

Вполне целозамкнутые модули и кольца*

А. А. ТУГАНБАЕВ

Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: вполне целозамкнутый модуль, целозамкнутый модуль, вполне целозамкнутое подкольцо, целозамкнутое подкольцо.

Аннотация

Кольцо A является вполне целозамкнутым правым A -модулем в точности тогда, когда его максимальное правое кольцо частных $Q_{\max}(A)$ — инъективный правый A -модуль и A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в $Q_{\max}(A)$. Нётерово справа целозамкнутое справа кольцо A является вполне целозамкнутым правым A -модулем.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Completely integrally closed modules and rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 8, pp. 213—228.

A ring A is a completely integrally closed right A -module if and only if the maximal right ring of quotients $Q_{\max}(A)$ of A is an injective right A -module and A is a right completely integrally closed subring in $Q_{\max}(A)$. A right Noetherian, right integrally closed ring A is a completely integrally closed right A -module.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Целью данной работы является распространение понятий полной целозамкнутости и целозамкнутости с коммутативных областей на модули над необязательно коммутативными кольцами так, чтобы получить теоремы для модулей, превращающиеся в случае коммутативных областей в классические результаты коммутативной алгебры.

Подкольцо A кольца Q называется *классически вполне целозамкнутым справа* в Q , если A содержит каждый такой элемент $q \in Q$, что $q^n a \in A$ для некоторого делителя нуля $a \in A$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. Подкольцо A кольца Q называется *вполне целозамкнутым справа* в Q , если A содержит каждый такой элемент $q \in Q$, что $qB \subseteq B$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A .

Замечание 1. Класс всех вполне целозамкнутых (как правые модули над собой) колец содержит все инъективные справа кольца. Кроме того, если A —

* Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований.

коммутативная область с полем частных Q , то известно, что область A классически вполне целозамкнута в Q в точности тогда, когда A — вполне целозамкнутое подкольцо в Q (см. также предложение 2.5).

Подкольцо A кольца Q называется *классически целозамкнутым справа* в Q , если A содержит каждый такой элемент $q \in Q$, что $q^{n+1} = q^n a_n + \dots + q a_1 + a_0$ для некоторых $a_0, \dots, a_n \in A$. Модуль M называется *целозамкнутым*, если в M все эндоморфизмы всех конечно порождённых подмодулей продолжаются до эндоморфизмов M .

Замечание 2. Класс всех целозамкнутых (как правые модули над собой) колец содержит все инъективные справа и все регулярные по фон Нейману кольца. Кроме того, пусть A — коммутативная область с полем частных Q . Хорошо известны следующие результаты:

- 1) область A классически целозамкнута в Q тогда и только тогда, когда A — целозамкнутый A -модуль (см. также замечание 2.11);
- 2) если A — нётерова область, то A классически целозамкнута в Q тогда и только тогда, когда A классически вполне целозамкнута в Q (см. также теорему 6).

Если Y — подмодуль модуля X и $f: Y \rightarrow X$ — гомоморфизм, переводящий в себя некоторый существенный подмодуль модуля Y , то f называется *Y -существенным* гомоморфизмом. Модуль X называется *вполне целозамкнутым*, если для любого его подмодуля Y каждый Y -существенный гомоморфизм $Y \rightarrow X$ продолжается до гомоморфизма $X \rightarrow X$. Как мы увидим ниже, класс всех вполне целозамкнутых модулей содержит все (само)инъективные модули и все классически вполне целозамкнутые коммутативные области (рассматриваемые как модули над собой).

В связи с замечаниями 1 и 2 мы докажем теоремы 3, 4 и 6, являющиеся основными результатами данной работы.

Теорема 3. Для кольца A с максимальным правым кольцом частных Q равносильны следующие условия:

- 1) A — вполне целозамкнутый правый A -модуль;
- 2) A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q и модуль Q_A инъективен.

Теорема 4. Нётерово справа кольцо A является целозамкнутым правым A -модулем в точности тогда, когда A — вполне целозамкнутый правый A -модуль.

Кольцо называется *полупервичным*, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Кольцо A называется *правым кольцом Голди*, если A — конечномерное справа кольцо с условием максимальнойности для правых аннуляторов. Унитарное подкольцо A кольца Q называется *правым порядком* в Q , если каждый неделитель нуля кольца A обратим в Q и каждый элемент кольца Q можно представить в виде as^{-1} , где $a, s \in A$ и

s — делитель нуля в A . В этом случае Q называется *классическим правым кольцом частных* кольца A .

Замечание 5. По теореме Голди [1, 9.13] каждое полупервичное правое кольцо Голди обладает полупростым артиновым классическим правым кольцом частных.

