идемпотенты или прямые слагаемые. Это утверждение можно также доказать непосредственно, используя матричный подход. Например, возьмём $k = 2$. Введём следующие обозначения для множеств матриц. Положим $R = R_1$, $M = (M_{12}, \ldots, M_{1n})$,

$$N = \begin{pmatrix} M_{21} \\ \vdots \\ M_{n1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} R_2 & M_{23} & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n2} & M_{n3} & \ldots & R_n \end{pmatrix}.$$

Здесь S — кольцо формальных матриц порядка $n-1$, M — R-S-бимодуль, N — S-R-бимодуль, причём модульные умножения определяются как произведения строк и столбцов на матрицы. С помощью φ_{ikj}, задающих умножение в K, можно определить бимодульные гомоморфизмы $M \otimes_S N \to R$ и $N \otimes_R M \to S$ так, что будут выполняться два известных закона ассоциативности. В результате

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

превращается в кольцо формальных матриц порядка 2. При этом

$$K \cong \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм получается путём разбиения каждой матрицы на четыре блока.

Обратим на время внимание на кольца верхних треугольных матриц порядка 3 (они снова появятся в разделе 2). Такое кольцо Γ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix},$$

где R, S, T — кольца, M — R-S-бимодуль, L — R-T-бимодуль, N — S-T-бимодуль. Из бимодульных гомоморфизмов остаётся ненулевым только $M \otimes_S N \to L$ (не считая ситуаций, когда один из множителей — R, S или T). Можно двумя способами превратить Γ в кольцо треугольных матриц порядка 2. При первом способе

$$\begin{pmatrix} r & m & l \\ 0 & s & n \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} l \\ n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\left(\begin{smallmatrix} L \\ N \end{smallmatrix}\right)$ является $\left(\begin{smallmatrix} R & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$-$T$-бимодулем. При втором способе $\left(\begin{smallmatrix} M & L \end{smallmatrix}\right)$ — R-$\left(\begin{smallmatrix} S & N \\ 0 & T \end{smallmatrix}\right)$-бимодуль.

Встречаются разнообразные кольца треугольных матриц. В [17] изучались так называемые *тривиальные расширения* колец, определяемые следующим образом. Если R — кольцо, M — R-бимодуль, то обозначим через T прямую сумму абелевых групп R и M, $T = \{(r,m) \mid r \in R,\ m \in M\}$. Группа T является кольцом с умножением, задаваемым правилом $(r,m)(r_1,m_1) = (rr_1, rm_1 + mr_1)$. Это кольцо и является упомянутым тривиальным расширением.

Рассмотрим теперь кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

и в нём подкольцо

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in R,\ m \in M \right\}.$$

Кольца T и Γ изоморфны при соответствии

$$(r,m) \to \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

Таким образом, тривиальные расширения состоят из треугольных матриц.

Любое кольцо формальных треугольных матриц является тривиальным расширением. Действительно, M можно рассматривать как $(R \times S)$-$(R \times S)$-бимодуль, считая, что $(r,s)m = rm$, $m(r,s) = ms$. Затем возьмём тривиальное расширение

$$T = \bigl\{\bigl((r,s),m\bigr) \bigm| r \in R,\ s \in S,\ m \in M\bigr\}$$

кольца $R \times S$. Соответствие

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to \bigl((r,s),m\bigr)$$

задаёт изоморфизм колец K и T. Впрочем, имеется класс колец треугольных матриц, содержащий тривиальные расширения. Пусть $f\colon R \to S$ — кольцевой гомоморфизм. Тогда в кольце

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

все матрицы вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & f(r) \end{pmatrix}$$

образуют подкольцо.

В [25] получено много фактов о кольцах формальных треугольных матриц. В [46,47] вычислена гомологическая размерность полутривиальных и тривиальных расширений колец.

Для дальнейшего изучения кольца формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

имеется много вопросов и направлений. Например, можно исследовать кольцевые свойства кольца K: когерентность, наследственность, регулярность, самоинъективность и другие. Представляет интерес решение ряда задач, касающихся матриц со специальными свойствами. Известно, что в кольце всех матриц порядка $n > 1$ над данным кольцом каждая матрица является суммой k обратимых матриц для $k = 3$ и $k = 4$. Для $k = 2$ аналогичное свойство верно не всегда. Этот круг вопросов представляет интерес для матриц из K. Также интересно, когда каждый элемент кольца K является суммой идемпотента и обратимого элемента. Кольца с таким свойством называются *чистыми*. Если каждый элемент кольца K является суммой идемпотента и обратимого элемента, коммутирующих между собой, то K называется *строго чистым* кольцом.

2. Первоначальные свойства модулей над кольцами формальных матриц

Как устроены модули над кольцом формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}?$$

Их можно конструировать, исходя из R-модулей и S-модулей. Пусть X и Y — R-модуль и S-модуль соответственно. Предположим, что даны гомоморфизмы R-модулей $f\colon M\otimes_S Y\to X$ и S-модулей $g\colon N\otimes_R X\to Y$, для которых выполнены равенства

$$m(nx)=(mn)x,\quad n(my)=(nm)y,\quad m\in M,\quad n\in N,\quad x\in X,\quad y\in Y,$$

где мы считаем, что nx — это $g(n\otimes x)$, а my — это $f(m\otimes y)$. Группа векторов-столбцов

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

превращается в K-модуль, если в качестве модульного умножения взять произведение матрицы на столбец,

$$\begin{pmatrix}r & m\\ n & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rx+my\\ nx+sy\end{pmatrix}.$$

Гомоморфизмы f и g назовём *гомоморфизмами модульного умножения*.

Любой K-модуль имеет вид модуля столбцов. Говоря точнее, его можно получить указанным способом. Пусть V — K-модуль и

$$e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда eV — R-модуль, $(1-e)V$ — S-модуль, $\left(\begin{smallmatrix}eV\\ (1-e)V\end{smallmatrix}\right)$ — K-модуль. Всё это становится понятным, если вспомнить о соглашениях из раздела 1 о записи матриц и множеств матриц. Например, можно считать, что K имеет вид

$$\begin{pmatrix}eKe & eK(1-e)\\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e)\end{pmatrix},$$

и тогда модульные умножения в указанных модулях выполняются естественным образом, а гомоморфизмы модульного умножения

$$M\otimes_S(1-e)V\to eV,\quad N\otimes_R eV\to(1-e)V\,-$$

это «ограничения» канонического изоморфизма $K\otimes_K V\to V$ на соответствующих подмодулях. Соответствие элементов

$$v\to\begin{pmatrix}ev\\ (1-e)v\end{pmatrix},\quad v\in V,$$

будет изоморфизмом K-модулей V и

$$\begin{pmatrix}eV\\ (1-e)V\end{pmatrix}.$$

В частности, K как левый K-модуль имеет форму

$$\begin{pmatrix}(R,M)\\ (N,S)\end{pmatrix}$$

с гомоморфизмами модульного умножения

$$m \otimes (n, s) \to (mn, ms), \quad n \otimes (r, m) \to (nr, nm).$$

Аналогичные соображения верны для правых K-модулей. Любой правый K-модуль имеет вид модуля векторов-строк (X, Y), где X — правый R-модуль и Y — правый S-модуль. С этим K-модулем ассоциируются модульные гомоморфизмы $Y \otimes_S N \to X$ и $X \otimes_R M \to Y$, удовлетворяющие соответствующим соотношениям ассоциативности. Модульное умножение есть произведение строки на матрицу. Все свойства левых K-модулей имеют правосторонние аналоги. Их можно и формально вывести путём перехода к правым модулям над противоположным кольцом K° (см. раздел 1). Как замечено в разделе 1, кольцо K° также является кольцом формальных матриц.

Обратим особое внимание на то, что левый K-модуль вида $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ и его элементы далее также записываются как строки.

Для (правых или левых) K-модулей принимаем договорённость о записи матриц, действующих для самого кольца K. Например, $\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $(X, 0)$ записываем как X, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $(x, 0)$ записываем как x и т. п.

Пусть (X, Y) — некоторый (левый) K-модуль. Положим $MY = \operatorname{Im} f$ и $NX = \operatorname{Im} g$. Понятно, что MY и NX — множества всех конечных сумм элементов вида my и nx соответственно. Имеют место включения $IX \subseteq MY$ и $JY \subseteq NX$. Обозначения, подобные MN, MY, NX, будем использовать и в случае, когда рассматриваются подгруппы в M, N, Y, X.

Вместо гомоморфизмов модульного умножения

$$f\colon M \otimes_S Y \to X, \quad g\colon N \otimes_R X \to Y$$

иногда удобнее использовать S-гомоморфизм f' и R-гомоморфизм g':

$$f'\colon Y \to \operatorname{Hom}_R(M, X), \quad f'(y)(m) = f(m \otimes y) = my, \quad y \in Y, \quad m \in M,$$

$$g'\colon X \to \operatorname{Hom}_S(N, Y), \quad g'(x)(n) = g(n \otimes x) = nx, \quad x \in X, \quad n \in N.$$

Гомоморфизмы f' и g' соответствуют гомоморфизмам f и g при естественных изоморфизмах абелевых групп

$$\operatorname{Hom}_R(M \otimes_S Y, X) \cong \operatorname{Hom}_S\big(Y, \operatorname{Hom}_R(M, X)\big),$$

$$\operatorname{Hom}_S(N \otimes_R X, Y) \cong \operatorname{Hom}_R\big(X, \operatorname{Hom}_S(N, Y)\big)$$

соответственно. Разумеется, при задании K-модулей можно исходить из гомоморфизмов f' и g', что совершенно равносильно первоначальному подходу. Поэтому f' и g' можно также называть *гомоморфизмами модульного умножения*.

Гомоморфизмы K-модулей можно представлять парами, состоящими из гомоморфизмов R-модулей и S-модулей. Пусть даны K-модули (X, Y) и (X_1, Y_1). Допустим, что $\alpha\colon X \to X_1$ и $\beta\colon Y \to Y_1$ — R-гомоморфизм и S-гомоморфизм соответственно, причём $\alpha(my) = m\beta(y)$, $\beta(nx) = n\alpha(x)$ для всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$. Тогда отображение

$$(X, Y) \to (X_1, Y_1), \quad (x, y) \to \big(\alpha(x), \beta(y)\big),$$

есть K-гомоморфизм. Пусть теперь дан некоторый K-гомоморфизм

$$\Phi\colon (X,Y) \to (X_1,Y_1).$$

Из равенств

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(x,y)\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Phi(x,y),$$
$$\Phi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(x,y)\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Phi(x,y)$$

следует, что Φ действует как $\Phi(x,y) = \big(\alpha(x),\beta(y)\big)$, где α и β — отображения $X \to X_1$ и $Y \to Y_1$ соответственно. Непосредственно проверяется, что α — R-гомоморфизм, β — S-гомоморфизм и $\alpha(my) = m\beta(y)$, $\beta(nx) = n\alpha(x)$ для всех элементов из этих равенств. Таким образом, мы имеем основание записывать гомоморфизмы K-модулей в виде пар (α,β).

Материал о строении K-модулей можно изложить в категорной форме. Мы доказали, что категория K-модулей эквивалентна некоторой категории четвёрок. Определим категорию $\mathcal{A}(K)$. Её объекты — это выражения (X,Y,f,g), где X — R-модуль, Y — S-модуль, $f\colon M\otimes_S Y \to X$ — R-гомоморфизм, $g\colon N\otimes_R X \to Y$ — S-гомоморфизм, причём следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_S N\otimes_R X \arrow[r, "1\otimes g"] \arrow[d, "\varphi\otimes 1"'] & M\otimes_S Y \arrow[r, "f"] & X \arrow[d, "1_X"] \\
R\otimes_R X \arrow[rr, "\mu"] & & X
\end{tikzcd},$$
$$\begin{tikzcd}
N\otimes_R M\otimes_S Y \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d, "\psi\otimes 1"'] & N\otimes_R X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
S\otimes_S Y \arrow[rr, "\nu"] & & Y
\end{tikzcd}, \tag{1}$$

где μ и ν — канонические гомоморфизмы. Морфизмы

$$(X,Y,f,g) \to (X_1,Y_1,f_1,g_1) \text{ —}$$

это пары (α,β), где $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(X,X_1)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_S(Y,Y_1)$ такие, что следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_S Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1\otimes\beta"'] & X \arrow[d, "\alpha"] \\
M\otimes_S Y_1 \arrow[r, "f_1"] & X_1
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
N\otimes_R X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1\otimes\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
N\otimes_R X_1 \arrow[r, "g_1"] & Y_1
\end{tikzcd}. \tag{2}$$

Теорема 2.1 (Палмер [46], Грин [20]). *Категории K-mod и $\mathcal{A}(K)$ эквивалентны.*

Доказательство. Определим функтор $F\colon K\text{-mod} \to \mathcal{A}(K)$. Для K-модуля V в качестве $F(V)$ возьмём $(eV, (1-e)V, f, g)$, где

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eV и $(1-e)V$ — соответствующие модули из начала раздела,

$$f\colon M \otimes_S (1-e)V \to eV, \quad g\colon N \otimes_R eV \to (1-e)V \text{ —}$$

«ограничения» канонического изоморфизма $K \otimes_K V \to V$. Диаграммы (1) будут коммутативными. Пусть $\Phi\colon V \to W$ — гомоморфизм K-модулей. Тогда $F(\Phi)\colon F(V) \to F(W)$ есть пара (α, β), где α — ограничение Φ на eV, β — ограничение Φ на $(1-e)V$. Заметим, что $\Phi(eV) = e\Phi(eV) \subseteq eW$ и аналогично для $(1-e)V$. Непосредственно проверяется, что диаграммы (2) коммутативны.

Теперь определим функтор $G\colon \mathcal{A}(K) \to K\text{-mod}$. Пусть $(X, Y, f, g) \in \mathcal{A}(K)$. Полагаем, что $G(X, Y, f, g)$ — это группа векторов-строк $\{(x, y) \mid X \in X,\ y \in Y\}$. Действие K на $G(X, Y, f, g)$ зададим как

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} (x, y) = (rx + f(m \otimes y), g(n \otimes x) + sy).$$

В результате получаем K-модуль $G(X, Y, f, g)$. Если

$$(\alpha, \beta)\colon (X, Y, f, g) \to (X_1, Y_1, f_1, g_1) \text{ —}$$

морфизм в $\mathcal{A}(K)$, то определим $G(\alpha, \beta)$ равенством

$$G(\alpha, \beta) = \big(\alpha(x), \beta(y)\big), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Опять непосредственно проверяется, что $G(\alpha, \beta)$ — K-гомоморфизм.

Остаётся проверить, что функторы F и G определяют эквивалентность категорий K-mod и $\mathcal{A}(K)$. А именно, композиция GF естественно эквивалентна тождественному функтору категории K-mod, а композиция FG естественно эквивалентна тождественному функтору категории $\mathcal{A}(K)$. Определим естественные преобразования σ и τ функторов следующим образом. Если V — некоторый K-модуль, то согласно нашим определениям $GF(V)$ есть K-модуль $(eV, (1-e)V)$. Отображение $\sigma_V\colon GF(V) \to V$, $\sigma_V(ev, (1-e)v) = v$, $v \in V$, является K-изоморфизмом. При этом если $\varphi\colon V \to W$ — гомоморфизм K-модулей, то $GF(\varphi)\sigma_W = \sigma_V \varphi$. Следовательно, σ — естественная эквивалентность.

Возьмём теперь объект $A = (X, Y, f, g)$ категории $\mathcal{A}(K)$. Тогда $FG(A)$ фактически есть A и в качестве морфизма $\tau_A\colon FG(A) \to A$ можно взять тождественный морфизм объекта A. Если A' — ещё один объект категории $\mathcal{A}(K)$ и $\psi\colon A \to A'$ — морфизм, то непосредственно проверяется, что диаграмма объектов в $\mathcal{A}(K)$

$$\begin{tikzcd} FG(A) \arrow[r, "FG(\psi)"] \arrow[d, "\tau_A"'] & FG(A') \arrow[d, "\tau_{A'}"] \\ A \arrow[r, "\psi"] & A' \end{tikzcd}$$

коммутативна. Следовательно, τ — естественная эквивалентность, и теорема доказана. □

Есть простые, но весьма полезные конструкции K-модулей на основе тензорного произведения и группы Hom. Пусть X — R-модуль. Группа векторов-строк $(X, N \otimes_R X)$ является K-модулем (мы рассматриваем $N \otimes_R X$ как канонический S-модуль), у которого гомоморфизмами модульного умножения являются гомоморфизм

$$M \otimes_S (N \otimes_R X) \to X, \quad m(n \otimes x) \to (mn)x,$$

и тождественный автоморфизм $N \otimes_R X \to N \otimes_R X$. Таким образом, $m(n \otimes x) = (mn)x$ и $nx = n \otimes x$ в принятых нами обозначениях. Аналогичным образом, исходя из S-модуля Y, мы определяем K-модуль $(M \otimes_S Y, Y)$. Будем использовать обозначения $T(X) = N \otimes_R X$ и $T(Y) = M \otimes_S Y$. Модули $\big(X, T(X)\big)$ и $(T(Y), Y)$ обладают одним характерным свойством.

Лемма 2.2. *Пусть даны R-модуль X, K-модуль (A, B) и R-гомоморфизм $\alpha\colon X \to A$. Тогда существует единственный S-гомоморфизм $\beta\colon T(X) \to B$, такой что $(\alpha, \beta)\colon \big(X, T(X)\big) \to (A, B)$ — гомоморфизм K-модулей.*

Похожее утверждение верно для S-модуля Y, S-гомоморфизма $Y \to B$ и K-модулей (A, B), $(T(Y), Y)$.

Доказательство. Отображение $N \times X \to B$, $(n, x) \to n\alpha(x)$, $n \in N$, $x \in X$, является сбалансированным над S. Следовательно, существует S-гомоморфизм $\beta\colon T(X) \to B$, действующий на образующих элементах как $\beta(n \otimes x) = n\alpha(x)$. Пара (α, β) определяет K-гомоморфизм, поскольку $\alpha\big(m(n \otimes x)\big) = m\beta(n \otimes x)$ и $\beta(nx) = n\alpha(x)$ для всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$.

Единственность β понимается в указанном ниже смысле. Если

$$(\alpha, \gamma)\colon \big(X, T(X)\big) \to (A, B) —$$

какой-нибудь K-гомоморфизм, то $\gamma = \beta$. Действительно, согласно определению модуля $\big(X, T(X)\big)$ имеем

$$\gamma(n \otimes x) = \gamma(nx) = n\alpha(x) = \beta(n \otimes x), \quad \gamma = \beta.$$

Для модулей (A, B) и $(T(Y), Y)$ доказательство проводится аналогично. □

Теперь образуем группу векторов-строк $\big(X, \mathrm{Hom}_R(M, X)\big)$, где мы стандартным образом рассматриваем группу $\mathrm{Hom}_R(M, X)$ как S-модуль. На самом деле мы имеем K-модуль с гомоморфизмами модульного умножения

$$M \otimes_S \mathrm{Hom}_R(M, X) \to X, \quad m \otimes \alpha \to \alpha(m),$$
$$N \otimes_R X \to \mathrm{Hom}_R(M, X), \quad n \otimes x \to \beta,$$

где

$$\beta(m) = (mn)x, \quad m \in M, \quad n \in N, \quad x \in X, \quad \alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, X).$$

В соответствии с соглашениями о записи имеем равенства $m\alpha = \alpha(m)$ и $(nx)(m) = (mn)x$. Аналогично S-модуль Y даёт K-модуль $(\mathrm{Hom}_S(N, Y), Y)$ с модульными умножениями

$$n\gamma = \gamma(n), \quad (my)(n) = (nm)y, \quad n \in N, \quad m \in M, \quad y \in Y, \quad \gamma \in \mathrm{Hom}_S(N, Y).$$

Будем писать $H(X)$ вместо $\mathrm{Hom}_R(M, X)$ и $H(Y)$ вместо $\mathrm{Hom}_S(N, Y)$. Модули $\big(X, H(X)\big)$ и $(H(Y), Y)$ имеют одно важное свойство, связанное с гомоморфизмами.

Лемма 2.3. *Пусть даны R-модуль X, K-модуль (A, B) и R-гомоморфизм $\alpha\colon A \to X$. Определим отображение $\beta\colon B \to H(X)$ формулой $\beta(b)(m) = \alpha(mb)$, $b \in B$, $m \in M$. Тогда β — S-гомоморфизм, (α, β) — K-гомоморфизм $(A, B) \to \big(X, H(X)\big)$. Такой гомоморфизм β находится единственным образом.*

Аналогичное утверждение верно для S-модуля Y, S-гомоморфизма $B \to Y$ и K-модулей (A, B), $(H(Y), Y)$.

Доказательство. Отображение β является гомоморфизмом абелевых групп. Кроме того, для произвольных $s \in S$, $b \in B$ и $m \in M$ имеем

$$\beta(sb)(m) = \alpha\big(m(sb)\big), \quad \big(s\beta(b)\big)(m) = \beta(b)(ms) = \alpha\big((ms)b\big).$$

Так как $m(sb) = (ms)b$, то $\beta(sb) = s\beta(b)$. Поэтому β — S-гомоморфизм.

Для того чтобы пара (α, β) была K-гомоморфизмом, достаточно выполнения равенств

$$\alpha(mb) = m\beta(b), \quad \beta(na) = n\alpha(a), \quad m \in M, \quad n \in N, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

Эти равенства следуют из того, что $m\beta(b) = \beta(b)(m) = \alpha(mb)$. Далее,

$$\beta(na)(m) = \alpha\big(m(na)\big) = \alpha\big((mn)a\big) = mn\alpha(a) = \big(n\alpha(a)\big)(m), \quad \beta(na) = n\alpha(a).$$

Предположим, что $(\alpha, \gamma)\colon (A, B) \to \big(X, H(X)\big)$ — некоторый K-гомоморфизм. Согласно определению модуля $\big(X, H(X)\big)$ имеем $\gamma(b)(m) = m\gamma(b)$, $b \in B$, $m \in M$. С другой стороны, $m\gamma(b) = \alpha(mb)$ и $\beta(b)(m) = \alpha(mb)$, откуда следует, что $\gamma(b)(m) = \beta(b)(m)$ и $\gamma = \beta$.

Аналогичное доказательство верно для модулей (A, B) и $(T(Y), Y)$. □

Следствие 2.4. *Для любого R-модуля X имеют место канонические кольцевые изоморфизмы*

$$\mathrm{End}_K\big(X, T(X)\big) \cong \mathrm{End}_R(X) \cong \mathrm{End}_K\big(X, H(X)\big).$$

Аналогичное утверждение верно для колец эндоморфизмов модулей Y, $(T(Y), Y)$ и $(H(Y), Y)$.

Замечания. Для любого модуля (X, Y) можно записать следующие четыре гомоморфизма:

$$(1, g)\colon \bigl(X, T(X)\bigr) \to (X, Y), \quad (f, 1)\colon (T(Y), Y) \to (X, Y),$$
$$(1, f')\colon (X, Y) \to \bigl(X, H(X)\bigr), \quad (g', 1)\colon (X, Y) \to (H(Y), Y).$$

На основании лемм 2.2 и 2.3 заключаем, что f, g и f', g' являются единственно возможными гомоморфизмами при условии, что второе отображение — тождественное отображение. Эти гомоморфизмы будут весьма полезны в дальнейшем.

Можно рассмотреть предложенные конструкции с категорной точки зрения. Для любого кольца K формальных матриц существует кольцевой гомоморфизм

$$R \times S \to K, \quad (r, s) \to \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждый K-модуль можно считать $(R\times S)$-модулем. Это даёт «забывающий» функтор $E\colon K\text{-mod} \to (R \times S)\text{-mod}$. Отметим, что если K — кольцо формальных матриц с нулевыми идеалами следа, то «диагональное» отображение

$$K \to R \times S, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \to (r, s)$$

является гомоморфизмом; следовательно, любой $(R \times S)$-модуль является K-модулем в этом случае. Теперь определим два функтора T и H из $(R \times S)$-mod в K-mod. Функторы T и H ставят в соответствие $(R \times S)$-модулю (X, Y) K-модули $\bigl(X, T(X)\bigr) \oplus (T(Y), Y)$ и $\bigl(X, H(X)\bigr) \oplus (H(Y), Y)$ соответственно. Если $(\alpha, \beta)\colon (X, Y) \to (X_1, Y_1)$ — гомоморфизм $(R \times S)$-модулей, то $T(\alpha, \beta)$ и $H(\alpha, \beta)$ — определённые очевидным образом индуцированные гомоморфизмы $T(X, Y) \to T(X_1, Y_1)$ и $H(X, Y) \to H(X_1, Y_1)$ соответственно. Фактически, T есть функтор $K \otimes_{R\times S} (-)$, где $T(X, Y) = K \otimes_{R\times S} (X, Y)$, H есть функтор $\mathrm{Hom}_{R\times S}(K, -)$, где $H(X, Y) = \mathrm{Hom}_{R\times S}\bigl(K, (X, Y)\bigr)$. Функторы T и H переводят гомоморфизмы $(R \times S)$-модулей в соответствующие индуцированные гомоморфизмы K-модулей. Функтор T (функтор H) сопряжён слева (сопряжён справа) к функтору E. Эти ситуации сопряжённости появляются в леммах 2.2 и 2.3.

Функторы T и H также связаны между собой определённым образом. Речь идёт о существовании естественного преобразования $\theta\colon T \to H$. Соответствующий естественный гомоморфизм $\theta(X, Y)\colon T(X, Y) \to H(X, Y)$ есть сумма гомоморфизмов $(1, h) + (h', 1)$, где $h\colon T(X) \to H(X)$ отображает $n \otimes x$ в гомоморфизм $m \to (mn)x$. Аналогично определяется $(h', 1)\colon (T(Y), Y) \to (H(Y), Y)$.

Теперь рассмотрим вид подмодулей и фактор-модулей K-модулей. Это нетрудно сделать, поскольку мы знаем строение самих K-модулей. Пусть дан модуль $V = (X, Y)$ над кольцом K. Подмножество $W \subseteq V$ является подмодулем модуля V в точности тогда, когда существуют подмодуль A R-модуля X и подмодуль B S-модуля Y, такие что $W = (A, B)$, $MB \subseteq A$, $NA \subseteq B$. Следующая ситуация является важным частным случаем. Для подмодулей A и B модулей

X и Y соответственно множества (A, NA) и (MB, B) всегда являются подмодулями в (X, Y). Если кольцо K имеет нулевые идеалы следа (т. е. $I = 0 = J$), то получаем подмодули $(MB, 0)$ и $(0, NA)$. Связь модулей (A, NA), (MB, B) с модулями $\big(A, T(A)\big)$, $(T(B), B)$ и $\big(A, H(A)\big)$, $(H(B), B)$ ясна из замечаний после следствия 2.4.

Группа векторов-строк $(X/A, Y/B)$ является K-модулем. Гомоморфизмы модульного умножения

$$M \otimes_S Y/B \to X/A, \quad N \otimes_R X/A \to Y/B$$

индуцируются гомоморфизмами модульного умножения модуля (X, Y). А именно, $m\bar{y} = \overline{my}$, где $\bar{y} = y + B$, $\overline{my} = my + A$, причём аналогичная ситуация имеет место для второго гомоморфизма. Фактор-модуль V/W можно отождествить с модулем $(X/A, Y/B)$. Более точно, соответствие $(x, y) + W \to (x + A, y + B)$ является изоморфизмом между этими модулями.

При работе с модулями над кольцом формальных треугольных матриц появляются некоторые особенности. Их нетрудно выявить, рассмотрев предыдущий текст при условии $N = 0$. Остановимся только на некоторых деталях. Пусть (X, Y) — K-модуль. Из двух гомоморфизмов модульного умножения f и g остаётся только f (в том смысле, что $g = 0$). Два равенства ассоциативности выполняются автоматически. Важная особенность «треугольного случая» заключается в том, что для любого R-модуля X имеем K-модуль $(X, 0)$. Гомоморфизм K-модулей $(X, Y) \to (X_1, Y_1)$ есть пара (α, β), состоящая из R-гомоморфизма $\alpha\colon X \to X_1$ и S-гомоморфизма $\beta\colon Y \to Y_1$, удовлетворяющих условию $\alpha(my) = m\beta(y)$ для всех $m \in M$ и $y \in Y$. Категория $\mathcal{A}(K)$ из теоремы 2.1 превращается в категорию троек вида (X, Y, f). Диаграммы (1) всегда коммутативны, а в (2) остаётся только первая диаграмма. Если X — R-модуль и Y — S-модуль, то K-модули $\big(X, T(X)\big)$ и $(H(Y), Y)$ из лемм 2.2 и 2.3 имеют вид $(X, 0)$ и $(0, Y)$ соответственно.

Модули над кольцом формальных матриц порядка $n > 2$ (эти кольца определены в конце раздела 1) устроены так же, как в случае $n = 2$. Такой модуль представляет собой модуль векторов-столбцов высоты n, а модульное умножение выполняется по правилу «умножение матрицы на столбец». Нет особой надобности приводить подробности. Собственно, все детали ясны из разобранного случая $n = 2$. Более внимательно рассмотрим модули над кольцом формальных треугольных матриц

$$\Gamma = \begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

порядка 3 (об этом кольце см. в конце раздела 1). Пусть $\varphi\colon M \otimes_S N \to L$ — R-T-бимодульный гомоморфизм, участвующий в определении кольца Γ. Как и раньше, пишем mn вместо $\varphi(m \otimes n)$. Предположим, что даны R-модуль X, S-модуль Y, T-модуль Z, R-модульные гомоморфизмы $f\colon M \otimes_S Y \to X$ и

$h\colon L\otimes_T Z\to X$, S-модульный гомоморфизм $g\colon N\otimes_T Z\to Y$, причём сохраняются прежние обозначения и $m(nz)=(mn)z$ для всех $m\in M$, $n\in N$, $z\in Z$. Тогда (X,Y,Z) — Γ-модуль с модульным умножением типа «умножение матрицы на столбец». Таким способом можно получить любой Γ-модуль.

Гомоморфизмы Γ-модулей действуют покоординатно. Гомоморфизм

$$(X,Y,Z)\to(X_1,Y_1,Z_1)$$

есть тройка (α,β,γ), где $\alpha\colon X\to X_1$, $\beta\colon Y\to Y_1$, $\gamma\colon Z\to Z_1$ — гомоморфизмы соответствующих модулей. Кроме того, должны выполняться равенства

$$\alpha(my)=m\beta(y),\quad \alpha(lz)=l\gamma(z),\quad \beta(nz)=n\gamma(z)$$

для всех значений m, n, l, y, z.

Аналогично категории $\mathcal{A}(K)$ введём категорию $\mathcal{A}(\Gamma)$. Её объекты — выражения (X,Y,Z,f,g,h), морфизмы — тройки (α,β,γ), для которых коммутативны диаграммы, подобные диаграммам (2). Категории Γ-mod и $\mathcal{A}(\Gamma)$ эквивалентны [20]. Это можно доказать прямыми рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства теоремы 2.1. Можно также дважды применить теорему 2.1. Детализируем второе утверждение.

Кольцо Γ естественным образом изоморфно двум кольцам Δ и Λ треугольных матриц порядка 2 (см. раздел 1). В свою очередь, Γ-модуль (X,Y,Z) с гомоморфизмами f, g, h можно рассмотреть как Δ-модуль $\big((X,Y),Z\big)$ векторов-строк длины 2, состоящих из блоков (x,y) и z. Здесь (X,Y) есть $\left(\begin{smallmatrix}R & M\\ 0 & S\end{smallmatrix}\right)$-модуль, получаемый с помощью гомоморфизма $f\colon M\otimes_S Y\to X$, а гомоморфизм

$$\begin{pmatrix}L\\ N\end{pmatrix}\otimes_T Z\to(X,Y)$$

есть $h+g$. Модульное умножение Γ-модуля (X,Y,Z) индуцирует модульное умножение Δ-модуля $\big((X,Y),Z\big)$, выполняемое над блоками. Аналогично Γ-модуль (X,Y,Z) превращается в Λ-модуль $\big(X,(Y,Z)\big)$, и (Y,Z) есть $\left(\begin{smallmatrix}S & N\\ 0 & T\end{smallmatrix}\right)$-модуль, получаемый с помощью гомоморфизма $g\colon N\otimes_T Z\to Y$, а гомоморфизм

$$(M,L)\otimes_{\left(\begin{smallmatrix}S & N\\ 0 & T\end{smallmatrix}\right)}(Y,Z)\to X$$

есть $f+h$ (нужно учесть, что $m(nz)=(mn)z$). Γ-модуль (X,Y,Z) и Δ-модуль $\big((X,Y),Z\big)$ можно практически не различать. При более строгом подходе можно сказать, что категории Γ-mod и Δ-mod эквивалентны. Теперь понятно, как можно получить эквивалентность категорий Γ-mod и $\mathcal{A}(\Gamma)$, дважды применяя теорему 2.1.

Интересны и важны результаты в другом направлении: сведение изучения модуля над произвольным кольцом

$$\begin{pmatrix}R & M\\ N & S\end{pmatrix}$$

к изучению модулей над каким-то кольцом треугольных матриц. Приведём одну простую теорему довольно общего характера на эту тему.

Пусть
$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$
кольцо формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами $\varphi\colon M\otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N\otimes_R M \to S$. Зафиксируем некоторый идеал L кольца R, содержащий идеал следа I (например, $L = I$ или $L = R$). Тогда существует кольцо треугольных матриц
$$\begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$
порядка 3. Такие кольца только что рассматривались. В качестве бимодульного гомоморфизма $M \otimes_S N \to L$ берём φ, что корректно, поскольку $\operatorname{Im}\varphi = I \subseteq L$.

Пусть $V = (X, Y)$ — некоторый K-модуль с гомоморфизмами модульного умножения $f\colon M \otimes_S Y \to X$ и $g\colon N \otimes_R X \to Y$. Можно сконструировать Γ-модуль $W = (X, Y, X)$ с гомоморфизмами модульного умножения $f\colon M\otimes_S Y \to X$, $h\colon L\otimes_R X \to X$ и $g\colon N\otimes_R X \to Y$, где h — канонический гомоморфизм $l\otimes x \to lx$, $l \in L$, $x \in X$. Равенство $m(nz) = (mn)z$ справедливо, так как превращается в равенство $m(nx) = (mn)x$, верное в силу существования K-модуля (X, Y).

Выясним связи между гомоморфизмами K-модулей и гомоморфизмами Γ-модулей. Пусть $(\alpha, \beta)\colon (X, Y) \to (X_1, Y_1)$ — гомоморфизм K-модулей. Утверждаем, что $(\alpha, \beta, \alpha)\colon (X, Y, X) \to (X_1, Y_1, X_1)$ — гомоморфизм Γ-модулей. Действительно, выполнены три нужных равенства
$$\alpha(my) = m\beta(y), \quad \beta(nx) = n\alpha(x), \quad \alpha(lx) = l\alpha(x).$$
Наоборот, предположим, что $(\alpha, \beta, \gamma)\colon (X, Y, X) \to (X_1, Y_1, X_1)$ — гомоморфизм Γ-модулей, причём считаем, что $L = R$. Тогда
$$r\alpha(x) = \alpha(rx) = r\gamma(x) \text{ для всех } r \in R, \quad x \in X.$$
Отсюда следует, что $\gamma = \alpha$. Таким образом, каждый гомоморфизм
$$(X, Y, X) \to (X_1, Y_1, X_1)$$
есть тройка (α, β, α).

Сформулируем найденную связь между K-модулями и Γ-модулями в категорном виде. В качестве Γ возьмём кольцо
$$\begin{pmatrix} R & M & R \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}.$$
Определим ковариантный функтор $F\colon K\text{-mod} \to \Gamma\text{-mod}$. Функтор F переводит K-модуль $V = (X, Y)$ в Γ-модуль $F(V) = (X, Y, X)$. Функтор F переводит K-модульный гомоморфизм (α, β) в Γ-модульный гомоморфизм (α, β, α).

Теорема 2.5. *Функтор F осуществляет полное вложение категории K-mod в категорию Γ-mod.*

Доказательство. Имеется в виду, что F определяет эквивалентность между K-mod и полной подкатегорией категории Γ-mod, состоящей из модулей вида (X, Y, X). Всё необходимое для доказательства этого утверждения приведено в тексте перед теоремой 2.5. □

Следствие 2.6. *Пусть V — K-модуль.*

1. *Кольца эндоморфизмов K-модуля V и Γ-модуля $F(V)$ изоморфны.*
2. *K-модуль V неразложим в точности тогда, когда Γ-модуль $F(V)$ неразложим.*

Хирано [30] детально рассматривает представления Γ-модулей, где Γ — произвольное кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M & L \\ 0 & S & N \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix},$$

как модуля над двумя кольцами треугольных матриц порядка 2, указанными в разделе 1. В [20] содержится интересное исследование проблемы, затронутой в теореме 2.5. В частности, построено несколько функторов из категории K-модулей в категорию модулей над различными кольцами треугольных матриц порядка 3. Автор пытается подобрать Γ так, чтобы K и Γ одновременно имели конечный (бесконечный) тип представлений.

Отображение $f\colon V \to W$ модулей над кольцом T называется *T-однородным*, если $f(tv) = tf(v)$ для всех $t \in T$ и $v \in V$. Модуль V называется *эндоформальным*, если каждое T-однородное отображение $V \to V$ есть эндоморфизм, т. е. любое T-однородное отображение должно быть также аддитивным. Максон [40] показал, что все модули над кольцом матриц порядка $n > 1$ эндоформальны. Ситуация с модулями над кольцами формальных матриц не ясна.

3. Малые и существенные подмодули

Этот и следующий разделы носят иллюстративный характер. Приводимые результаты несложны. Продемонстрируем некоторые приёмы работы с модулями над кольцами формальных матриц.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц, (X, Y) — K-модуль. Некоторые подмодули модуля (X, Y) играют исключительно важную роль в различных вопросах. К ним относятся подмодули MY и NX, введённые в разделе 2. Определим ещё два подмодуля, положив

$$L(X) = \{x \in X \mid nx = 0 \text{ для каждого } n \in N\},$$
$$L(Y) = \{y \in Y \mid my = 0 \text{ для каждого } m \in M\}.$$

Если кольцо K имеет нулевые идеалы следа, то $MY \subseteq L(X)$ и $NX \subseteq L(Y)$.

В данном разделе мы считаем, что K — кольцо с нулевыми идеалами следа, т. е. идеалы следа I и J кольца K равны нулю. В этом случае $mn = 0 = nm$ для всех $m \in M$ и $n \in N$.

Кроме малых и существенных подмодулей, мы приведём описание конечно порождённых, пустотелых и равномерных K-модулей. Здесь уместно записать замечание, подобное сделанному в разделе 1 о характере исследования модулей над кольцом K. Когда мы ведём речь об описании некоторого K-модуля (X, Y), разумно искать это описание в терминах R-модуля X, S-модуля Y и действий бимодулей M и N на Y и X соответственно.

Предложение 3.1. *K-модуль (X, Y) является конечно порождённым в точности тогда, когда R-модуль X/MY и S-модуль Y/NX являются конечно порождёнными.*

Доказательство. Пусть (X, Y) — конечно порождённый K-модуль с конечной системой образующих $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$. Возьмём произвольный элемент $x \in X$ и запишем $(x, 0) = t_1(x_1, y_1) + \ldots + t_k(x_k, y_k)$, где

$$t_i = \begin{pmatrix} r_i & m_i \\ n_i & s_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{k}(r_i x_i + m_i y_i), \quad x + MY = r_1(x_1 + MY) + \ldots + r_k(x_k + MY).$$

Следовательно, $\{x_i + MY\}_{i=1}^{k}$ и $\{y_i + NX\}_{i=1}^{k}$ — системы образующих для X/MY и Y/NX соответственно.