Теорема 6. Пусть A — нётерово справа полупервичное кольцо и Q — его классическое правое кольцо частных. Равносильны следующие условия:

- 1) A_A — целозамкнутый модуль;
- 2) A_A — вполне целозамкнутый модуль;
- 3) A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q ;
- 4) A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q .

Мы разобьём доказательство теорем 3, 4 и 6 на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес (см. замечание 2.8). Эти утверждения сгруппированы в два раздела. Приведём необходимые определения и обозначения. В работе используются стандартные сведения из теории колец (см., например, [1, 2, 4]). Через $\text{End}(M)$ обозначается кольцо эндоморфизмов модуля M . Если $f: X \rightarrow M$ — модульный гомоморфизм и N — подмодуль в M , то через $f^{-1}(N)$ обозначается подмодуль $\{x \in X \mid f(x) \in N\}$ в X . Подмодуль Y модуля X называется *существенным*, если Y имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым подмодулем в X . В этом случае говорят, что M — *существенное расширение* модуля X . Через $\text{sg}(M)$ обозначается множество всех эндоморфизмов модуля M , ядра которых являются существенными подмодулями в M . Непосредственно проверяется, что $\text{sg}(M)$ — идеал кольца эндоморфизмов $\text{End}(M)$. Если M — правый модуль над кольцом A и X, Y — подмножества в M , то $(X : Y)$ обозначает подмножество $\{a \in A \mid Xa \subseteq Y\}$ кольца A , $r(X) = (X : 0)$ обозначает аннулятор $\{a \in A \mid Xa = 0\}$ множества X , $\text{Sing}(M)$ обозначает наибольший сингулярный подмодуль модуля M , т. е. $\text{Sing}(M)$ — множество всех элементов модуля M , аннуляторы которых являются существенными правыми идеалами кольца A . Модуль M называется *несингулярным* (сингулярным), если $\text{Sing}(M) = 0$ ($\text{Sing}(M) = M$). Непосредственно проверяется, что $\text{sg}(A_A) = \text{Sing}(A_A)$ — идеал кольца A ; его называют *правым сингулярным идеалом*. Модуль M_A называется *рациональным расширением* своего подмодуля X , если для любых $m, n \in M$, где $m \neq 0$, существует такой элемент $a \in A$, что $ma \neq 0$ и $na \in X$. В этом случае X называется *рациональным* подмодулем в M . Ненулевой модуль M называется *простым*, если M совпадает с любым своим ненулевым подмодулем. Модуль M называется *полупростым*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) в M все подмодули являются прямыми слагаемыми;
- 2) либо $M = 0$, либо M — прямая сумма простых модулей.

Модуль M называется *артиновым*, если M — модуль с условием минимальности для подмодулей. Модуль M называется *нётеровым*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) M — модуль с условием максимальности для подмодулей;
- 2) все подмодули модуля M являются конечно порождёнными.

Модуль называется *локально нётеровым*, если каждый его циклический подмодуль нётеров. Эндоморфизм f модуля X называется *локально нильпотентным*, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker}(f^n)$, т. е. если для любого циклического (конечно порождённого) подмодуля Y в X найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n(Y) = 0$.

Модуль X называется *инъективным относительно модуля Y* (или *Y -инъективным*), если для любого подмодуля Y_1 модуля Y все гомоморфизмы $Y_1 \rightarrow X$ продолжаются до гомоморфизмов $Y \rightarrow X$. Модуль над кольцом A , инъективный относительно любого A -модуля, называется *инъективным* модулем. Если инъективный модуль M — существенное расширение модуля X , то M называется *инъективной оболочкой* модуля X .

Следующее замечание 7 хорошо известно и будет использоваться без специальных ссылок.

Замечание 7. Все прямые произведения и конечные прямые суммы инъективных модулей инъективны. Инъективность модуля M равносильна тому, что для любого модульного мономорфизма $f: M \rightarrow N$ модуль $f(M)$ — прямое слагаемое в N . Каждый модуль X обладает инъективной оболочкой, любые две инъективные оболочки модуля X изоморфны, и каждый инъективный модуль M , содержащий модуль X , содержит некоторую инъективную оболочку модуля X .

Модуль называется *самоинъективным* (или *квазиинъективным*), если он инъективен относительно себя. Модуль M называется *малоинъективным*, если для любого подмодуля X в M каждый гомоморфизм $X \rightarrow X$ продолжается до гомоморфизма $M \rightarrow M$ (т. е. каждый эндоморфизм любого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма M). Модуль M называется *π -инъективным*, если каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M .

Следующее замечание 8 проверяется непосредственно и будет использоваться без специальных ссылок.