Предположим теперь, что модули X/MY и Y/NX являются конечно порождёнными, $\{x_i + MY\}_{i=1}^{k}$ и $\{y_i + NX\}_{i=1}^{l}$ — их системы образующих. Утверждаем, что

$$\{(x_i, 0),\ (0, y_j) \mid i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, l\}$$

есть система образующих K-модуля (X, Y). Достаточно проверить, что все элементы вида $(x, 0)$ и $(0, y)$ являются линейными комбинациями элементов представленной системы. Для $(x, 0)$ это получается следующим образом (для $(0, y)$ рассуждения аналогичны). Имеем

$$x = r_1 x_1 + \ldots + r_k x_k + m_1 b_1 + \ldots + m_i b_i,$$

где $r \in R$, $m \in M$, $b \in Y$. В свою очередь, каждый из элементов $b_1, \ldots, b_i$ равен сумме вида

$$s_1 y_1 + \ldots + s_l y_l + n_1 a_1 + \ldots + n_j a_j,$$

где $s \in S$, $n \in N$, $a \in X$. Подставим эти суммы в выражение для x и учтём, что всегда $mn = 0$. Получим, что

$$x = r_1 x_1 + \ldots + r_k x_k + c_1 y_1 + \ldots + c_l y_l$$

для некоторых $c_1, \ldots, c_l \in M$. Теперь понятно, как записать $(x,0)$ в нужном виде. Отметим лишь, что, например,

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (0, y_1) = (c_1 y_1, 0). \qquad \square$$

Обозначим через (σ, τ) канонический гомоморфизм

$$(X, Y) \to (X/MY, Y/NX).$$

Уточним, что (MY, NX) есть подмодуль в (X, Y), а фактор-модуль $(X, Y)/(MY, NX)$ можно отождествить с модулем $(X/MY, Y/NX)$, как мы договорились в разделе 2.

Подмодуль A некоторого модуля V называется *малым*, если $B = V$ для любого подмодуля B в V, такого что $A + B = V$.

Предложение 3.2 (Ярдыков). *Пусть (X, Y) — K-модуль. Подмодуль (A, B) является малым в (X, Y) в точности тогда, когда σA — малый подмодуль в X/MY и τB — малый подмодуль в Y/NX.*

Доказательство. Предположим, что (A, B) — малый подмодуль в (X, Y). Пусть справедливо равенство $\sigma A + C/MY = X/MY$ для некоторого подмодуля C в X. Поскольку $\sigma A = (A + MY)/MY$, то получаем

$$A + C = X, \quad (A, B) + (C, Y) = (X, Y), \quad (C, Y) = (X, Y), \quad C = X.$$

Поэтому σA — малый подмодуль в X/MY. Аналогично доказывается, что τB — малый подмодуль в Y/NX.

Теперь допустим, что σA — малый подмодуль в X/MY и τB — малый подмодуль в Y/NX. Пусть $(A, B) + (C, D) = (X, Y)$ для некоторого подмодуля (C, D) в (X, Y). Тогда

$$A + C = X, \quad B + D = Y,$$
$$\sigma A + (C + MY)/MY = X/MY, \quad \tau B + (D + NX)/NX = Y/NX.$$

Так как σA — малый подмодуль в X/MY и τB — малый подмодуль в Y/NX, то $C + MY = X$ и $D + NX = Y$. Умножим последние равенства на N и M соответственно. Получим $NC = NX$ и $MD = MY$. Теперь находим, что $MY = MD \subseteq C$ и $NX = NC \subseteq D$. Поэтому $C = X$, $D = Y$ и (A, B) — малый подмодуль в (X, Y). $\square$

Модуль M называется *пустотелым*, если он не равен нулю и все его подмодули малы в M.

Следствие 3.3. *Ненулевой модуль (X, Y) является пустотелым в точности тогда, когда либо X/MY — пустотелый модуль и $Y = NX$, либо Y/NX — пустотелый модуль и $X = MY$.*

Доказательство. Сначала заметим, что равенства $X = MY$ и $Y = NX$ не могут выполняться одновременно.

Предположим, что (X, Y) — пустотелый модуль. Рассмотрим два возможных случая для модуля (X, NX).

1. $(X, NX) = (X, Y)$. Тогда $Y = NX$ и $X \neq MY$. Возьмём некоторый подмодуль A/MY в X/MY, где $A \neq X$. По условию (A, NA) — малый подмодуль в (X, Y). Из предложения 3.2 следует, что A/MY — малый подмодуль в X/MY. Поэтому X/MY — пустотелый подмодуль.

2. $(X, NX) \neq (X, Y)$. Из предложения 3.2 следует, что X/MY — малый подмодуль в X/MY, откуда получаем, что $X = MY$. Тогда $(MY, Y) = (X, Y)$, и аналогично пункту 1 получаем, что Y/NX — пустотелый подмодуль.

Теперь допустим, что X/MY — пустотелый модуль и $Y = NX$. (Случай, когда Y/NX — пустотелый модуль и $X = MY$, рассматривается аналогично.) Возьмём некоторый собственный подмодуль (A, B) в (X, Y). Ясно, что $A \neq X$. По условию σA — малый подмодуль в X/MY, причём очевидно, что τB — малый подмодуль в Y/NX. По предложению 3.2 (A, B) — малый подмодуль в (X, Y). Поэтому (X, Y) — пустотелый модуль. □

Модуль называется *локальным*, если он конечно порождённый и имеет ровно один максимальный подмодуль. Нетрудно проверить, что локальные модули совпадают с конечно порождёнными пустотелыми модулями. Из предложения 3.1 и следствия 3.3 вытекает следующий результат.

Следствие 3.4. *Модуль (X, Y) является локальным в точности тогда, когда либо X/MY — локальный модуль и $Y = NX$, либо Y/NX — локальный модуль и $X = MY$.*

Подмодуль A модуля V называется *существенным* (или *большим*), если A имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым подмодулем модуля V. В этом случае V называется *существенным расширением* модуля A.

Предложение 3.5 (Ярдыков). *Подмодуль (A, B) модуля (X, Y) является существенным в точности тогда, когда $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$ и $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$.*

Доказательство. Пусть (A, B) — существенный подмодуль в (X, Y). Проверим, что $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$. Для ненулевого элемента $x \in L(X)$ существует такая матрица

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix},$$

что

$$0 \neq \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} (x, 0) \in (A, B) \quad \text{или} \quad (rx, nx) \in (A, B).$$

Кроме того, $nx = 0$, поскольку $x \in L(X)$. Тогда $rx \neq 0$, $rx \in A \cap L(X)$ и $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$. Аналогично $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$.

Допустим теперь, что $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$, $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$ и (x, y) — ненулевой элемент в (X, Y). Докажем, что $K(x, y) \cap (A, B) \neq 0$. Если $y \neq 0$, то можно считать, что $x = 0$. Рассмотрим случай, когда $y \notin L(Y)$. Тогда $my \neq 0$ для некоторого $m \in M$. Так как $my \in L(X)$ и $A \cap L(X)$ — существенный подмодуль в $L(X)$, то $0 \neq rmy \in A \cap L(X)$ для некоторого $r \in R$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & rm \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (0, y) = (rmy, 0) \in (A, B).$$

Если же $y \in L(Y)$, то $0 \neq sy \in B \cap L(Y)$, где $s \in S$, поскольку $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$. Тогда $s(0, y) = (0, sy) \in (A, B)$. Случай $y = 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Модуль называется *равномерным*, если пересечение любых двух его ненулевых подмодулей не равно нулю.

Следствие 3.6. *Модуль (X, Y) равномерен в точности тогда, когда либо $L(X) = 0$ и Y равномерен, либо $L(Y) = 0$ и X равномерен.*

Доказательство. Пусть (X, Y) — равномерный модуль. Пересечение подмодулей $(L(X), 0)$ и $\big(0, L(Y)\big)$ равно нулю. Поэтому хотя бы один из модулей $L(X)$, $L(Y)$ равен нулю. Если, например, $L(X) = 0$, то $L(Y) = Y$, поскольку $MY \subseteq L(X) = 0$. Возьмём произвольный ненулевой подмодуль B в Y. Так как (MB, B) — существенный подмодуль в (X, Y), то из предложения 3.5 следует, что $B \cap L(Y)$ — существенный подмодуль в $L(Y)$. Поэтому Y — существенное расширение модуля B и модуль Y равномерен. Если $L(Y) = 0$, то рассуждаем аналогично.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $L(X) = 0$ и Y равномерен. Как и выше, $L(Y) = Y$. Пусть (A, B) — произвольный ненулевой подмодуль в (X, Y). Тогда $B \neq 0$, поскольку в противном случае $A \neq 0$ и $A \subseteq L(X)$, что невозможно. Из предложения 3.5 следует, что (A, B) — существенный подмодуль в (X, Y). Поэтому модуль (X, Y) равномерен. $\square$

Замечание. Все результаты этого раздела применимы к модулям над кольцом

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

треугольных матриц (см. [26]). Надо только сделать соответствующие уточнения, учитывая, что для модуля (X, Y) над таким кольцом всегда верны равенства $NX = 0$ и $L(X) = X$. Например,

(X, Y) — пустотелый модуль в точности тогда, когда либо X — пустотелый модуль и $Y = 0$, либо Y — пустотелый модуль и $X = MY$;

(X, Y) — равномерный модуль в точности тогда, когда либо $X = 0$ и Y — равномерный модуль, либо $L(Y) = 0$ и X — равномерный модуль.

4. Цоколь и радикал

В этом разделе K — произвольное кольцо формальных матриц
$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$
Сначала мы опишем простые K-модули. Затем применим это описание и выясним строение минимальных и максимальных подмодулей, цоколя и радикала.

Ненулевой модуль называется *простым*, если он не имеет нетривиальных подмодулей.

Предложение 4.1 (Ярдыков [6]). *Модуль (X, Y) является простым в точности тогда, когда либо X и Y — простые модули и $X = MY$, $Y = NX$, либо X — простой модуль и $Y = 0$, либо $X = 0$ и Y — простой модуль.*

Прежде чем доказывать предложение 4.1 сделаем следующее замечание. Так как всегда верны включения $IX \subseteq MY$ и $JY \subseteq NX$ (см. раздел 2), то из равенств $X = IX$ и $Y = JY$ следуют равенства $X = MY$ и $Y = NX$. Верно и обратное. Аналогично условие $IX, JY \neq 0$ равносильно тому, что $MY, NX \neq 0$. Поэтому в предложении 4.1 можно также писать $X = IX$, $Y = JY$ или $IX, JY \neq 0$ или $MY, NX \neq 0$.

Доказательство предложения 4.1. Пусть (X, Y) — простой модуль и $X, Y \neq 0$. Для любых ненулевых подмодулей A в X и B в Y верно, что (A, NA) и (MB, B) — подмодули в (X, Y). Поэтому $A = X$, $B = Y$ и X, Y — простые модули. В частности, $X = MY$ и $Y = NX$. Если один из модулей X, Y равен нулю, то ясно, что второй модуль должен быть простым.

Допустим теперь, что X и Y — простые модули и $X = MY$, $Y = NX$. Нетривиальный подмодуль в (X, Y) может быть только вида $(X, 0)$ или $(0, Y)$. Это невозможно в силу равенств $X = MY$ и $Y = NX$. Если же один из модулей X, Y прост, а второй модуль равен нулю, то ясно, что (X, Y) — простой модуль. □

Следствие 4.2. *Пусть (X, Y) — K-модуль.*

1. *Если $L(X) = 0 = L(Y)$, то модуль (X, Y) является простым в точности тогда, когда X и Y — простые модули.*
2. *Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то модуль (X, Y) является простым в точности тогда, когда либо модуль X прост и $Y = 0$, либо $X = 0$ и модуль Y прост.* □

Ненулевой (собственный) подмодуль модуля V называется *минимальным* (соответственно *максимальным*), если он является минимальным (соответственно максимальным) элементом в решётке всех подмодулей модуля V.

Следствие 4.3. *Пусть (A, B) — подмодуль K-модуля (X, Y).*

1. *(A, B) минимальный в точности тогда, когда либо A и B минимальные и $A = MB$, $B = NA$, либо A минимальный и $B = 0$ (тогда $NA = 0$), либо $A = 0$ (тогда $MB = 0$) и B минимальный.*

2. (A, B) *максимальный в точности тогда, когда либо* A *и* B *максимальные и* $MY \not\subseteq A$, $NX \not\subseteq B$ (*это равносильно тому, что* $IX \not\subseteq A$ *и* $JY \not\subseteq B$), *либо* A *максимальный и* $B = Y$ (*тогда* $MY \subseteq A$), *либо* $A = X$ (*тогда* $NX \subseteq B$) *и* B *максимальный.*

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из предложения 4.1, поскольку каждый минимальный подмодуль является простым модулем. По поводу утверждения 2 заметим, что (A, B) — максимальный подмодуль в точности тогда, когда $(X, Y)/(A, B) = (X/A, Y/B)$ — простой модуль. И снова можно применить предложение 4.1. Если выполнена первая возможность из этого предложения, то $X/A = M(Y/B)$ и $Y/B = N(X/A)$. Так как $M(Y/B) = (MY + A)/A$, то $X = MY + A$ и $MY \not\subseteq A$ в силу максимальности A. Кроме того, $NX \not\subseteq B$. Аналогично доказывается, что $IX \not\subseteq A$ и $JY \not\subseteq B$; это выводится также из замечания после предложения 4.1. □

Сумма всех минимальных подмодулей модуля V называется *цоколем* V и обозначается $\operatorname{Soc} V$. Если V не имеет минимальных подмодулей, то $\operatorname{Soc} V = 0$ по определению.

Следствие 4.4. *Пусть* (X, Y) — *некоторый модуль. Его цоколь равен* $\bigl(\operatorname{Soc} L(X), \operatorname{Soc} L(Y)\bigr) + \sum(A, NA)$, *где суммирование производится по всем таким минимальным подмодулям* A *в* X, *что* $IA \neq 0$ *и* NA — *минимальный подмодуль в* B. *Последнее слагаемое также равно* $\sum(MB, B)$, *где суммирование производится по всем таким минимальным подмодулям* B *в* Y, *что* $JB \neq 0$ *и* MB — *минимальный подмодуль в* A; *это слагаемое также равно* $\sum(A, B)$, *где суммирование производится по всем вышеупомянутым* A *и* B.

Доказательство. Так как имеется три вида минимальных подмодулей, то можно рассмотреть три суммы соответствующих минимальных подмодулей и записать

$$\operatorname{Soc}(X, Y) = \sum(A, 0) + \sum(0, B) + \sum(A, B).$$

Первое слагаемое есть $\operatorname{Soc} L(X)$, второе слагаемое есть $\operatorname{Soc} L(Y)$, третье слагаемое совпадает с каждой из трёх сумм, указанных в следствии. □

Следствие 4.5. *Пусть* (X, Y) — K*-модуль.*

1. *Если* $L(X) = 0 = L(Y)$, *то* $\operatorname{Soc}(X, Y) = (\operatorname{Soc} X, \operatorname{Soc} Y)$.
2. *Если* K — *кольцо с нулевыми идеалами следа, то*

$$\operatorname{Soc}(X, Y) = \bigl(\operatorname{Soc} L(X), \operatorname{Soc} L(Y)\bigr),$$

причём (X, Y) — *существенное расширение* $\operatorname{Soc}(X, Y)$ *в точности тогда, когда* X — *существенное расширение* $\operatorname{Soc} L(X)$ *и* Y — *существенное расширение* $\operatorname{Soc} L(Y)$. □

Пересечение всех максимальных подмодулей модуля V называется *радикалом* модуля M и обозначается через $\operatorname{Rad} V$. Если V не имеет максимальных подмодулей, то $\operatorname{Rad} V = V$ по определению.

Ниже через (σ, τ) обозначается канонический гомоморфизм

$$(X, Y) \to (X/MY, Y/NX).$$

Следствие 4.6. *Радикал модуля* (X, Y) *равен*

$$\big(\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X/MY), \tau^{-1}(\operatorname{Rad} Y/NX)\big) \cap \Big(\bigcap (A, B)\Big),$$

где пересечение берётся по всем подмодулям (A, B) *в* (X, Y)*, таким что* A *и* B *— максимальные подмодули и* $MY \not\subseteq A$*,* $NX \not\subseteq B$*.*

Доказательство. Мы знаем, что максимальные подмодули в (X, Y) могут быть трёх видов. Поэтому можно рассмотреть три группы соответствующих максимальных подмодулей и записать

$$\operatorname{Rad}(X, Y) = \Big(\bigcap (A, Y)\Big) \cap \Big(\bigcap (X, B)\Big) \cap \Big(\bigcap (A, B)\Big),$$

$$\bigcap (A, Y) = (\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X/MY), Y), \quad \bigcap (X, B) = \big(X, \tau^{-1}(\operatorname{Rad} Y/NX)\big). \qquad \square$$

Следствие 4.7. *Пусть* (X, Y) *—* K*-модуль.*

1. *Если* $NX = Y$ *и* $MY = X$*, то* $\operatorname{Rad}(X, Y) = (\operatorname{Rad} X, \operatorname{Rad} Y)$*.*
2. *Если* K *— кольцо с нулевыми идеалами следа, то*

   $$\operatorname{Rad}(X, Y) = \big(\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X/MY), \tau^{-1}(\operatorname{Rad} Y/NX)\big),$$

   причём $\operatorname{Rad}(X, Y)$ *— малый подмодуль в* (X, Y) *в точности тогда, когда* $\operatorname{Rad} X/MY$ *— малый подмодуль в* X/MY *и* $\operatorname{Rad} Y/NX$ *— малый подмодуль в* Y/NX*.*

Доказательство. 1. Из следствия 4.6 вытекает, что $\operatorname{Rad}(X, Y) = \bigcap (A, B)$, где (A, B) — такие подмодули в (X, Y), что A и B — максимальные подмодули. Не очевидно, что это пересечение совпадает с $(\operatorname{Rad} X, \operatorname{Rad} Y)$. Поскольку $\bigcap (A, B) = \Big(\bigcap A, \bigcap B\Big)$, то достаточно доказать, что для каждого максимального подмодуля A в X существует максимальный подмодуль B в Y с тем свойством, что (A, B) есть подмодуль в (X, Y) (тогда (A, B) максимален), а также доказать аналогичное утверждение для каждого максимального подмодуля B в Y.

Пусть A — некоторый максимальный подмодуль в X. Подмножество (A, Y) не образует подмодуль (поскольку $MY = X$). Поэтому множество всех подмодулей вида (A, D) индуктивно и непусто (поскольку оно содержит подмодуль (A, NA)). По лемме Цорна это множество содержит максимальный элемент (A, B). Этот подмодуль является максимальным подмодулем в (X, Y) (мы учитываем равенство $NX = Y$). По следствию 4.3 B — максимальный подмодуль в Y, что и утверждалось. Для максимального подмодуля B в Y можно провести аналогичные рассуждения.

2. Если (A, B) — такой подмодуль в (X, Y), что A и B максимальны и $MY \not\subseteq A$, $NX \not\subseteq B$, то $IX \not\subseteq A$ и $JY \not\subseteq B$. Так как $I = 0 = J$, то пересечение $\bigcap (A, B)$ из следствия 4.6 равно нулю. Критерий малости радикала вытекает из предложения 3.2. $\square$

Замечание. Все результаты этого раздела применимы к модулям над кольцом

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

треугольных матриц (см. также конец предыдущего раздела). Соответствующие результаты получены в [26]. Например,

$$\operatorname{Soc}(X,Y) = \bigl(\operatorname{Soc} X, \operatorname{Soc} L(Y)\bigr), \quad \operatorname{Rad}(X,Y) = (\sigma^{-1}(\operatorname{Rad} X/MY), \operatorname{Rad} Y).$$

5. Инъективные модули и инъективные оболочки

Выясним строение инъективных модулей над кольцом формальных матриц. В этом разделе K — произвольное кольцо формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

В этом и следующем разделах мы обычно будем работать с K-модулем, обозначаемым (A,B).

Пусть X — R-модуль и Y — S-модуль. Очень важную роль будут играть K-модули $\bigl(X, \operatorname{Hom}_R(M,X)\bigr)$ и $(\operatorname{Hom}_S(N,Y), Y)$, рассматривавшиеся перед леммой 2.3. Мы договорились обозначать эти модули $\bigl(X, H(X)\bigr)$ и $(H(Y), Y)$ соответственно. Будем постоянно использовать лемму 2.3. Например, следующий результат фактически является следствием этой леммы.

Предложение 5.1. *$\bigl(X, H(X)\bigr)$ является инъективным K-модулем в точности тогда, когда X — инъективный R-модуль. Аналогичное утверждение верно для S-модуля Y и K-модуля $(H(Y), Y)$.*

Доказательство. Пусть X — инъективный R-модуль. Допустим, что у нас есть K-модульный мономорфизм $(i,j)\colon (A,B) \to (C,D)$ и K-модульный гомоморфизм $(\alpha,\beta)\colon (A,B) \to \bigl(X, H(X)\bigr)$. Так как модуль X инъективен, то существует гомоморфизм $\gamma\colon C \to X$ со свойством $i\gamma = \alpha$. По лемме 2.3 найдётся $\delta\colon D \to H(X)$, для которого $(\gamma,\delta)\colon (C,D) \to \bigl(X, H(X)\bigr)$ — гомоморфизм K-модулей. Опять в силу леммы 2.3 $j\delta = \beta$. Следовательно, $(i,j)(\gamma,\delta) = (\alpha,\beta)$, и модуль $\bigl(X, H(X)\bigr)$ инъективен.

Обратно, пусть $\bigl(X, H(X)\bigr)$ — инъективный модуль. Допустим, что $i\colon A \to C$ — мономорфизм, $\alpha\colon A \to X$ — мономорфизм R-модулей. Из леммы 2.3 следует, что существуют K-модульные гомоморфизмы

$$(i,j)\colon \bigl(A, H(A)\bigr) \to \bigl(C, H(C)\bigr), \quad (\alpha,\beta)\colon \bigl(A, H(A)\bigr) \to \bigl(X, H(X)\bigr).$$

Утверждаем, что j — мономорфизм. В самом деле, если $j(\eta) = 0$, где $\eta \in H(A)$, то $j(\eta)(m) = i(m\eta) = i\bigl(\eta(m)\bigr) = 0$ для любого $m \in M$, откуда следует, что $\eta = 0$. Поэтому (i,j) тоже является мономорфизмом. Так как модуль $\bigl(X, H(X)\bigr)$ инъективен, то существует такой гомоморфизм $(\gamma,\delta)\colon \bigl(C, H(C)\bigr) \to \bigl(X, H(X)\bigr)$, что $(i,j)(\gamma,\delta) = (\alpha,\beta)$. Следовательно, $i\gamma = \alpha$ и модуль X инъективен.

В случае модуля $(H(Y), Y)$ рассуждаем аналогично. $\square$

Замечание. Из предложения 5.1 вытекает, что K-модуль $(X,0)$ инъективен в точности тогда, когда X — инъективный R-модуль и $\mathrm{Hom}_R(M,X)=0$. Аналогичный результат верен для модуля $(0,Y)$.

Предложение 5.1 может быть переформулировано следующим образом. Пусть H — функтор, определённый в замечаниях после следствия 2.4. Скоро мы увидим, что любой инъективный K-модуль изоморфен модулю $H(X,Y)$ для некоторых инъективных модулей X и Y.

Пусть (A,B) — некоторый K-модуль и f', g' — гомоморфизмы, определённые в начале раздела 2. Эти гомоморфизмы будут играть особую роль. Они соответствуют гомоморфизмам f и g модульного умножения при указанных изоморфизмах. Удобнее писать f и g вместо f' и g' соответственно. Итак, f есть S-гомоморфизм $B\to \mathrm{Hom}_R(M,A)$, где $f(b)(m)=mb$, $b\in B$, $m\in M$, а g есть R-гомоморфизм $A\to \mathrm{Hom}_S(N,B)$, где $g(a)(n)=na$, $a\in A$, $n\in N$. Запишем точные последовательности

$$0\to L(A)\to A\xrightarrow{g}\mathrm{Hom}_S(N,B),$$

$$0\to L(B)\to B\xrightarrow{f}\mathrm{Hom}_R(M,A)$$

R-модулей и S-модулей соответственно, где $L(A)$ и $L(B)$ — подмодули, определённые в разделе 3. Отображения

$$(1,f)\colon (A,B)\to \bigl(A,H(A)\bigr),\quad (g,1)\colon (A,B)\to (H(B),B)$$

являются K-гомоморфизмами (см. лемму 2.3 и замечания после следствия 2.4); они будут часто использоваться. Кроме того, если X — некоторый R-модуль, $\bigl(X,H(X)\bigr)$ — K-модуль и I — один из идеалов следа кольца K, то $L(X)=\{x\in X\mid Ix=0\}$, $L\bigl(H(X)\bigr)=0$.

Перейдём к описанию инъективных K-модулей. Здесь можно выделить два содержательных случая. Позже мы выясним, что общий случай сводится к этим двум случаям.

Теорема 5.2. *Пусть (A,B) — модуль с условием $L(A)=0=L(B)$. Модуль (A,B) инъективен в точности тогда, когда A и B — инъективные модули. Кроме того, f и g — изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть (A,B) — инъективный модуль. Из условия вытекает, что f и g — мономорфизмы. Поэтому $(1,f)$ — мономорфизм. Так как модуль (A,B) инъективен, то образ $\mathrm{Im}(1,f)$ есть прямое слагаемое в $\bigl(A,H(A)\bigr)$. Дополнительное слагаемое имеет вид $(0,Z)$, где Z — некоторое прямое слагаемое в $H(A)$. Следовательно, $MZ=0$ и $Z\subseteq L\bigl(H(A)\bigr)$. Как мы уже отмечали, $L\bigl(H(A)\bigr)=0$ и $Z=0$. Таким образом, $(1,f)$ — изоморфизм. Поэтому $\bigl(A,H(A)\bigr)$ — инъективный модуль и f — изоморфизм. По предложению 5.1 модуль A инъективен. Аналогично доказывается, что g — изоморфизм и модуль B инъективен.

Допустим теперь, что модули A и B инъективны. Снова используем гомоморфизмы $(1,f)$ и $(g,1)$. Рассмотрим K-модуль $\bigl(\mathrm{Hom}_S\bigl(N,H(A)\bigr),H(A)\bigr)$ и

K-гомоморфизм

$$(h,1)\colon \bigl(A, H(A)\bigr) \to \bigl(\mathrm{Hom}_S\bigl(N, H(A)\bigr), H(A)\bigr),$$

описанный в лемме 2.3. Непосредственными вычислениями проверяется, что $h = gf_*$, где $f_*\colon \mathrm{Hom}_S(N,B) \to \mathrm{Hom}_S\bigl(N, H(A)\bigr)$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом f. Так как f_* и g — мономорфизмы, то h — мономорфизм. По предложению 5.1 модуль $\bigl(A, H(A)\bigr)$ инъективен. Повторяя рассуждения из первой части доказательства, можно проверить, что h — изоморфизм. Следовательно, мономорфизм f_* является эпиморфизмом. Поэтому f_* и g — изоморфизмы. Аналогично можно доказать, что f — изоморфизм. Итак, $(1,f)\colon (A,B) \to \bigl(A, H(A)\bigr)$ — изоморфизм и модуль (A,B) инъективен, что и требовалось. □

В любом модуле (A,B) подмножества $(L(A),0)$, $\bigl(0,L(B)\bigr)$ и $\bigl(L(A),L(B)\bigr)$ являются подмодулями. При исследовании инъективных K-модулей встречается ещё одна важная ситуация, когда $\bigl(L(A),L(B)\bigr)$ — существенный подмодуль в (A,B). (Это всегда так, если идеалы следа кольца K равны нулю.)

Напомним ряд понятий теории колец. Пусть V — модуль над некоторым кольцом и G, Z — подмодули в V. Подмодуль G называется *замкнутым* (в V), если G не имеет собственных существенных расширений в V. Подмодуль G называется *замыканием* подмодуля Z (в V), если $Z \subseteq G$, G — существенное расширение модуля Z и G замкнут в V. В V каждый подмодуль обладает хотя бы одним замыканием, которое не всегда единственно. Через $\bar{Z}$ обозначается какое-либо замыкание подмодуля Z.

Теорема 5.3. *Пусть (A,B) — такой модуль, что $\bigl(L(A),L(B)\bigr)$ — существенный подмодуль в (A,B). Модуль (A,B) инъективен в точности тогда, когда существуют замыкания $\overline{L(A)}$ и $\overline{L(B)}$, которые являются инъективными,*

$$L(A) \cap M\overline{L(B)} = 0, \quad N\overline{L(A)} \cap L(B) = 0,$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, \overline{L(A)}) \subseteq \mathrm{Im}\, f, \quad \mathrm{Hom}_S(N, \overline{L(B)}) \subseteq \mathrm{Im}\, g.$$

Доказательство. Допустим, что модуль (A,B) инъективен. Существуют такие замыкания (A_1,B_2) и (A_2,B_1) подмодулей $(L(A),0)$ и $\bigl(0,L(B)\bigr)$ соответственно, что $(A_1,B_2) \cap (A_2,B_1) = 0$. Замкнутые подмодули инъективного модуля инъективны. Следовательно, $(A_1,B_2) \oplus (A_2,B_1)$ — существенный инъективный подмодуль в (A,B), и поэтому $(A,B) = (A_1,B_2) \oplus (A_2,B_1)$. Непосредственно проверяется, что A_1 — существенное расширение модуля $L(A)$ и B_1 — существенное расширение модуля $L(B)$. Прямые слагаемые A_1 и B_1 — замкнутые подмодули. Поэтому $A_1 = \overline{L(A)}$ и $B_1 = \overline{L(B)}$. По лемме 2.3 имеем гомоморфизм $(1,f)\colon (A_1,B_2) \to \bigl(A_1, H(A_1)\bigr)$ (точнее говоря, вместо f надо взять ограничение f на B_2). Так как $B_2 \cap L(B) = 0$, то $(1,f)$ — мономорфизм. Поскольку модуль (A_1,B_2) инъективен, то, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5.2, получаем, что $(1,f)$ — изоморфизм. Следовательно, модуль $\bigl(A_1, H(A_1)\bigr)$ инъективен. Тогда модуль A_1 инъективен по предложению 5.1. Кроме того, $\mathrm{Hom}_R(M,A_1) \subseteq \mathrm{Im}\, f$. Наконец, из включений $L(A) \subseteq A_1$

и $MB_1 \subseteq A_2$ следует, что $L(A_1) \cap MB_1 = 0$. Оставшиеся утверждения доказываются аналогично; в частности, $(g, 1)\colon (A_2, B_1) \to (H(B_1), B_1)$ есть изоморфизм.

Теперь допустим, что существуют замыкания $\overline{L(A)}$ и $\overline{L(B)}$, которые являются инъективными, $\overline{L(A)} \cap M\overline{L(B)} = 0$, $N\overline{L(A)} \cap \overline{L(B)} = 0$, $\mathrm{Hom}_R(M, \overline{L(A)}) \subseteq \subseteq \mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Hom}_S(N, \overline{L(B)}) \subseteq \mathrm{Im}\, g$. Обозначим $A_1 = \overline{L(A)}$ и $B_1 = \overline{L(B)}$. Рассмотрим также подмодули (A_1, NA_1) и (MB_1, B_1). Заметим, что их пересечение равно нулю. Возьмём также модули $\big(A_1, H(A_1)\big)$ и $(H(B_1), B_1)$, которые инъективны по предложению 5.1. Мы также рассмотрим гомоморфизмы

$$(1, f)\colon (A_1, NA_1) \to \big(A_1, H(A_1)\big), \quad (g, 1)\colon (MB_1, B_1) \to (H(B_1), B_1),$$

где через f и g обозначаются ограничения гомоморфизмов на соответствующие подмодули. На самом деле мы имеем мономорфизмы, так как $\mathrm{Ker}\, f = L(B) \cap \cap NA_1 = 0$ (аналогичные равенства верны для $\mathrm{Ker}\, g$). Сумма отображений $(1, f) + (g, 1)$ продолжается до мономорфизма $(A, B) \to \big(A_1, H(A_1)\big) \oplus (H(B_1), B_1)$. Отождествим (A, B) с образом этого мономорфизма. Уточним, что подмодуль $L(A)$ играет в записанной сумме ту же роль, что и в (A, B).

Имеем прямые разложения

$$A = A_1 \oplus A_2, \quad B = B_1 \oplus B_2, \quad \text{где} \quad A_2 = A \cap H(B_1), \quad B_2 = B \cap A_1.$$

Понятно, что существуют K-модули (A_1, B_2), (A_2, B_1) и прямое разложение $(A, B) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$. Удобно вернуться к исходному модулю (A, B) и считать, что данное разложение есть разложение этого модуля. Опять возьмём мономорфизм $(1, f)\colon (A_1, B_2) \to \big(A_1, H(A_1)\big)$. Пусть $\alpha \in H(A_1)$. Так как $H(A_1) \subseteq \mathrm{Im}\, f$, то $\alpha = f(b)$ для некоторого $b \in B$. Запишем $b = c + d$, где $c \in B_2$, $d \in B_1$. Для каждого $m \in M$ имеем

$$\alpha(m) = f(b)(m) = mb = mc + md, \quad mc, mb \in A_1, \quad md \in A_2.$$

Поэтому $md = 0$ и $mb = mc$. Тогда получаем

$$\alpha(m) = mc = f(c)(m), \quad \alpha = f(c).$$

Доказано, что $(1, f)$ — изоморфизм. Таким образом,

$$(A, B) \cong \big(A_1, H(A_1)\big) \oplus (H(B_1), B_1),$$

и модуль (A, B) инъективен. □

Следствие 5.4. *Пусть сохраняются условия и обозначения теоремы* 5.3. *Тогда имеет место канонический изоморфизм*

$$(A, B) \cong \big(A_1, H(A_1)\big) \oplus (H(B_1), B_1).$$

Замечание. Пусть K — произвольное кольцо формальных матриц и (A, B) — любой K-модуль. Тогда (A, B) — существенное расширение модуля $(L(A) + MB, L(B) + NA)$, причём (A, B) — существенное расширение модуля $\big(L(A), L(B)\big)$ в случае, когда K — кольцо с нулевыми идеалами следа. Действительно, пусть $(a, b) \in (A, B)$ и $a \neq 0$. Если $na = 0$ для всех $n \in N$, то $a \in L(A)$, а если $na \neq 0$ для некоторого $n \in N$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}(a,b) = (0, na) \in (0, NA).$$

Случай $b \neq 0$ рассматривается аналогично. Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то $MB \subseteq L(A)$, $NA \subseteq L(B)$, $L(A)+MB = L(A)$, $L(B)+NA = L(B)$.

Следствие 5.5. *Пусть (A,B) — K-модуль.*

1. *Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то модуль (A,B) инъективен в точности тогда, когда модули $L(A)$ и $L(B)$ инъективны, $\mathrm{Hom}_R\big(M, L(A)\big) \subseteq \mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Hom}_S\big(N, L(B)\big) \subseteq \mathrm{Im}\, g$.*
2. *Если*
$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} -$$
кольцо треугольных матриц, то модуль (A,B) инъективен в точности тогда, когда модули A и $L(B)$ инъективны и $f\colon B \to \mathrm{Hom}_R(M,A)$ — эпиморфизм.

Доказательство. 1. Так как K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то для любого модуля $\big(X, H(X)\big)$ верны равенства $L(X) = X$ и $L\big(H(X)\big) = 0$. Аналогичные равенства верны для модулей вида $(H(Y), Y)$.

Допустим, что модуль (A,B) инъективен. Отождествим его с изоморфным образом из следствия 5.4. Тогда $L(A) = \overline{L(A)}$ и $L(B) = \overline{L(B)}$. Поэтому модули $L(A)$ и $L(B)$ инъективны. Оставшаяся часть утверждения 1 вытекает из теоремы 5.3.

2. Утверждение 2 следует из утверждения 1 и того, что $L(A) = A$. □

Теорема 5.6. *Произвольный K-модуль (A,B) инъективен в точности тогда, когда некоторое замыкание подмодуля $\big(L(A), L(B)\big)$ инъективно, причём существуют такие замыкания $\overline{L(A)}$ и $\overline{L(B)}$, что фактор-модули*

$$A\Big/\Big(\overline{L(A)} + g^{-1}H\big(\overline{L(B)}\big)\Big), \quad B\Big/\Big(\overline{L(B)} + f^{-1}H\big(\overline{L(A)}\big)\Big)$$

инъективны.

Доказательство. Допустим, что модуль (A,B) инъективен. Замкнутые подмодули инъективных модулей инъективны. Существует прямое разложение $(A,B) = (G,H) \oplus (C,D)$, где первое слагаемое является некоторым замыканием подмодуля $\big(L(A), L(B)\big)$. К модулю (G,H) можно применить теорему 5.3. Следовательно, существуют инъективные замыкания A_1, B_1 модулей $L(A)$, $L(B)$ соответственно. Существует прямое разложение $(G,H) = (A_1, B_2) \oplus (A_2, B_1)$ для некоторых подмодулей A_2, B_2. Кроме того, из доказательства теоремы 5.3 вытекает, что отображения

$$(1,f)\colon (A_1, B_2) \to \big(A_1, H(A_1)\big), \quad (g,1)\colon (A_2, B_1) \to (H(B_1), B_1)$$

являются изоморфизмами. Модуль (C,D) инъективен и $L(C)=0=L(D)$. По теореме 5.2 модули C и D инъективны. Осталось заметить, что

$$C\cong A/(A_1\oplus A_2)=A/\big(A_1+g^{-1}H(B_1)\big).$$

Аналогичные соотношения верны и для другого фактор-модуля.

Пусть выполнены условия теоремы. Следовательно, $(A,B)=(G,H)\oplus(C,D)$ для некоторого замыкания (G,H) подмодуля $\big(L(A),L(B)\big)$ и такого модуля (C,D), что $L(C)=0=L(D)$. Можно применить теорему 5.3 к модулю (G,H). Как и выше, существует прямое разложение $(G,H)=(A_1,B_2)\oplus(A_2,B_1)$, причём отображения $(1,f)$ и $(g,1)$ являются изоморфизмами. Повторяя приведённые ранее рассуждения, получим, что модули C и D инъективны. По теореме 5.2 модуль (C,D) инъективен. Поэтому модуль (A,B) инъективен. $\square$

Из доказанных выше теорем вытекает следующий вывод.

Замечание. Каждый инъективный модуль (A,B) обладает прямым разложением

$$(A,B)=(A_1,B_2)\oplus(A_2,B_1)\oplus(C,D),$$
$$A_1=\overline{L(A)},\quad B_1=\overline{L(B)},\quad L(C)=0=L(D),$$

причём канонические отображения

$$B_2\to\mathrm{Hom}_R(M,A_1),\quad A_2\to\mathrm{Hom}_S(N,B_1),$$
$$D\to\mathrm{Hom}_R(M,C),\quad C\to\mathrm{Hom}_S(N,D)$$

являются изоморфизмами.

Следствие 5.7 (Мюллер [44]). *Модуль (A,B) инъективен в точности тогда, когда существуют инъективный R-модуль X и инъективный S-модуль Y, такие что $(A,B)\cong\big(X,H(X)\big)\oplus\big(Y,H(Y)\big)$.*

Доказательство. Следствие 5.7 вытекает из предыдущего замечания, теоремы 5.2 и теоремы 5.3. $\square$

Из полученной информации об инъективных модулях можно получить описание инъективных оболочек. Инъективная оболочка некоторого модуля V обозначается через $\hat V$.