Замечание 8. Все инъективные модули и все полупростые модули самоинъективны, все самоинъективные модули вполне целозамкнуты, все вполне целозамкнутые модули малоинъективны, все малоинъективные модули π -инъективны, любое прямое слагаемое инъективного (самоинъективного, вполне целозамкнутого, малоинъективного, π -инъективного) модуля инъективно (соответственно самоинъективно, вполне целозамкнуто, малоинъективно, π -инъективно).

1. Вполне целозамкнутые модули

Следующая известная лемма 1.1 приводится для удобства с доказательством.

Лемма 1.1. Пусть X — существенный подмодуль правого модуля M над кольцом A и M' — инъективная оболочка модуля M . (Ясно, что M' также является инъективной оболочкой модуля X .)

1. Если N — модуль, $f: N \rightarrow M$ — гомоморфизм и существует такой гомоморфизм $g: N \rightarrow X$, что f совпадает с g на $f^{-1}(X)$, то $f(N) \subseteq X$.
2. Если N — модуль и X N -инъективен, то $f(N) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f: N \rightarrow M$.
3. Если модуль X самоинъективен, то $f(X) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f: X \rightarrow M$. В частности, X — вполне инвариантный подмодуль в M .
4. Модуль X самоинъективен тогда и только тогда, когда X — вполне инвариантный подмодуль своей инъективной оболочки.
5. Если $f \in \text{End}(M)$ и существует такой эндоморфизм g модуля X , что f совпадает с g на $X \cap f^{-1}(X)$, то $f(X) \subseteq X$.
6. Если $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$ — подмодуль в X , то существует такое прямое разложение $M' = Z' \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_n$, что X — существенное расширение модуля $(Z' \cap X) \oplus Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$ и $X \cap M_i$ — существенное расширение модуля Y_i для любого i .
7. Если модуль X π -инъективен, то $f(X) \subseteq X$ для любого идемпотента f кольца $\text{End}(M)$. Следовательно, $X = \bigoplus_{i \in I} (X \cap M_i)$ для любого прямого разложения $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.
8. Если модуль X π -инъективен и $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$ — подмодуль в X , то существует такое прямое разложение $X = Z \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, что X_i — существенное расширение модуля Y_i для любого i .
9. Если модуль X π -инъективен и $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$, то модули X_1 и X_2 инъективны относительно друг друга.
10. Для любого модульного гомоморфизма $f: N \rightarrow M$ $f^{-1}(X)$ — существенный подмодуль в N .
11. $M/X = \text{Sing}(M/X)$, т. е. модуль M/X сингулярен.
12. Если модуль X несингулярен, то модуль M несингулярен и ядро любого ненулевого модульного гомоморфизма $f: N \rightarrow M$ не является существенным подмодулем в N (в частности, $\text{sg}(M) = 0$).

Доказательство. 1. Допустим, что $y = (f - g)(x) \in X \cap (f - g)(N)$, где $x \in N$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= (f - g)(x) + g(x) = y + g(x) \in X, \quad x \in f^{-1}(X), \\ y &\in (f - g)(f^{-1}(X)) = 0, \quad X \cap (f - g)(N) = 0. \end{aligned}$$

Так как M — существенное расширение X , то $(f - g)(N) = 0$. Поэтому $f(N) = g(N) \subseteq X$.

2. Так как $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$ и X N -инъективен, то существует такой гомоморфизм $g: N \rightarrow X$, что g совпадает с f на $f^{-1}(X)$. По утверждению 1 $f(N) \subseteq X$.

3. Утверждение 3 следует из утверждения 2 при $N = X$.

4. Импликация в прямую сторону следует из утверждения 3. Докажем обратную импликацию. Пусть Y — подмодуль в X , $f \in \text{Hom}(Y, X)$ и M' — инъективная оболочка модуля X . Так как модуль M' инъективен, то f продолжается до эндоморфизма f' модуля M' . Поскольку X — вполне инвариантный подмодуль в M' , то $f'(X) \subseteq X$ и ограничение f' на X — искомое продолжение гомоморфизма f до эндоморфизма модуля X .

5. Утверждение 5 следует из утверждения 1.

6. Инъективная оболочка M' модуля X содержит инъективные оболочки $M_1, \dots, M_n$ модулей $Y_1, \dots, Y_n$. Непосредственно проверяется, что $M_1 + \dots + M_n = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$. Тогда модуль $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ инъективен и существует прямое разложение $M' = Z' \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_n$. Непосредственно проверяется, что X — существенное расширение модуля $(Z' \cap X) \oplus Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$ и $X \cap M_i$ — существенное расширение модуля Y_i для любого i .