Лемма 5.8. *Пусть V — модуль над некоторым кольцом, C_1 и C_2 — замкнутые подмодули в V, такие что $C_1\cap C_2=0$ и $C_1\oplus C_2$ — существенный подмодуль в V. Тогда*

$$\hat V=\hat C_1\oplus\hat C_2,\quad\text{где}\quad \hat C_1\cong\widehat{V/C_1},\quad \hat C_2\cong\widehat{V/C_2}.$$

Доказательство. Можно записать $\hat V\cong\hat C_1\oplus\hat C_2$. Верны соотношения $C_2\cong(C_1\oplus C_2)/C_1\subseteq V/C_1$, причём V/C_1 — существенное расширение модуля $(C_1\oplus C_2)/C_1$. Действительно, пусть B — такой подмодуль, что $C_1\subseteq B$ и $C_1\neq B$. Так как C_1 — замкнутый подмодуль в V, то $B\cap C_2\neq 0$. Следовательно, $B/C_1\cap(C_1\oplus C_2)/C_1\neq 0$. Поэтому модуль C_2 изоморфен существенному подмодулю в V/C_1, откуда следует, что $\hat{C}_2 \cong \widehat{V/C_1}$. Второй изоморфизм доказывается аналогично. □

Следствие 5.9 (Мюллер [44]). *Пусть (A, B) — K-модуль.*

1. *Если $L(A) = 0 = L(B)$, то существует K-модуль $(\hat{A}, \hat{B})$ и этот модуль является инъективной оболочкой модуля (A, B). Кроме того, имеют место канонические изоморфизмы $\hat{A} \cong \mathrm{Hom}_S(N, \hat{B})$ и $\hat{B} \cong \mathrm{Hom}_R(M, \hat{A})$.*
2. *Если (A, B) — существенное расширение модуля $\big(L(A), L(B)\big)$, то модуль $\Big(\widehat{L(A)}, H\big(\widehat{L(A)}\big)\Big) \oplus \big(H\big(\widehat{L(B)}\big), \widehat{L(B)}\big)$ является инъективной оболочкой модуля (A, B).*
3. *Инъективная оболочка модуля (A, B) имеет вид $U \oplus V$, где U — инъективная оболочка модуля $\big(L(A), L(B)\big)$ и существует такое замыкание W подмодуля $\big(L(A), L(B)\big)$, что V — инъективная оболочка фактор-модуля $(A, B)/W$. Модуль $\big(L(A), L(B)\big)$ удовлетворяет условиям пункта 2, а модуль $(A, B)/W$ удовлетворяет условиям пункта 1.*

Доказательство. 1. Рассмотрим K-модуль $\big(\hat{A}, H(\hat{A})\big)$. По предложению 5.1 этот модуль инъективен. Так как $H(A) \subseteq H(\hat{A})$, то можно рассмотреть гомоморфизм $(1, f)\colon (A, B) \to \big(\hat{A}, H(\hat{A})\big)$. Поскольку $L(B) = 0$, то $(1, f)$ — мономорфизм. Его образ — существенный подмодуль в $\big(\hat{A}, H(\hat{A})\big)$. В противном случае $\big(\hat{A}, H(\hat{A})\big)$ содержит некоторую инъективную оболочку образа вида $(\hat{A}, Y)$ для некоторого собственного подмодуля Y. Тогда $H(\hat{A}) = Y \oplus Z$, где $Z \neq 0$ и $MZ = 0$. Это противоречит равенству $L\big(H(\hat{A})\big) = 0$ (это рассуждение аналогично рассуждению из начала доказательства теоремы 5.2). Таким образом, $\big(\hat{A}, H(\hat{A})\big)$ является инъективной оболочкой модуля (A, B). Аналогично модуль $(H(\hat{B}), \hat{B})$ также является инъективной оболочкой модуля (A, B). Отождествим модуль (A, B) с его изоморфным образом в этих двух оболочках. Тогда тождественное отображение модуля (A, B) продолжается до изоморфизма $(\alpha, \beta)\colon \big(\hat{A}, H(\hat{A})\big) \to (H(\hat{B}), \hat{B})$. Кроме того, α — продолжение мономорфизма $g\colon A \to \mathrm{Hom}_S(N, B)$, а β — продолжение обратного изоморфизма к $f\colon B \to \mathrm{Im}\, f$. Именно это подразумевается под каноническим характером указанных в следствии эндоморфизмов.

2. Инъективная оболочка модуля (A, B) совпадает с инъективной оболочкой модуля $\big(L(A), L(B)\big)$, равного $(L(A), 0) \oplus \big(0, L(B)\big)$. Из доказательства теоремы 5.3 следует, что инъективная оболочка модуля $(L(A), 0) \oplus \big(0, L(B)\big)$ совпадает с указанной в следствии суммой.

3. Утверждение проверяется с помощью леммы 5.8. □

6. Плоские модули

В этом разделе мы опишем плоские модули над кольцом формальных матриц K с нулевыми идеалами следа. Будем использовать правые модули и правосторонние аналоги полученных ранее утверждений и введённых конструкций. Часто будут появляться идеалы следа I и J кольца K (см. раздел 1). Сделаем также следующее замечание: встречающиеся в тексте изоморфизмы являются каноническими; это означает, что они действуют по определённому правилу, которые несложно указать.

При изучении плоских модулей полезна любая информация о тензорных произведениях. Тензорное произведение K-модулей можно вычислить с помощью тензорного произведения R-модулей и тензорного произведения S-модулей. Пусть $U=(C,D)$ — правый K-модуль и $V=(A,B)$ — левый K-модуль.

Предложение 6.1. *Имеет место изоморфизм абелевых групп*

$$U\otimes_K V\cong(C\otimes_R A\oplus D\otimes_S B)/H,$$

где подгруппа H порождается всеми элементами вида

$$c\otimes mb-cm\otimes b,\quad d\otimes na-dn\otimes a,$$

где

$$c\in C,\quad d\in D,\quad a\in A,\quad b\in B,\quad m\in M,\quad n\in N.$$

Доказательство. Группа $C\otimes_R A\oplus D\otimes_S B$ изоморфна группе $U\otimes_{R\times S}V$ при соответствии образующих элементов $c\otimes a+d\otimes b\to(c,d)\otimes(a,b)$. Обозначим $G_1=U\otimes_{R\times S}V$ и $G_2=U\otimes_K V$. Воспользуемся определением тензорного произведения как фактор-группы свободной группы. Пусть F — свободная абелева группа с базисом, состоящим из всех выражений

$$\big((c,d),(a,b)\big),\quad c\in C,\quad d\in D,\quad a\in A,\quad b\in B.$$

Тогда $G_1=F/H_1$ и $G_2=F/H_2$, где H_1 и H_2 — подгруппы, порождённые элементами известного вида. Укажем разницу между этими подгруппами. Система образующих группы H_1 содержит все элементы вида

$$\big((c,d),(ra,sb)\big)-\big((cr,ds),(a,b)\big),\quad r\in R,\quad s\in S,$$

система образующих группы H_2 содержит все элементы вида

$$\big((c,d),k(a,b)\big)-\big((c,d)k,(a,b)\big),\quad k=\begin{pmatrix}r&m\\n&s\end{pmatrix}\in K,$$

а все остальные образующие элементы этих двух групп совпадают. Поэтому $H_1\subseteq H_2$. Верны соотношения

$$G_2=F/H_2\cong(F/H_1)/(H_2/H_1)=G_1/H,\quad\text{где}\quad H=H_2/H_1.$$

Фактор-группа H_2/H_1 порождается образами всех образующих элементов группы H_2, т. е. элементами вида

$$\big((c,d)\otimes(mb,na)\big)-\big((dn,cm)\otimes(a,b)\big).$$

Используя указанный выше изоморфизм, получаем, что

$$G_2\cong(C\otimes_R A\oplus D\otimes_S B)/H,$$

где (непереобозначенная) подгруппа H порождается всеми элементами вида $cm \otimes b + d \otimes na - dn \otimes a - cm \otimes b$; поэтому H порождается всеми указанными выше элементами. $\square$

Замечания. Приведём некоторые общие замечания и обозначения, относящиеся к K-модулю (A, B). Обозначим через L идеал

$$\begin{pmatrix} I & IM \\ JN & J \end{pmatrix}$$

кольца K и положим $\bar{K} = K/L$. Можно отождествить фактор-кольцо $\bar{K}$ с кольцом матриц

$$\begin{pmatrix} R/I & M/IM \\ N/JN & S/J \end{pmatrix}.$$

Последнее кольцо обозначим через

$$\begin{pmatrix} \bar{R} & \bar{M} \\ \bar{N} & \bar{S} \end{pmatrix}.$$

Так как $\bar{M}\bar{N} = 0 = \bar{N}\bar{M}$, то $\bar{K}$ — кольцо с нулевыми идеалами следа. Модуль (A, B) имеет подмодули (IA, JB) и (MB, NA), причём $(IA, JB) \subseteq (MB, NA)$. Как было отмечено выше, можно отождествить фактор-модули $(A, B)/(IA, JB)$ и $(A, B)/(MB, NA)$ с модулями $(A/IA, B/JB)$ и $(A/MB, B/NA)$ соответственно. Так как $L(A, B) = (IA, JB)$, то $(A/IA, B/JB)$ и $(A/MB, B/NA)$ — $\bar{K}$-модули.

Теперь рассмотрим идеал

$$L_1 = \begin{pmatrix} I & M \\ N & J \end{pmatrix}$$

кольца K. Существует изоморфизм

$$K/L_1 \cong R/I \times S/J = \bar{R} \times \bar{S}.$$

Из равенства $L_1(A, B) = (MB, NA)$ вытекает, что $(A/MB, B/NA)$ — $(\bar{R}\times\bar{S})$-модуль.

Используя указанные выше обозначения, сформулируем следующий результат.

Следствие 6.2. *Пусть (A, B) — плоский K-модуль.*

1. *$(A/IA, B/JB)$ — плоский $\bar{K}$-модуль и $M/IM \otimes_S B/NA \cong MB/IA$, $N/JN \otimes_R A/MB \cong NA/JB$.*
2. *A/MB — плоский $\bar{R}$-модуль и B/NA — плоский $\bar{S}$-модуль.*
3. *Если $I = 0$, то $M \otimes_S B/NA \cong MB$ и A/MB — плоский R-модуль, причём при $N = 0$ имеем $M \otimes_S B \cong MB$ и B — плоский S-модуль.*

Доказательство. 1. Верно равенство $(A/IA, B/JB) = (A, B)/L(A, B)$. Известно, что $(A, B)/L(A, B)$ — плоский модуль. Это, например, следует из критерия Чейза (см. [4, предложение 11.33]).

Обозначим $\bar{A} = A/IA$ и $\bar{B} = B/JB$. Так как $(\bar{A}, \bar{B})$ — плоский модуль, то существует изоморфизм

$$(0, \bar{M}) \otimes_{\bar{K}} (\bar{A}, \bar{B}) \cong (0, \bar{M})(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{M}\bar{B},$$

где $(0, \bar{M})$ — правый идеал кольца $\bar{K}$. По предложению 6.1 тензорное произведение из левой части изоморфно фактор-группе $(\bar{M} \otimes_{\bar{S}} \bar{B})/\bar{H}$, причём подгруппа $\bar{H}$ порождается элементами вида $\bar{m} \otimes \bar{n}\bar{a}$ для всех $\bar{m} \in \bar{M}$, $\bar{n} \in \bar{N}$, $\bar{a} \in \bar{A}$ (нужно учесть, что $\bar{M}\bar{N} = 0$). Группа $\bar{H}$ является образом индуцированного отображения $\bar{M} \otimes_{\bar{S}} \bar{N}\bar{A} \to \bar{M} \otimes_{\bar{S}} \bar{B}$. Следовательно, получаем изоморфизм $(0, \bar{M}) \otimes_K (\bar{A}, \bar{B}) \cong \bar{M} \otimes_{\bar{S}} \bar{B}/\bar{N}\bar{A}$. Таким образом, приходим к изоморфизму

$$\bar{M} \otimes_{\bar{S}} \bar{B}/\bar{N}\bar{A} \cong \bar{M}\bar{B}, \quad \bar{m} \otimes (\bar{b} + \bar{N}\bar{A}) \to \bar{m}\bar{b}.$$

При более подробной записи этот изоморфизм имеет вид $M/IM \otimes_S B/NA \cong$ $\cong MB/IA$. Второй изоморфизм доказывается аналогично.

2. Аналогично пункту 1 доказывается, что $(A/MB, B/NA)$ — плоский $(\bar{R} \times \bar{S})$-модуль.

3. Утверждение 3 непосредственно следует из утверждений 1) и 2. $\square$

Замечания. Правосторонний вариант конструкции K-модулей $\big(X, H(X)\big)$ и $(H(Y), Y)$ из раздела 2 выглядит следующим образом. Если Z — правый R-модуль, то группа векторов-строк $\big(Z, \mathrm{Hom}_R(N, Z)\big)$ является правым K-модулем. Гомоморфизмы модульного умножения определяются аналогично случаю левых модулей. Аналогично правый S-модуль Z приводит к правому K-модулю $(\mathrm{Hom}_S(M, Z), Z)$.

Мы будем применять к K-модулям одну стандартную процедуру перехода от левых модулей к правым модулям. Пусть (X, Y) — K-модуль и G — произвольная абелева группа. Группа аддитивных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\big((X, Y), G\big)$ является правым K-модулем с модульным умножением, определяемым равенством

$$(\eta k)(x, y) = \eta\big(k(x, y)\big), \quad \eta \in \mathrm{Hom}\big((X, Y), G\big), \quad k \in K, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Аналогично группа $\mathrm{Hom}(X, G)$ $(\mathrm{Hom}(Y, G))$ — правый R-модуль (соответственно правый S-модуль). Можно рассматривать группу векторов-строк $\big(\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G)\big)$ как правый K-модуль. Модульные умножения задаются равенствами

$$(\alpha m)y = \alpha(my), \quad (\beta n)x = \beta(nx),$$

где

$$\alpha \in \mathrm{Hom}(X, G), \quad \beta \in \mathrm{Hom}(Y, G), \quad m \in M, \quad n \in N, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Существует канонический K-модульный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}\big((X, Y), G\big) \to \big(\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G)\big),$$
$$\mathrm{Hom}\big((X, Y), G\big) \ni \eta \to (\eta|_X, \eta|_Y) \in \big(\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G)\big).$$

С помощью этого изоморфизма мы отождествляем K-модули

$$\mathrm{Hom}\big((X, Y), G\big) \to \big(\mathrm{Hom}(X, G), \mathrm{Hom}(Y, G)\big).$$

Если V — модуль над некоторым кольцом T, то правый T-модуль $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ называется *модулем характеров* модуля V и обозначается V^*. Модуль характеров K-модуля (X,Y) есть (X^*,Y^*). Хорошо известно, что T-модуль V является плоским в точности тогда, когда модуль характеров V^* инъективен. Поскольку мы получили описание инъективных K-модулей, то можно условно считать, что мы имеем описание плоских K-модулей. Другое дело, что это описание трудно сформулировать в терминах исходного модуля (X,Y). Однако иногда это возможно. Например, легко получить следующий результат (ср. с предложением 5.1).

Предложение 6.3. *K-модуль $\big(X,T(X)\big)$ является плоским в точности тогда, когда X — плоский R-модуль. Аналогичное утверждение верно для S-модуля Y и K-модуля $(T(Y),Y)$. Таким образом, функтор T из раздела 2 сохраняет плоские модули.*

Доказательство. Мы договорились отождествлять модуль характеров модуля $\big(X,T(X)\big)$ с правым K-модулем $(X^*,T(X)^*)$. Имеют место естественные изоморфизмы правых S-модулей

$$T(X)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N\otimes_R X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_R\big(N,\mathrm{Hom}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) = \mathrm{Hom}_R(N,X^*).$$

Итак, модуль характеров K-модуля $\big(X,T(X)\big)$ совпадает с $\big(X^*,\mathrm{Hom}_R(N,X^*)\big)$. По правостороннему аналогу предложения 5.1 модуль $\big(X^*,\mathrm{Hom}_R(N,X^*)\big)$ инъективен в точности тогда, когда модуль X^* инъективен. Последнее равносильно тому, что модуль X является плоским.

Случай модуля Y рассматривается аналогично. □

Замечание. Из предложения 6.3 непосредственно вытекает, что модуль $(A,0)$ $((0,B))$ является плоским в точности тогда, когда A — плоский модуль и $N\otimes_R A=0$ (соответственно B — плоский модуль и $M\otimes_S B=0$). Кроме того, теорема 5.2 фактически эквивалентна следующему результату.

Следствие 6.4. *Пусть (A,B) — K-модуль и $NA=B$, $MB=A$. Тогда модуль (A,B) является плоским в точности тогда, когда A и B — плоские модули.*

Доказательство. Модуль характеров модуля (A,B) равен (A^*,B^*). Так как $(\eta m)b=\eta(mb)$ для всех $\eta\in A^*$, $m\in M$ и $b\in B$, то

$$L(A^*) = \mathrm{Hom}(A/MB,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (A/MB)^*,$$

где модуль $\mathrm{Hom}(A/MB,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ отождествляется с множеством всех $\eta\colon A\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с условием $\eta(MB)=0$. Кроме того, $L(B^*)=(B/NB)^*$. Поэтому из условия получаем, что $L(A^*)=0=L(B^*)$. Модуль (A^*,B^*) удовлетворяет условиям правостороннего варианта теоремы 5.2. Следовательно, модуль (A^*,B^*) инъективен в точности тогда, когда модули A^* и B^* инъективны. Последнее свойство равносильно тому, что A и B — плоские модули. □

При дополнительном условии, что идеалы следа кольца K равны нулю, получаем законченный результат.

Теорема 6.5. *Если K — кольцо с нулевыми идеалами следа, то K-модуль (A,B) является плоским в точности тогда, когда A/MB — плоский R-модуль, B/NA — плоский S-модуль и имеют место изоморфизмы*

$$M\otimes_S B/NA\cong MB,\quad N\otimes_R A/MB\cong NA.$$

Доказательство. Если (A,B) — плоский K-модуль, то по утверждению 3 следствия 6.2 A/MB — плоский R-модуль, B/NA — плоский S-модуль, $M\otimes_S B/NA\cong MB$ и $N\otimes_R A/MB\cong NA$.

Докажем достаточность условий. Существуют K-модули $(MB,0)$ и (A,NA). Рассмотрим фактор-модуль $(A,NA)/(MB,0)$, который совпадает с модулем $(A/MB,NA)$. Тогда $M(NA)=0$ и $n(a+MB)=na$ для всех $n\in N$ и $a\in A$. По предположению S-модули $N\otimes_R A/MB$ и NA изоморфны. Этот изоморфизм индуцируется соответствием $n\otimes(a+MB)\to na$ образующих элементов. По лемме 2.2 тождественное отображение модуля A/MB индуцирует K-модульный гомоморфизм $\big(A/MB,T(A/MB)\big)\to(A/MB,NA)$, который совпадает с вышеуказанным изоморфизмом на вторых позициях. Теперь из предложения 6.3 и условия теоремы вытекает, что $(A/MB,NA)$ — плоский модуль. Аналогично доказывается, что $(MB,B/NA)$ — плоский модуль. Поэтому модули характеров $(A/MB,NA)^*$ и $(MB,B/NA)^*$ инъективны. Теперь докажем, что прямая сумма этих двух модулей изоморфна модулю $(A,B)^*$. Итак, надо проверить, что существует изоморфизм правых K-модулей

$$\big((A/MB)^*\oplus(MB)^*,(NA)^*\oplus(B/NA)^*\big)\cong(A^*,B^*). \tag{1}$$

Будем использовать следующие равенства из доказательства следствия 6.4:

$$(A/MB)^*M=0=(B/NA)^*N. \tag{2}$$

Так как $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективен, то имеется точная последовательность правых R-модулей

$$0\to(A/MB)^*\to A^*\xrightarrow{\pi}(MB)^*. \tag{3}$$

Как уже отмечалось, мы отождествляем модуль $(A/MB)^*$ с его образом в A^*, который состоит из всех гомоморфизмов $A\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, аннулирующих MB. Кроме того, отметим, что отображение π ставит в соответствие произвольному гомоморфизму $A\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ его ограничение на MB. R-модуль $(A/MB)^*$ инъективен, поскольку A/MB — плоский модуль. Следовательно, существует прямое разложение $A^*=(A/MB)^*\oplus V$ со слагаемым V, изоморфным модулю MB^*. Чтобы получить требуемый изоморфизм (1), необходимо выбрать определённым образом модуль V и изоморфизм между $(MB)^*$ и V. Так как последовательность (3) расщепляется, то существует мономорфизм $\varepsilon\colon(MB)^*\to A^*$, для которого $\varepsilon\pi$ — тождественное отображение. В качестве V возьмём $\operatorname{Im}\varepsilon$, а в качестве изоморфизма между $(MB)^*$ и V возьмём ε. В результате получим изоморфизм правых K-модулей

$$\Phi\colon(A/MB)^*\oplus(MB)^*\to A^*,$$

который действует тождественно на $(A/MB)^*$, причём $\Phi(\alpha)|_{MB} = \alpha$ для всех $\alpha \in (MB)^*$. Можно также найти изоморфизм $\Psi\colon (NA)^* \oplus (B/NA)^* \to B^*$ с аналогичными свойствами.

Докажем, что пара (Φ, Ψ) задаёт изоморфизм (1). Достаточно проверить выполнение правосторонних аналогов двух равенств, указанных в разделе 2. А именно, проверим, что

$$\Phi(\beta n) = \Psi(\beta)n, \quad \Psi(\alpha m) = \Phi(\alpha)m,$$

для всех

$$\beta \in (NA)^* \oplus (B/NA)^*, \quad \alpha \in (A/MB)^* \oplus (MB)^*, \quad n \in N, \quad m \in M.$$

В процессе проверки будем учитывать равенства (2) и выбор изоморфизмов Φ и Ψ. Возьмём конкретные β, n и запишем $\beta = \gamma+\delta$, где $\gamma \in (NA)^*$, $\delta \in (B/NA)^*$. Так как $\delta n = 0$, то $\beta n = \gamma n \in (A/MB)^*$. Для любого элемента $a \in A$ из определения отображения Φ имеем равенство $\Phi(\beta n) = \Phi(\gamma n)a$. С другой стороны, из определения отображения Ψ вытекает, что

$$(\Psi(\delta)n)a = \big(\Psi(\delta)\big)(na) = 0, \quad (\Psi(\beta)n)a = (\Psi(\gamma)n)a = \big(\Psi(\gamma)\big)(na).$$

Так как $\gamma(na) = (\gamma n)a$, то $\Phi(\beta n) = \Psi(\beta)n$. Второе равенство проверяется аналогично. Итак, модуль $(A, B)^*$ инъективен. Поэтому (A, B) — плоский модуль. □

Следствие 6.6 [17]. *Модуль (A, B) над кольцом*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

является плоским в точности тогда, когда A/MB и B — плоские модули и $M \otimes_S B \cong MB$.

7. Проективные и наследственные модули и кольца

Над кольцом K формальных матриц с нулевыми идеалами следа проективные модули и наследственные модули допускают удовлетворительное описание. Затем мы применяем это описание к поиску условий, при которых кольцо K наследственно.

По-прежнему I и J обозначают идеалы следа кольца K. В этом разделе мы будем использовать обозначение (P, Q) для K-модулей.

Первый наш результат можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства предложения 5.1. Только надо ссылаться на лемму 2.2 вместо леммы 2.3.

Предложение 7.1. *Если X — проективный R-модуль и Y — проективный S-модуль, то $\big(X, T(X)\big)$ и $(T(Y), Y)$ — проективные K-модули. Верно и обратное.*

Из предложения 7.1 вытекает, что K-модуль $(X,0)$ проективен в точности тогда, когда X — проективный R-модуль и $N \otimes_R X = 0$. Аналогично получаем, что утверждение верно для K-модуля $(0,Y)$.

В разделе 6 мы определили идеалы L и L_1 кольца K.

Следствие 7.2. *Пусть (P,Q) — проективный K-модуль.*

1. *$(P/IP, Q/JQ)$ — проективный K/L-модуль.*
2. *P/MQ — проективный R/I-модуль и Q/NP — проективный S/J-модуль.*

Доказательство. Если V — проективный модуль над некоторым кольцом T и A — идеал в T, то V/AV — проективный T/A-модуль. Используя это свойство при $T=K$, $A=L$ и $T=K$, $A=L_1$, нетрудно доказать утверждения 1 и 2. $\square$

Теорема 7.3. *Пусть K — кольцо с нулевыми идеалами следа и (P,Q) — K-модуль. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *(P,Q) — проективный модуль;*
2) *P/MQ — проективный R-модуль, Q/NP — проективный S-модуль,*
$$M \otimes_S Q/NP \cong MQ, \quad N \otimes_R P/MQ \cong NP;$$
3) *существуют проективный R-модуль X и проективный S-модуль Y, для которых $(P,Q) = (X, NP) \oplus (MQ, Y)$, $M \otimes_S Y \cong MQ$ и $N \otimes_R X \cong NP$;*
4) *существуют проективный R-модуль X и проективный S-модуль Y, для которых $(P,Q) \cong \big(X, T(X)\big) \oplus (T(Y), Y)$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По следствию 7.2 P/MQ — проективный R-модуль и Q/NP — проективный S-модуль. По следствию 6.2 $M \otimes_S Q/NP \cong MQ$ и $N \otimes_R P/MQ \cong NP$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Сначала сделаем одно замечание. Так как $Y \subseteq Q$, то существует индуцированный гомоморфизм $M \otimes_S Y \to M \otimes_S Q$. Композиция этого гомоморфизма с гомоморфизмом модульного умножения $M \otimes_S Q \to MQ$ даёт гомоморфизм $M \otimes_S Y \to MQ$. В условии 3) подразумевается, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Можно записать $P = X \oplus MQ$ и $Q = NP \oplus Y$, где $X \cong P/MQ$ и $Y \cong Q/NP$. Так как (X, NP) и (MQ, Y) — K-модули, то получаем равенства
$$(P,Q) = (X \oplus MQ, NP \oplus Y) = (X, NP) \oplus (MQ, Y).$$

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) следует из леммы 2.2 и того, что
$$\big(X, T(X)\big) \cong (X, NP), \quad (T(Y), Y) \cong (MQ, Y).$$
Импликация 4) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из предложения 7.1. $\square$

Для кольца треугольных матриц получаем следующий результат, в котором эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) доказана в [26].

Следствие 7.4. *Пусть*
$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$
и (P,Q) — K-модуль. Тогда равносильны следующие условия:

1) (P, Q) — *проективный модуль*;
2) P/MQ — *проективный R-модуль, Q — проективный S-модуль и $M \otimes_S Q \cong$ $\cong MQ$*;
3) Q — *проективный S-модуль, $M \otimes_S Q \cong MQ$ и существует проективный R-модуль X со свойством $(P, Q) = (X, 0) \oplus (MQ, Q)$*;
4) Q — *проективный S-модуль и существует проективный R-модуль X со свойством $(P, Q) \cong (X, 0) \oplus (T(Q), Q)$*.

Некоторый модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. Изучение наследственных модулей начнём со следующего результата.

Предложение 7.5. *Если (P, Q) — наследственный модуль, то P и Q — наследственные модули.*

Доказательство. Как всегда, докажем утверждение для одного из модулей P и Q, поскольку для второго модуля утверждение доказывается аналогично. Возьмём произвольный подмодуль A в P. По условию (A, NP) — проективный подмодуль в (P, Q). Пусть $\{a_t \mid t \in T\}$ — некоторая система образующих R-модуля A. Тогда $\{(a_t, 0) \mid t \in T\}$ — система образующих K-модуля (A, NA). По лемме о дуальном базисе [4, лемма 3.23] существуют такие K-модульные гомоморфизмы $F_t\colon (A, NA) \to K$, $t \in T$, что каждый элемент $v \in (A, NA)$ равен $\sum\limits_{t \in T} F_t(v)(a_t, 0)$, где почти все элементы $F_t(v)$ равны нулю. Обозначим через h аддитивный гомоморфизм

$$K \to R, \quad \begin{pmatrix} r & * \\ * & * \end{pmatrix} \to r$$

(здесь и далее через $*$ обозначаются несущественные для нас элементы). Для каждого $t \in T$ существует такой аддитивный гомоморфизм $f_t\colon A \to R$, что $f_t(a) = (F_t h)(a, 0)$, $a \in A$. Проверим, что $f_t(ra) = rf_t(a)$ для всех $r \in R$ и $a \in A$. Имеем

$$f_t(ra) = h\big(F_t(ra, 0)\big) = h\big(rF_t(a, 0)\big) = h\left(r\begin{pmatrix} c & * \\ * & * \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} rc & * \\ * & * \end{pmatrix} = rc,$$

$$rf_t(a) = r\Big(h\big(F_t(a, 0)\big)\Big) = rh\begin{pmatrix} c & * \\ * & * \end{pmatrix} = rc.$$

Следовательно, все f_t являются R-модульными гомоморфизмами. Для каждого элемента $a \in A$ имеем

$$(a, 0) = \sum F_t(a, 0)(a_t, 0) = \sum \begin{pmatrix} r_t & * \\ * & * \end{pmatrix}(a_t, 0) = \sum (r_t a_t, *), \quad a = \sum r_t a_t,$$

где индекс $t \in T$ везде опущен, $r_t \in R$ и почти все r_t равны нулю. Таким образом, $a = \sum f_t(a) a_t$. По лемме о дуальном базисе R-модуль A проективен. Следовательно, P — наследственный модуль. □

Применение теоремы 7.3 приводит к описанию наследственных K-модулей.

Теорема 7.6. *Пусть K — кольцо с нулевыми идеалами следа и (P,Q) — K-модуль. Модуль (P,Q) является наследственным в точности тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *P и Q — наследственные модули*;
2) *для любого подмодуля B в Q модуль P/MB проективен и $M\otimes_S B\cong MB$*;
3) *для любого подмодуля A в P модуль Q/NA проективен и $N\otimes_R A\cong NA$.*

Доказательство. Допустим, что (P,Q) — наследственный модуль. По предложению 7.5 P и Q — наследственные модули. Возьмём некоторый подмодуль B в Q и K-модуль (MB,B). Модуль (MB,B) проективен, поскольку он является подмодулем наследственного модуля (P,Q). Из теоремы 7.3 следует, что $M\otimes_S B\cong MB$. Теперь возьмём подмодуль $(P,B+NP)$ модуля (P,Q). По теореме 7.3 модуль P/MB проективен. Аналогичные рассуждения верны для любого подмодуля A в P.

Теперь допустим, что условия теоремы выполнены. Пусть (A,B) — некоторый подмодуль в (P,Q). Верны соотношения

$$P=X\oplus MB,\quad M\otimes_S B\cong MB,\quad Q=Y\oplus NA,\quad N\otimes_R A\cong NA,$$

где X и Y — некоторые проективные модули. Так как $MB\subseteq A$ и $NB\subseteq A$, то существуют разложения

$$A=(A\cap X)\oplus MB,\quad B=(B\cap Y)\oplus NA,$$
$$(A,B)=(A\cap X,NA)\oplus\big(MB,(B\cap Y)\big).$$

Проверим, что последнее разложение удовлетворяет условиям пункта 3) теоремы 7.3. В самом деле, модули $A\cap X$ и $B\cap Y$ проективны. Имеем

$$MB\cong M\otimes_S B\cong M\otimes_S(B\cap Y)\oplus M\otimes_S NA.$$

Однако $M\otimes_S NA\cong MNA=0$. Поэтому $M\otimes_S(B\cap Y)\cong MB$. Аналогично $N\otimes_S(A\cap X)\cong NA$. По теореме 7.3 модуль (A,B) проективен. Поэтому (P,Q) — наследственный модуль. □

Следствие 7.7. *Модуль (P,Q) над кольцом треугольных матриц*

$$K=\begin{pmatrix}R & M\\ 0 & S\end{pmatrix}$$

является наследственным в точности тогда, когда P и Q — наследственные модули, $M\otimes_S B\cong MB$ и для любого подмодуля B в Q модуль P/MB проективен.

Замечание. Для правых K-модулей верны утверждения, аналогичные результатам из разделов 3—6 (например, верны аналоги теорем 7.3 и 7.6). Подробнее об этом см. в начале раздела 2.

Кольцо T называется *наследственным слева* (*справа*), если T — наследственный левый (правый) T-модуль, т. е. каждый левый (правый) идеал кольца T — проективный левый (правый) T-модуль.

Применим теорему 7.6 к кольцу K.

Следствие 7.8. *Кольцо формальных матриц K с нулевыми идеалами следа является наследственным слева в точности тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) *кольца R и S наследственны слева*;
2) *M — плоский S-модуль, N — плоский R-модуль и $M \otimes_S N = 0 = N \otimes_R M$*;
3) *M/ML — проективный R-модуль для любого левого идеала L кольца S*;
4) *N/NL — проективный S-модуль для любого левого идеала L кольца R.*

Доказательство. Заметим, что кольцо K наследственно слева в точности тогда, когда наследственны левые K-модули (R, N) и (M, S).

Пусть (R, N) — наследственный K-модуль. По теореме 7.6 кольцо R наследственно слева. Кроме того, для любого левого идеала L кольца R верно, что S-модуль N/NL проективен и канонический гомоморфизм $N \otimes_R L \to NL$ является изоморфизмом. Последнее свойство равносильно тому, что N — плоский R-модуль. Наконец, $M \otimes_S N = 0 = N \otimes_R M$. С использованием наследственного K-модуля (M, S) оставшиеся условия проверяются аналогично.

Допустим, что выполнены условия 1)—4). Из теоремы 7.6 вытекает, что левые K-модули (R, N) и (M, S) наследственны. Сделаем лишь ряд уточнений. Так как N — плоский S-модуль, то для S-подмодуля B в N имеем $M \otimes_S B \subseteq M \otimes_S N = 0$. Поскольку $MB = 0$, то $M \otimes_S B = MB$. Кроме того, $N \otimes_R L \cong NL$ для любого левого идеала L кольца R, поскольку N — плоский R-модуль. Аналогично доказывается, что (M, S) — наследственный модуль. □

Запишем три следствия для кольца треугольных матриц. Первое следствие применяется в разделе 9 для изучения абелевых групп с наследственными кольцами эндоморфизмов.

Следствие 7.9 (Гудёрл [19]). *Кольцо*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

наследственно слева в точности тогда, когда кольца R и S наследственны слева, M — плоский S-модуль и M/ML — проективный R-модуль для любого левого идеала L кольца S.

Следствие 7.10. *Если R и S — артиновы полупримитивные кольца, то кольцо*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

наследственно слева и справа для каждого R-S-бимодуля M.

Следствие 7.11. *Кольцо*

$$\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

наследственно слева (или справа) в точности тогда, когда R — артиново полупримитивное кольцо.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай наследственных слева колец. Если R — артиново полупримитивное кольцо, то по следствию 7.10 кольцо

$$\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

наследственно слева.

Допустим, что кольцо

$$\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

наследственно слева. По следствию 7.9 для любого левого идеала L кольца R модуль $R/RL = R/L$ проективен. Поэтому L — прямое слагаемое модуля ${}_RR$. Тогда R — артиново полупримитивное кольцо.

Случай наследственных справа колец доказывается с помощью перехода к противоположному кольцу

$$\begin{pmatrix} R^\circ & 0 \\ R^\circ & R^\circ \end{pmatrix}$$

(такие кольца упоминаются в разделе 1). $\square$

Из следствия 7.11 вытекает следующий хорошо известный факт: для любого тела D кольцо

$$\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

наследственно. Следующий результат может считаться обобщением этого факта.

Следствие 7.12. *Пусть D и F — тела,*

$$K = \begin{pmatrix} D & V \\ W & F \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Кольцо K наследственно слева (или справа) в точности тогда, когда $D \cong F$, V и W — одномерные D-пространства и F-пространства и либо K не является кольцом с нулевыми идеалами следа, либо K — кольцо (верхних или нижних) треугольных матриц.

Доказательство. Пусть кольцо K наследственно слева или справа. Поскольку D и F — тела, то для идеалов следа I и J кольца K могут быть только следующие три возможности: 1) $I = 0$; 2) $I = D$ и $J = 0$; 3) $J = F$. Рассмотрев произведения VWV и WVW, легко проверить, что либо $I = D$ и $J = F$, либо $I = 0 = J$. В первом случае получаем, что V и W — одномерные D-пространства и F-пространства и $D \cong \mathrm{End}_F(V)$ по лемме 8.3. При $I = 0 = J$ из следствия 7.8 вытекает, что $V \otimes_F W = 0$, и далее $V = 0$ или $W = 0$.

Обратно, если кольцо формальных матриц

$$\begin{pmatrix} D & D \\ D & D \end{pmatrix}$$

не является кольцом с нулевыми идеалами следа, то по следствию 1.4 это кольцо изоморфно «обычному» кольцу (2×2)-матриц над D. Случай кольца треугольных матриц содержится в следствиях 7.10 и 7.11. $\square$

Кольцо T называется *совершенным слева*, если любой левый T-модуль обладает проективной оболочкой. Кольцо T совершенно слева в точности тогда, когда каждый плоский левый T-модуль проективен.

Следствие 7.13. *Если кольцо*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

совершенно слева, то кольца R и S совершенны слева. Для кольца с нулевыми идеалами следа верно обратное.

Доказательство. Пусть кольцо K совершенно слева. Возьмём произвольный плоский R-модуль X. Тогда $\big(X, T(X)\big)$ — плоский модуль. Так как K совершенно слева, то модуль $\big(X, T(X)\big)$ проективен. По предложениям 6.3 и 7.1 модуль X проективен. Поэтому кольцо R совершенно слева. Аналогично доказывается, что кольцо S совершенно слева.

Обратно, допустим, что кольца R и S совершенны слева. По теоремам 6.5 и 7.3 любой плоский левый K-модуль проективен. Поэтому K совершенно слева. $\square$

Замечание. В общем случае не известно, верно ли утверждение, обратное следствию 7.13.

8. Эквивалентности между категориями R-mod, S-mod и K-mod

Естественно рассмотреть отдельно кольца формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

для которых $I = R$ и $J = S$. Этот случай противоположен случаю $I = 0 = J$, когда K — кольцо с нулевыми идеалами следа. Такие кольца появляются при исследовании эквивалентностей между категориями R-модулей и S-модулей. Главные результаты на эту тему известны как теоремы Мориты. В [8, § 21, 22] содержится подробное изложение различных вопросов, связанных с эквивалентностями категорий модулей. Здесь мы проясняем роль кольца K при изучении эквивалентности категорий. После этого становится ясным, что строение модулей над кольцом K при $I = R$ и $J = S$ не зависит от бимодулей M и N, а определяется строением соответствующих R-модулей или S-модулей.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц, $\varphi\colon M\otimes_S N\to R$ и $\psi\colon N\otimes_R M\to S$ — бимодульные гомоморфизмы, введённые в разделе 1. Образы I и J этих гомоморфизмов мы называем идеалами следа кольца K.

Напомним, что с данным K-модулем (A,B) ассоциируются две пары гомоморфизмов модульного умножения

$$f\colon M\otimes_S B\to A,\quad g\colon N\otimes_R A\to B,$$
$$f'\colon B\to \mathrm{Hom}_R(M,A),\quad g'\colon A\to \mathrm{Hom}_S(N,B)$$

(см. начало раздела 2).

Лемма 8.1. *Если $I=R$ и $J=S$, то f, g, f', g' — изоморфизмы.*

Доказательство. Можно записать

$$1=m_1n_1+\ldots+m_kn_k,\quad\text{где}\quad m_i\in M,\quad n_i\in N,\quad i=1,\ldots,k.$$

Так как $A=IA\subseteq MB$, то f — сюръекция. Допустим, что

$$f(x_1\otimes b_1+\ldots+x_l\otimes b_l)=0$$

для некоторых $x_j\in M$, $b_j\in B$, $j=1,\ldots,l$. Верны равенства

$$\sum_j x_j\otimes b_j=\sum_{i,j}(m_in_i)(x_j\otimes b_j)=\sum_{i,j}m_i(n_ix_j)\otimes b_j=$$
$$=\sum_{i,j}m_i\otimes n_i(x_jb_j)=\sum_i(m_i\otimes n_i)\cdot\sum_j x_jb_j=\sum_i(m_i\otimes n_i)\cdot 0=0.$$

Следовательно, f — изоморфизм.

Аналогично из равенства $J=S$ следует, что

$$1=n_1m_1+\ldots+n_km_k,\quad\text{где}\quad n_i\in N,\quad m_i\in M,\quad i=1,\ldots,k$$

(используются те же буквы n_i и m_i, это не приведёт к путанице). Аналогично получаем, что g — изоморфизм.

Если $f'(b)=0$, то

$$b=\sum_i(n_im_i)b=\sum_i n_i(m_ib)=0,$$

поскольку $m_ib=0$. Пусть α — произвольный гомоморфизм $M\to A$. Для любого $m\in M$ имеем

$$\alpha(m)=\alpha\Bigl(m\sum_i n_im_i\Bigr)=\alpha\Bigl(\sum_i(mn_i)m_i\Bigr)=\sum_i(mn_i)\alpha(m_i)=m\Bigl(\sum_i n_i\alpha(m_i)\Bigr).$$

Поэтому

$$\alpha=f'\Bigl(\sum_i n_i\alpha(m_i)\Bigr).$$

Итак, f' — изоморфизм. Аналогично получаем, что g' — изоморфизм. $\square$

Следствие 8.2. *Пусть $I = R$, $J = S$ и (A, B) — K-модуль.*

1. *$MB = A$, $NA = B$ и имеют место канонические K-модульные изоморфизмы*

$$\big(A, T(A)\big) \cong (A, B), \quad (T(B), B) \cong (A, B),$$
$$(A, B) \cong \big(A, H(A)\big), \quad (A, B) \cong (H(B), B).$$

2. *Имеют место канонические кольцевые изоморфизмы*

$$\operatorname{End}_R A \cong \operatorname{End}_K(A, B) \cong \operatorname{End}_S B.$$

Доказательство. В утверждении 1 требуемыми изоморфизмами являются $(1, g)$, $(f, 1)$, $(1, f')$, $(g', 1)$ соответственно; см. замечания после следствия 2.4. Утверждение 2 вытекает из следствия 2.4. $\square$

Напомним ряд понятий теории модулей. Пусть C — некоторый R-S-бимодуль. Для каждого элемента $r \in R$ отображение $\alpha_r\colon c \to rc$, $c \in C$, есть S-гомоморфизм; он называется *гомотетией* R-модуля C с коэффициентом r. Кольцевой гомоморфизм $R \to \operatorname{End}_S C$, $r \to \alpha_r$, называется *отображением гомотетии*. Существует ещё одно отображение гомотетии. А именно, $S \to \operatorname{End}_R C$, $s \to \beta_s$, где $\beta_s(c) = cs$, $s \in S$, $c \in C$. Например, пусть C — R-модуль и $S = \operatorname{End}_R C$. Тогда C — R-S-бимодуль. Следовательно, имеется отображение гомотетии $R \to \operatorname{End}_S C$. Здесь $\operatorname{End}_S C$ — кольцо биэндоморфизмов R-модуля C.

В дальнейшем G^n обозначает прямую сумму n изоморфных копий модуля G.

Модуль G над кольцом T называется *образующим*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) сумма образов всех гомоморфизмов из G в R совпадает с R;
2) для любого T-модуля X сумма образов всех гомоморфизмов из G в X совпадает с X;
3) для любых гомоморфизмов T-модулей $\alpha\colon G \to X$ и $\beta, \gamma\colon X \to Y$ из равенства $\alpha\beta = \alpha\gamma$ вытекает равенство $\beta = \gamma$;
4) существуют натуральное число n и T-модуль H, для которых $G^n \cong T \oplus H$.

Конечно порождённый проективный образующий модуль часто называют *прообразующим* модулем.

Применим лемму 8.1 к кольцу K. Сначала заметим, что каждый из K-модулей (R, N) и (M, S) даёт четыре гомоморфизма модульного умножения. К известным нам гомоморфизмам $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$ добавляются гомоморфизмы $\varphi'\colon N \to \operatorname{Hom}_R(M, R)$ и $\psi'\colon M \to \operatorname{Hom}_S(N, S)$, канонические изоморфизмы $N \otimes_R R \to N$, $M \otimes_S S \to M$ и два отображения гомотетии $R \to \operatorname{End}_S N$, $S \to \operatorname{End}_R M$. Уточним, что $\varphi'(n)(m) = mn$, $n \in N$, $m \in M$; гомоморфизм ψ' действует аналогично. Среди восьми гомоморфизмов модульного умножения для правых K-модулей (R, M) и (N, S) имеются гомоморфизмы $N \to \operatorname{Hom}_S(M, S)$, $M \to \operatorname{Hom}_R(N, R)$ и два отображения гомотетии $R \to \operatorname{End}_S M$, $S \to \operatorname{End}_R N$.

Лемма 8.3. *Пусть K — такое кольцо формальных матриц, что $I = R$ и $J = S$.*

1. *Все указанные выше 16 бимодульных гомоморфизмов — изоморфизмы.*
2. *Каждый из модулей ${}_RM$, M_S, ${}_SN$ и N_R является прообразующим.*

Доказательство. Утверждение 1) является частным случаем леммы 8.1.

Аналогично лемме 8.1 пусть

$$1 = m_1n_1 + \ldots + m_kn_k, \quad \text{где} \quad m_i \in M, \quad n_i \in N, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Положим $\alpha_i = \varphi'(n_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\gamma = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \colon M^k \to R.$$

Так как

$$\gamma(m_1 + \ldots + m_k) = m_1n_1 + \ldots + m_kn_k = 1,$$

то γ — эпиморфизм на проективный модуль R. Поэтому γ расщепляется и $M^k \cong R \oplus X$ для некоторого модуля X. Таким образом, M — образующий модуль. Можно повторить эти рассуждения для остальных трёх модулей. В частности, имеется изоморфизм $M^k \cong S \oplus Y$ для некоторого правого S-модуля Y. Теперь из изоморфизмов левых R-модулей

$$R^k \cong \mathrm{Hom}_S(M, M)^k \cong \mathrm{Hom}_S(M^k, M) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_S(S \oplus Y, M) \cong \mathrm{Hom}_S(S, M) \oplus \mathrm{Hom}_S(Y, M) \cong M \oplus X$$

вытекает, что M — конечно порождённый проективный R-модуль. Можно повторить эти рассуждения для остальных модулей. □

Если имеется кольцо формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

то можно рассмотреть так называемую *ситуацию предэквивалентности*, или *контекст Мориты*, $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$, где R и S — кольца, ${}_RM_S$ и ${}_SN_R$ — бимодули, $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$ — бимодульные гомоморфизмы, причём выполнены законы ассоциативности

$$(mn)m' = m(nm'), \quad (nm)n' = n(mn') \quad \text{для всех} \quad m, m' \in M, \quad n, n' \in N.$$

Существует очевидное взаимно-однозначное соответствие между кольцами формальных матриц и ситуациями предэквивалентности. Поэтому удобно само кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

называть *ситуацией предэквивалентности* или *контекстом Мориты*. Если φ и ψ — изоморфизмы, то $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ или кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

называется *ситуацией эквивалентности*.

Замечание. Убедимся, что можно получить некоторую «стандартную» ситуацию предэквивалентности, если исходить из произвольного модуля. Пусть M — модуль над некоторым кольцом R. Обозначим через S кольцо эндоморфизмов R-модуля M. Тогда M — R-S-бимодуль. Затем положим $M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R)$. Группа M^* является S-R-бимодулем, где

$$(s\alpha)m = \alpha\bigl(s(m)\bigr), \quad (\alpha r)m = \alpha(mr), \quad \alpha \in M^*, \quad s \in S, \quad r \in R, \quad m \in M.$$

Существуют R-R-бимодульный гомоморфизм $\varphi\colon M \otimes_S M^* \to R$ и S-S-бимодульный гомоморфизм $\psi\colon M^* \otimes_R M \to S$, определяемые правилами

$$\varphi\Bigl(\sum m_i \otimes \alpha_i\Bigr) = \sum \alpha_i(m_i), \quad \Bigl(\psi\Bigl(\sum \alpha_i \otimes m_i\Bigr)\Bigr)(m) = \sum \alpha_i(m)m_i,$$

где $m_i, m \in M$, $\alpha_i \in M^*$. Для φ и ψ выполняются два закона ассоциативности. Следовательно, мы располагаем ситуацией предэквивалентности $(R, S, M, M^*, \varphi, \psi)$ и соответствующим кольцом формальных матриц. Это кольцо обладает следующими свойствами.

Лемма 8.4.

1. *Отображение φ (ψ) сюръективно в точности тогда, когда M — образующий (соответственно конечно порождённый проективный) R-модуль.*
2. *Если M — прообразующий R-модуль, то M удовлетворяет условию и утверждениям леммы* 8.3.

Доказательство. 1. Образ отображения φ есть сумма образов всех гомоморфизмов из M в R. Из определения образующего модуля вытекает, что φ сюръективно в точности тогда, когда M — образующий модуль.

Отображение ψ сюръективно в точности тогда, когда тождественное отображение модуля M лежит в образе ψ, т. е. существуют гомоморфизмы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k\colon M \to R$ и элементы $m_1, \ldots, m_k$, такие что $m = \sum \alpha_i(m)m_i$ для всех $m \in M$. Это означает, что $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k; m_1, \ldots, m_k\}$ — дуальный базис модуля M. Последнее условие равносильно тому, что M — конечно порождённый проективный R-модуль.

2. Второе утверждение непосредственно следует из первого. □

Сформулируем один результат об эквивалентности категорий, называемый иногда *первой теоремой Мориты*.

Теорема 8.5 (первая теорема Мориты). *Пусть кольцо*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

есть ситуация эквивалентности. В таком случае категории R-mod, S-mod и K-mod эквивалентны между собой (соответствующие эквивалентности указываются в доказательстве).

Доказательство. Определим функтор $T_N = N \otimes_R (-)\colon R\text{-mod} \to S\text{-mod}$ равенством $T_N(X) = N \otimes_R X$ для R-модулей X. Гомоморфизмы R-модулей функтор T_N переводит в индуцированные гомоморфизмы S-модулей. Аналогично определяется функтор T_M.

Докажем, что функторы T_N и T_M являются взаимно-обратными эквивалентностями между категориями R-mod и S-mod. Нужно проверить, что композиция $T_M T_N$ ($T_N T_M$) естественным образом эквивалентна тождественному функтору категории R-mod (соответственно S-mod). Это вытекает из того, что для любого R-модуля X существуют естественные изоморфизмы

$$(T_M T_N)X \cong (M \otimes_S N) \otimes_R X \cong R \otimes_R X \cong X.$$

Аналогично $(T_N T_M)Y \cong Y$ для произвольного S-модуля Y.

Эквивалентность категорий R-mod и S-mod определяют также функторы

$$H_M = \mathrm{Hom}_R(M, -), \quad H_N = \mathrm{Hom}_S(N, -),$$

где

$$H_M(X) = \mathrm{Hom}_R(M, X), \quad H_N(Y) = \mathrm{Hom}_S(N, Y),$$

а гомоморфизмы опять переводятся в индуцированные. Действительно,

$$(H_N H_M)X = \mathrm{Hom}_S\big(N, \mathrm{Hom}_R(M, X)\big) \cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, X) \cong \mathrm{Hom}_R(R, X) \cong X,$$
$$(H_M H_N)Y \cong Y.$$

Отметим, что функторы T_N и T_M, H_M и H_N тесно связаны с функторами T и H, введёнными в разделе 2. Разумеется, функторы T_N и H_M естественным образом эквивалентны. То же самое верно для функторов T_M и H_N. Естественным изоморфизмом между $T_N(X)$ и $H_M(X)$ будет гомоморфизм h, определённый после следствия 2.4,

$$\big(h(n \otimes x)\big)m = (mn)x, \quad n \in N, \quad x \in X, \quad m \in M.$$

По лемме 8.1 гомоморфизм h является изоморфизмом, поскольку h — гомоморфизм модульного умножения для K-модуля $\big(X, H_M(X)\big)$.

Теперь определим функторы

$$(1, T_N)\colon R\text{-mod} \to K\text{-mod}, \quad (1, 0)\colon K\text{-mod} \to R\text{-mod}.$$

Первый функтор фактически является ограничением функтора T из раздела 2. А именно, $(1, T_N)X = \big(X, T_N(X)\big)$ и $(1,0)(X,Y) = X$ для любых R-модуля X и K-модуля (X, Y). Оба функтора переводят гомоморфизмы в индуцированные гомоморфизмы. Имеем $\big((1,0)(1,T_N)\big)X = X$ и

$$\big((1, T_N)(1, 0)\big)(X, Y) = (1, T_N)X = \big(X, T_N(X)\big) \cong (X, Y),$$

где гомоморфизм модульного умножения g берётся в качестве изоморфизма между $T_N(X)$ и Y (см. лемму 8.1 и следствие 8.2). Таким образом, $(1, T_N)$ и $(1, 0)$ — взаимно-обратные эквивалентности категорий R-mod и K-mod. Аналогично определяются функторы $(1, H_M)$ и $(1, 0)$, играющие такую же роль ($(1, H_M)$ — это ограничение функтора H из раздела 2). Эквивалентность категорий S-mod и K-mod доказывается аналогично.

Обе эквивалентности можно получить путём применения первой части доказательства. Для этого возьмём стандартную ситуацию предэквивалентности, возникающую с помощью модуля $R \oplus M$. Запишем этот модуль также в виде (R, M), чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с R-K-бимодулем. Так как $\mathrm{End}_R(R \oplus M) \cong K$ и $\mathrm{Hom}_R\big((R, M), R\big) \cong (R, N)$ ((R, N) есть K-R-бимодуль), то можно записать соответствующее кольцо матриц

$$\begin{pmatrix} R & (R, M) \\ \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix} & K \end{pmatrix}$$

(такое кольцо формальных матриц существует для любого кольца K). На самом деле мы имеем дело с ситуацией эквивалентности (в силу леммы 8.4). Из доказанного выше вытекает, что функторы $T_{(R,N)}$ и $T_{(R,M)}$ определяют эквивалентность категорий R-mod и K-mod. По существу, $(1, T_N)$ и $(1, 0)$ — эти функторы. $\square$

В условиях теоремы 8.5 будем говорить, что ситуация эквивалентности $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ или соответствующее кольцо матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

определяет эквивалентность категорий R-mod и S-mod.

Вторая теорема Мориты утверждает, что все эквивалентности двух категорий модулей возникают из ситуации эквивалентности.

Теорема 8.6 (вторая теорема Мориты). *Пусть R и S — такие кольца, что категории R-mod и S-mod эквивалентны. Тогда каждая эквивалентность категорий R-mod и S-mod задаётся некоторым кольцом*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Допустим, что функторы

$$F\colon R\text{-mod} \to S\text{-mod}, \quad G\colon S\text{-mod} \to R\text{-mod}$$

есть взаимно-обратные эквивалентности. Достаточно доказать, что существует некоторая ситуация эквивалентности $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$ или кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

В самом деле, тогда по предыдущей теореме функторы T_N и T_M (также H_M и H_N) задают эквивалентность между R-mod и S-mod. Однако известно, что в таком случае функтор F эквивалентен T_N, а функтор G эквивалентен T_M.

Обозначим через M R-модуль $G(S)$. Его можно превратить в правый S-модуль так, что M станет R-S-бимодулем. Делается это следующим образом. Для элементов $m \in M$ и $s \in S$ полагаем $ms = \alpha(m)$, где эндоморфизм α

R-модуля M соответствует s при композиции кольцевых изоморфизмов $S \cong \cong \operatorname{End}_S S \cong \operatorname{End}_R M$ (второй изоморфизм — одно из известных свойств эквивалентностей категорий). Считаем, что $S = \operatorname{End}_R M$. Рассмотрим стандартную ситуацию предэквивалентности, определяемую бимодулем M, и соответствующее кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

где $N = \operatorname{Hom}_R(M, R)$. При эквивалентности категорий образующие (конечно порождённые проективные) модули переходят в модули с тем же свойством (такие свойства называются *категорными*). Следовательно, M — прообразующий R-модуль. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

ситуация эквивалентности по лемме 8.4, что и требовалось. □

Кольца R и S называются *эквивалентными* (в смысле Мориты) или *Морита-эквивалентными*, если категории R-mod и S-mod эквивалентны. Понятие Морита-эквивалентности лево-право симметрично. Если R-mod и S-mod эквивалентны, то по теоремам 8.6 и 8.5 кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

является ситуацией эквивалентности и наоборот. Тогда противоположное кольцо

$$\begin{pmatrix} R^\circ & N \\ M & S^\circ \end{pmatrix}$$

(см. раздел 1) является ситуацией эквивалентности и наоборот. Следовательно, категории R°-mod и S°-mod эквивалентны. Поэтому категории mod-R и mod-S эквивалентны.

Следствие 8.7. *Для колец R и S равносильны следующие условия*:

1) *кольца R и S эквивалентны*;
2) *существует прообразующий R-модуль M, такой что $S \cong \operatorname{End}_R M$*;
3) *существует прообразующий правый R-модуль N, такой что $S \cong \operatorname{End}_R N$*;
4) *существует ситуация эквивалентности*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Импликации $1) \Longrightarrow 2)$ и $1) \Longrightarrow 3)$ вытекают из теоремы 8.6.

Эквивалентность $1) \Longleftrightarrow 4)$ доказана в теоремах 8.5 и 8.6.

Докажем импликацию $2) \Longrightarrow 1)$. Рассмотрим стандартную ситуацию предэквивалентности (R, S, M, M^*) (см. замечание перед леммой 8.4). Кольца R и S эквивалентны по лемме 8.4 и теореме 8.5.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). R°-модуль N является прообразующим, причём $S^\circ \cong \operatorname{End}_{R^\circ} N$. По доказанному кольца R° и S° эквивалентны. Поэтому кольца R и S также эквивалентны. □

Следствие 8.8. *Пусть R — кольцо и M — R-модуль.*

1. *Если M — прообразующий, то кольца R и $\operatorname{End}_R M$ эквивалентны.*
2. *Для любого натурального числа n кольцо R_n всех $(n \times n)$-матриц эквивалентно кольцу R.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из следствия 8.7.

Утверждение 2 вытекает из того, что кольцо R_n изоморфно кольцу эндоморфизмов свободного модуля R^n, который является прообразующим. □

Вернёмся к модулям над кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Если идеалы следа I и J этого кольца совпадают с R и S соответственно (т. е. K — ситуация эквивалентности), то все три категории R-mod, S-mod и K-mod эквивалентны между собой. Аналогично категории правых модулей mod-R, mod-S и mod-K тоже эквивалентны. Заметим, что эквивалентности можно определить с помощью функторов тензорного произведения и Hom; их вид указан в доказательстве теоремы 8.5. Эти функторы сохраняют все свойства модулей категорного характера. В частности, эти функторы сохраняют плоские модули, проективные модули и наследственные модули, рассматривавшиеся ранее. Таким образом верен следующий результат.

Следствие 8.9. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

ситуация эквивалентности и (A, B) — K-модуль. Тогда равносильны следующие условия:

1) *A — плоский (проективный, наследственный) R-модуль*;
2) *B — плоский (соответственно проективный, наследственный) S-модуль*;
3) *(A, B) — плоский (соответственно проективный, наследственный) K-модуль.*

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 6.3, предложения 7.1 и доказанных выше K-модульных изоморфизмов $\big(A, T(A)\big) \cong (A, B) \cong$ $\cong (T(B), B)$. □

Следствие 8.10. *Если выполнены условия следствия 8.9, то равносильны следующие условия*:

1) *кольцо K наследственно слева (справа)*;
2) *кольцо R наследственно слева (справа)*;
3) *кольцо S наследственно слева (справа).*

Следствие 8.11. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

ситуация эквивалентности.

1. *Если (A, B) — K-модуль, то отображения $X \to NX$ и $X \to (X, NX)$ являются изоморфизмами решётки всех подмодулей модуля A на решётку всех подмодулей модуля B и решётку всех подмодулей модуля (A, B) соответственно. В первом случае обратный изоморфизм задаётся правилом $Y \to MY$,* где *Y — произвольный подмодуль в B.*
2. *Соответствие $L \to NL$ есть изоморфизм решётки всех левых идеалов кольца R на решётку всех подмодулей S-модуля N, причём идеалы переходят на подбимодули бимодуля N. Аналогичное утверждение верно для кольца S и бимодуля M.*
3. *Утверждения для правых модулей, аналогичные утверждениям* 1 *и* 2.
4. *Отображения $X \to NXM$ и $Y \to MYN$ являются взаимно-обратными изоморфизмами между решётками идеалов колец R и S.*
5. *Соответствие*

$$X \to \begin{pmatrix} X & XM \\ NX & NXM \end{pmatrix}$$

есть изоморфизм решётки идеалов кольца R на решётку идеалов кольца K.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из следствия 8.2.

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1, применённого к K-модулям (R, N) и (M, S).

Утверждение 3 вытекает из утверждений 1, 2 и соображений симметрии.

Утверждение 4 вытекает из утверждения 2.

Утверждение 5 вытекает из утверждения 4, применённого к кольцу

$$\begin{pmatrix} R & (R, M) \\ \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix} & K \end{pmatrix}$$

из доказательства теоремы 8.5. □

В следующем разделе используются следующие два хорошо известных факта.

Следствие 8.12. *Для кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — наследственное слева кольцо*;
2) *для любого ненулевого идемпотента $e \in R$ кольцо R наследственно слева*;
3) *для любого натурального числа n кольцо R_n всех $(n \times n)$-матриц над R наследственно слева* (*справа*);
4) *существует такое натуральное число n, что кольцо R_n всех $(n \times n)$-матриц над R наследственно слева* (*справа*).

Аналогичное утверждение верно для наследственных справа колец.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из предложения 7.5, если мы отождествим кольцо R с кольцом формальных матриц (как в разделе 1).

Импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) и 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидны.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Существует такой ненулевой идемпотент $e \in R_n$, что $R \cong eR_ne$. Так как импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) доказана и кольцо R_n наследственно слева (справа), то кольцо R наследственно слева (справа).

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Кольцо R_n наследственно слева в точности тогда, когда модуль векторов-столбцов $(R, \ldots, R)$ длины n является наследственным R_n-модулем. Этот модуль можно рассмотреть как модуль $\bigl(R, (R, \ldots, R)\bigr)$ над кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & (R, \ldots, R) \\ \begin{pmatrix} R \\ \vdots \\ R \end{pmatrix} & R_{n-1} \end{pmatrix}$$

порядка 2. Затем применяем следствие 8.9 к последнему модулю и получаем, что кольцо R_n наследственно слева. $\square$

Если K — ситуация эквивалентности, то изучение K-модулей почти всегда сводится к изучению R-модулей или S-модулей. Рассмотрим другой крайний случай, когда идеалы следа кольца K равны нулю. Тогда изучение K-модулей часто сводится к изучению R-модулей или S-модулей, но появляются дополнительные трудности. Это подтверждается нашими исследованиями. «Промежуточная» ситуация, при которой I и J — нетривиальные идеалы, весьма сложна.

Следствие 8.9 полностью описывает плоские, проективные и наследственные модули в случае, когда K — ситуация эквивалентности. С другой стороны, теоремы 6.5, 7.3 и 7.6 содержат удовлетворительные характеризации таких модулей над кольцом K с нулевыми идеалами следа. Остаётся открытым вопрос о строении плоских, проективных и наследственных модулей над произвольным кольцом формальных матриц K. В этот список можно добавить регулярные модули. (Модуль M называется *регулярным*, если каждый его циклический подмодуль является прямым слагаемым в M.) Важно также выяснить, когда кольцо K наследственно слева, наследственно справа или регулярно.

В заключение раздела сделаем следующее замечание. Пусть M — некоторый R-модуль. Интересно изучить кольцо формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ \operatorname{Hom}_R(M, R) & \operatorname{End}_R M \end{pmatrix}$$

(стандартная ситуация предэквивалентности), а также два подкольца треугольных матриц в K.

9. Наследственные кольца эндоморфизмов абелевых групп

В этом заключительном разделе мы применяем следствие 7.9 к описанию некоторых абелевых групп с наследственными кольцами эндоморфизмов. Слово «группа» означает «абелева группа». Группы рассматриваются как $\mathbb{Z}$-модули.

В разделе 9 *композиция гомоморфизмов определяется «справа налево»:*

$$(\alpha\beta)(x) = \alpha\big(\beta(x)\big).$$

Для группы G через $\operatorname{End} G$ обозначается её кольцо эндоморфизмов. Пусть группа G равна прямой сумме $A \oplus B$. Тогда можно отождествить кольцо $\operatorname{End} G$ с кольцом формальных матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End} A & \operatorname{Hom}(B, A) \\ \operatorname{Hom}(A, B) & \operatorname{End} B \end{pmatrix}.$$

Если A — вполне инвариантная подгруппа, то $\operatorname{Hom}(A, B) = 0$, и мы получаем кольцо треугольных матриц. Мы будем часто иметь дело с такой ситуацией.

Используются следующие обозначения:

p — некоторое простое число;

$\mathbb{Z}(p)$ — циклическая группа порядка p;

$\mathbb{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая p-группа;

$\mathbb{Q}$ — аддитивная группа или поле рациональных чисел;

$\hat{\mathbb{Z}}_p$ — группа или кольцо целых p-адических чисел.

Верны кольцевые изоморфизмы

$$\operatorname{End} \mathbb{Z}(p^\infty) \cong \hat{\mathbb{Z}}_p, \quad \operatorname{End} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}.$$

Мы часто будем иметь дело с делимыми группами. Делимая группа D может быть представлена в виде $D = \bigoplus\limits_p D_p \oplus D_0$, где D_p — делимая p-группа, D_0 — делимая группа без кручения, причём D_p — либо нулевая группа, либо прямая сумма некоторого множества копий группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$, D_0 — либо нулевая группа, либо прямая сумма некоторого множества копий группы $\mathbb{Q}$.

Замечание. В [5] можно найти все используемые понятия, факты и обозначения из теории абелевых групп.

Группа называется *элементарной*, если порядок каждого её ненулевого элемента не делится на квадрат целого числа. Элементарная группа является прямой суммой элементарных p-групп. Элементарная ненулевая p-группа является прямой суммой групп $\mathbb{Z}(p)$.

Для группы G наибольшая p-подгруппа в G называется *p-компонентой* группы G.

Мы будем часто использовать следствие 8.12. Так, если $G = A \oplus B$ и кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева (справа), то кольца $\operatorname{End} A$ и $\operatorname{End} B$ наследственны слева (справа). Действительно, если e — проекция группы G на A с ядром B, то кольцо $\operatorname{End} A$ можно отождествить с кольцом $e \cdot \operatorname{End} G \cdot e$. Кроме того, сформулируем следующий результат.

Предложение 9.1 [33, утверждение 35.11].

1. *Если G — группа и кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева или справа, то G не является бесконечной прямой суммой ненулевых групп.*
2. *Пусть A — редуцированная группа с наследственным слева или справа кольцом $\operatorname{End} A$. Тогда каждая p-компонента A_p группы A является элементарной p-группой конечного ранга и $A = A_p \oplus B_p$ для некоторой группы B_p.*
3. *Редуцированная периодическая группа G имеет наследственное слева или справа кольцо эндоморфизмов в точности тогда, когда G — элементарная группа конечного ранга (т. е. G — конечная прямая сумма групп $\mathbb{Z}(p)$ для некоторых p).*

Для удобства повторим следствие 7.9 и запишем его правосторонний аналог.

Предложение 9.2. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

1. *Кольцо K наследственно слева в точности тогда, когда кольца R и S наследственны слева, M — плоский S-модуль и M/ML — проективный R-модуль для любого левого идеала L кольца S.*
2. *Кольцо K наследственно справа в точности тогда, когда кольца R и S наследственны справа, M — плоский R-модуль и M/LM — проективный S-модуль для любого правого идеала L кольца S.*

Замечание. Пусть D — некоторая делимая группа. Из предложения 9.1 следует, что при изучении групп с наследственными кольцами эндоморфизмов можно считать, что D — группа конечного ранга. Представим группу D в виде $D = D_t \oplus D_0$, где D_t — периодическая группа, D_0 — группа без кручения. При $D_t \neq 0$ и $D_0 \neq 0$ кольцо $\operatorname{End} D$ есть кольцо треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End} D_t & \operatorname{Hom}(D_0, D_t) \\ 0 & \operatorname{End} D_0 \end{pmatrix}.$$

Например, если $D = \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}$, то

$$\operatorname{End} D = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & A_p \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix},$$

где $A_p = \operatorname{Hom}\big(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ — аддитивная группа поля p-адических чисел. Это кольцо не является наследственным слева, поскольку A_p не является проективным $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модулем (см. утверждение 1 предложения 9.2). В то же время это кольцо наследственно справа, так как выполнены все условия утверждения 2 предложения 9.2. То же самое верно для кольца эндоморфизмов группы

$$\mathbb{Z}(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p_k^\infty) \oplus \mathbb{Q},$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — разные простые числа.

Приведённая ниже теорема 9.3 даёт ответы на следующие вопросы.

1. Когда кольцо эндоморфизмов делимой группы наследственно слева?
2. Когда кольцо эндоморфизмов делимой группы наследственно справа?

Теорема 9.3. *Пусть D — ненулевая делимая группа конечного ранга.*

1. *Кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно слева в точности тогда, когда либо D — группа без кручения, либо D — периодическая группа.*
2. *Кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно справа.*

Доказательство. 1. Пусть кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно слева. По приведённому выше замечанию группа D не содержит прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}$. Поэтому либо D — группа без кручения, либо D — периодическая группа.

Обратно, если D — периодическая группа, то $\operatorname{End} D$ — конечное прямое произведение колец матриц над кольцами целых p-адических чисел. Если D — группа без кручения, то $\operatorname{End} D$ — кольцо матриц над $\mathbb{Q}$. В обоих случаях кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно слева и справа по следствию 8.12.

2. Если D — периодическая группа или группа без кручения, то кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно справа (см. доказательство утверждения 1). Пусть D — смешанная группа, т. е. D содержит как квазициклические группы, так и группу $\mathbb{Q}$. Обозначим через C группу

$$\mathbb{Z}(p_1^\infty) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p_k^\infty) \oplus \mathbb{Q},$$

где p_i — все простые числа, для которых группа D имеет прямое слагаемое вида $\mathbb{Z}(p_i^\infty)$. Существуют натуральное число n и группа E, для которых $C^n \cong D \oplus E$. По следствию 8.12 и замечанию перед теоремой кольцо $\operatorname{End} C^n$ наследственно справа. Поэтому кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно справа. $\square$

Теперь начнём решать следующую задачу. Мы хотим свести исследование (левой или правой) наследственности кольца $\operatorname{End} G$ к случаю, когда G — редуцированная группа.

Пусть G — нередуцированная и неделимая группа. Тогда $G = D \oplus A$, где D — ненулевая делимая группа и A — ненулевая редуцированная группа. Эти обозначения фиксируем до конца раздела. Кольцо $\operatorname{End} G$ совпадает с кольцом

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End} D & \operatorname{Hom}(A, D) \\ 0 & \operatorname{End} A \end{pmatrix}.$$

Теорема 9.4. *Кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева в точности тогда, когда D — группа без кручения конечного ранга, кольцо $\operatorname{End} A$ наследственно слева и $\operatorname{Hom}(A, D)$ — плоский $(\operatorname{End} A)$-модуль.*

Доказательство. Пусть кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева. Из теоремы 9.3 вытекает, что группа D не может быть смешанной. Кроме того, D не является периодической группой. Действительно, в противном случае D — конечная прямая сумма квазициклических p-групп для некоторых простых p. По предложению 9.2 $\operatorname{Hom}(A, D)$ — проективный $(\operatorname{End} D)$-модуль. (Заметим, что $\operatorname{End} D$ — конечное прямое произведение колец матриц над кольцами $\hat{\mathbb{Z}}_p$.) Групповое строение группы $\operatorname{Hom}(A, D)$ известно (см. [5, теорема 47.1]). Отсюда вытекает, что $\operatorname{Hom}(A, D)$ не может быть проективным $(\operatorname{End} D)$-модулем.

Допустим теперь, что D — группа без кручения конечного ранга, кольцо $\operatorname{End} A$ наследственно слева и $\operatorname{Hom}(A, D)$ — плоский $(\operatorname{End} A)$-модуль. Так как $\operatorname{End} D$ — кольцо матриц над $\mathbb{Q}$, то по предложению 9.2 кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно слева. $\square$

Пусть сохраняются обозначения, введённые перед теоремой 9.4. Перейдём к наследственным справа кольцам.

Теорема 9.5. *Кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно справа в точности тогда, когда $G = D \oplus T$, где D — делимая группа конечного ранга, T — элементарная группа конечного ранга, причём группы D и T не содержат ненулевых p-компонент для одинаковых p.*

Доказательство. Пусть кольцо $\operatorname{End} G$ наследственно справа. Из предложения 9.1 вытекает, что ранг группы D конечен. Допустим, что группа A содержит элементы бесконечного порядка. По предложению 9.2 $\operatorname{Hom}(A, D)$ — проективный $(\operatorname{End} A)$-модуль. Теперь заметим, что аддитивная группа кольца $\operatorname{End} A$ является редуцированной, поскольку A — редуцированная группа. Поэтому $\operatorname{Hom}(A, D)$ — редуцированная группа. С другой стороны, если D имеет прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Q}$, то $\operatorname{Hom}(A, D)$ тоже имеет прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Q}$. Аналогично если D содержит группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$, то $\operatorname{Hom}(A, D)$ — нередуцированная группа. Итак, получаем, что A — периодическая группа. Теперь из предложения 9.1 следует, что строение группы A удовлетворяет нашей теореме. Группа $\mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Z}(p)$ не может быть прямым слагаемым группы G. Дело в том, что кольцо эндоморфизмов этой группы есть кольцо матриц

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbb{Z}}_p & \mathbb{Z}(p) \\ 0 & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$

Это кольцо не является наследственным справа, поскольку $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ не является плоским $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модулем. Из изложенного выше следует, что группы D и T имеют ненулевые p-компоненты только для разных p.

В условиях теоремы получаем, что подгруппы D и T вполне инвариантны в G. Поэтому $\operatorname{End} G = \operatorname{End} D \times \operatorname{End} T$. Кольцо $\operatorname{End} D$ наследственно справа по теореме 9.3, а кольцо $\operatorname{End} T$ наследственно справа по предложению 9.1. $\square$

Замечания. Так как

$$\operatorname{End}(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

то из теорем 9.4 и 9.5 вытекает, что это кольцо наследственно слева, но не наследственно справа.

Наследственные справа кольца эндоморфизмов групп без кручения изучаются в [33]. В связи с теоремой 9.4 естественно поставить вопрос об описании таких групп A, что $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})$ — плоский правый $(\mathrm{End}\, A)$-модуль. Для $(\mathrm{End}\, A)$-модулей $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p)\big)$ и $\mathrm{Hom}\big(A, \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ интересно выяснить, когда эти модули просты, артиновы или нётеровы. Более подробное введение в данную область содержится в [33] (см., например, проблемы 11—13).

Литература

[1] Кашу А. И. О локализациях в Морита-контекстах // Мат. сб. — 1987. — Т. 133, вып. 1. — С. 127—133.

[2] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщённых матриц // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, вып. 4. — С. 456—463.

[3] Крылов П. А., Ярдыков Е. Ю. О проективных и наследственных модулях над кольцами обобщённых матриц // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 5. — С. 125—138.

[4] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[6] Ярдыков Е. Ю. Простые модули над кольцами обобщённых матриц // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 245—247.

[7] Abujabal H. A. S., Nauman S. K. A construction of Morita similar endomorphism rings // J. Algebra. — 2001. — Vol. 235. — P. 453—458.

[8] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York: Springer, 1974.

[9] Asadollahi J., Salarian S. On the vanishing of Ext over formal triangular matrix rings // Forum Math. — 2006. — Vol. 18, no. 6. — P. 951—966.

[10] Auslander M., Reiten I., Smalø S. O. Representation Theory of Artin Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[11] Birkenmeier G. F, Park J. K., Rizvi S. T. Generalized triangular matrix rings and the fully invariant extending property // Rocky Mountain J. Math. — 2002. — Vol. 32, no. 4. — P. 1299—1319.

[12] Company Cabezos M., Gomez Lozano M., Siles Molina M. Exchange Morita rings // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 2. — P. 907—925.

[13] Chen H. Stable ranges for Morita contexts // Southeast Asian Math. Bull. — 2001. — Vol. 25. — P. 209—216.

[14] Chen H. Morita contexts with many units // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 3. — P. 1499—1512.

[15] Chen H. Strongly π-regular Morita contexts // Bull. Korean Math. Soc. — 2003. — Vol. 40, no. 1. — P. 91—99.

[16] Chen H. Ideals in Morita rings and Morita semigroups // Acta Math. Sinica. — 2005. — Vol. 21, no. 4. — P. 893—898.

[17] Fossum R. M, Griffith P. A., Reiten I. Trivial Extensions of Abelian Categories. — Berlin: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 456).

[18] Ghahramani H., Moussavi A. Differential polynomial rings of triangular matrix rings // Bull. Iranian Math. Soc. — 2008. — Vol. 34, no. 2. — P. 71—96.

[19] Goodearl K. R. Ring Theory. — New York: Marcel Dekker, 1976.

[20] Green E. L. On the representation theory of rings in matrix form // Pacific J. Math. — 1982. — Vol. 100, no. 1. — P. 123—138.

[21] Haghany A. Morita contexts and torsion theories // Math. Japon. — 1995. — Vol. 42, no. 1. — P. 137—142.

[22] Haghany A. On the torsion theories of Morita equivalent rings // Period. Math. Hungar. — 1996. — Vol. 32. — P. 193—197.

[23] Haghany A. Hopficity and co-hopficity for Morita contexts // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 1. — P. 477—492.

[24] Haghany A. Injectivity conditions over a formal triangular matrix ring // Arch. Math. — 2002. — Vol. 78. — P. 268—274.

[25] Haghany A., Varadarajan K. Study of formal triangular matrix rings // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 11. — P. 5507—5525.

[26] Haghany A., Varadarajan K. Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2000. — Vol. 147, no. 1. — P. 41—58.

[27] Haghany A., Varadarajan K. IBN and related properties for rings // Acta Math. Hungar. — 2002. — Vol. 94, no. 3. — P. 251—261.

[28] Harada M. On semiprimary PP-rings // Osaka J. Math. — 1965. — Vol. 2. — P. 153—161.

[29] Herstein I. N. A counter-example in Noetherian rings // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1965. — Vol. 54. — P. 1036—1037.

[30] Hirano Y. Another triangular matrix ring having Auslander—Gorenstein property // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29. — P. 719—735.

[31] Iwanaga Y., Wakamatsu T. Auslander—Gorenstein property of triangular matrix rings // Commun. Algebra. — 1995. — Vol. 23, no. 10. — P. 3601—3614.

[32] Khazal R., Dascalescu S., Wyk L. van. Isomorphism of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles // Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — Vol. 2003, no. 9. — P. 533—538.

[33] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

[34] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Modules over Discrete Valuation Domains. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 43).

[35] Lam T. Y. Lectures on Rings and Modules. — New York: Springer, 1999.

[36] Loustaunau P., Shapiro J. Homological dimensions in a Morita context with applications to subidealizers and fixed rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 110, no. 3. — P. 601—610.

[37] Loustaunau P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Proc. Conf. Athens/OH (USA), 1989. — Berlin: Springer, 1990. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1448). — P. 80—92.

[38] Loustaunau P., Shapiro J. Localization in Morita context with applications to fixed rings // J. Algebra. — 1991. — Vol. 143. — P. 373—387.

[39] Marubayashi H., Zhang Y., Yang P. On the rings of Morita context which are some well-known orders // Commun. Algebra. — 1998. — Vol. 26, no. 5. — P. 1429—1444.

[40] Maxson C. J. Near-rings of homogeneous functions // G. Saad et al. Nearrings, Nearfields and K-Loops. Proc. of the Conf. on Nearrings and Nearfields. Hamburg, Germany, July 30 — August 2, 1995. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1997. — (Math. Appl.; Vol. 426). — P. 35—46.

[41] Ming K. On FI-extending modules // J. Chungcheong Math. Soc. — 2003. — Vol. 16, no. 2. — P. 79—88.

[42] Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. — 1958. — Vol. 6. — P. 83—142.

[43] Müller B. J. The quotient category of a Morita context // J. Algebra. — 1974. — Vol. 28. — P. 389—407.

[44] Müller M. Rings of quotients of generalized matrix rings // Commun. Algebra. — 1987. — Vol. 15. — P. 1991—2015.

[45] Nauman S. K. Morita similar matrix rings and their Grothendieck groups // Aligarh Bull. Math. — 2004. — Vol. 23, no. 1-2. — P. 49—60.

[46] Palmer I. The global homological dimension of semi-trivial extensions of rings // Math. Scand. — 1975. — Vol. 37. — P. 223—256.

[47] Palmer I., Roos J. E. Explicit formulae for the global homological dimension of trivial extensions of rings // J. Algebra. — 1974. — Vol. 27. — P. 380—413.

[48] Poole D. G., Stewart P. N. Classical quotient rings of generalized matrix rings // Int. J. Math. Math. Sci. — 1995. — Vol. 18, no. 2. — P. 311—316.

[49] Sakano K. Maximal quotient rings of generalized matrix rings // Commun. Algebra. — 1984. — Vol. 12, no. 16. — P. 2055—2065.

[50] Sands A. D. Radicals and Morita contexts // J. Algebra. — 1973. — Vol. 24. — P. 335—345.

[51] Sheiham D. Universal localization of triangular matrix rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 134, no. 2. — P. 3465—3474.

[52] Small I. N. An example in Noetherian rings // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1965. — Vol. 54. — P. 1035—1036.

[53] Veldsman S. Radicals of Morita rings revisited // Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat. — 2007. — No. 2. — P. 55—68.

[54] Zhou Zh. Semisimple quotient rings and Morita context // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21, no. 7. — P. 2205—2210.