7. Обозначим $Y = X \cap f^{-1}(X)$. Так как $f = f^2$, то $f^2(Y) = f(Y) \subseteq X$. Поэтому $f(Y) = Y$. Так как модуль X π -инъективен, то существует такой эндоморфизм g модуля X , что f совпадает с g на Y . По утверждению 5 $f(X) \subseteq X$.

8. Утверждение 8 следует из утверждений 6 и 7.

9. Пусть $u_1: X_1 \rightarrow X$ — естественное вложение, $\pi_2: X \rightarrow X_2$ — проекция с ядром $X_1 \oplus X_3$, Y_1 — подмодуль в X_1 и $f: Y_1 \rightarrow X_2$ — гомоморфизм. Обозначим через g такой эндоморфизм подмодуля $Y_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ в X , что $g(y_1 + x_2 + x_3) = y_1 + f(y_1) \in Y_1 \oplus X_2$ для всех $y_1 \in Y_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$. Тогда $g^2 = g$. Так как модуль X π -инъективен, то g продолжается до эндоморфизма h модуля X . Тогда $\pi_2 h u_1$ — гомоморфизм из X_1 в X_2 , продолжающий гомоморфизм f . Поэтому модуль X_1 X_2 -инъективен.

10. Пусть N' — ненулевой подмодуль в N . Если $f(N') = 0$, то $N \subseteq f^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(X)$. Допустим, что $f(N') \neq 0$. Тогда $X \cap f(N') \neq 0$, откуда следует, что $0 \neq f^{-1}(X \cap f(N')) \subseteq f^{-1}(X)$.

11. Пусть $t \in M$ и $f: A_A \rightarrow M$ — такой гомоморфизм, что $f(a) = ta$ для всех $a \in A$. По утверждению 10 $f^{-1}(X)$ — существенный правый идеал кольца A . Так как $f^{-1}(X)$ — аннулятор элемента $t + X \in M/X$, то $M/X = \text{Sing}(M/X)$.

12. Так как $X \cap \text{Sing}(M) = 0$ и M — существенное расширение модуля X , то модуль M не сингулярен. Если $f \in \text{Hom}(N, M)$ и N — существенное расширение $\text{Ker}(f)$, то по утверждению 11 $\text{Sing}(N/\text{Ker}(f)) = N/\text{Ker}(f) \cong f(N)$, откуда следует, что $f(N) = \text{Sing}(f(N)) \subseteq \text{Sing}(M) = 0$, f — нулевой гомоморфизм. $\square$

Лемма 1.2. Пусть M — существенное расширение вполне целозамкнутого модуля X .

1. $f(X) \subseteq X$ для любого X -существенного эндоморфизма f модуля M .
2. Если f — эндоморфизм модуля M и $\text{Ker}(f)$ — существенный подмодуль в M , то $f(X) \subseteq X$.
3. Если X — существенное расширение некоторого модуля Y , который вполне инвариантен в M , то X — вполне инвариантный подмодуль в M .

4. Если X — существенное расширение самоинъективного модуля Y , то X — самоинъективный вполне инвариантный подмодуль в M .
5. Если X — существенное расширение полупростого модуля, то X — самоинъективный вполне инвариантный подмодуль в M .

Доказательство. 1. По условию $f(Y) \subseteq Y$ для некоторого существенно-го подмодуля Y в X . Обозначим через X_1 модуль $X \cap f^{-1}(X)$ и через $f_1 \in \text{Hom}(X_1, X)$ — ограничение гомоморфизма f на модуль X_1 . Так как $Y \subseteq X_1$ и $f_1(Y) = f(Y) \subseteq Y$, то f_1 — X_1 -существенный гомоморфизм из X_1 в X . Поскольку X — вполне целозамкнутый модуль, то f_1 продолжается до гомоморфизма $g: X \rightarrow X$. По утверждению 5 леммы 1.1 $f(X) \subseteq X$.

2. Обозначим $Y = X \cap \text{Ker}(f)$. Тогда Y — существенный подмодуль в X и $f(Y) = 0 \subseteq Y$. По утверждению 1 $f(X) \subseteq X$.

3. Утверждение 3 следует из утверждения 1.

4. Пусть M' — инъективная оболочка модуля M . Тогда M' — существенное расширение модуля Y , поскольку M' — существенное расширение модуля M , M — существенное расширение модуля X и X — существенное расширение модуля Y . По утверждению 3 леммы 1.1 Y — вполне инвариантный подмодуль в M и M' . По утверждению 3 X — вполне инвариантный подмодуль в M и M' . По утверждению 4 леммы 1.1 модуль X самоинъективен.

5. Так как все полупростые модули самоинъективны, то утверждение 5 следует из утверждения 4. $\square$

Лемма 1.3 [3, 16.13, 18.3]. Пусть X — правый модуль над кольцом A .

1. Если $\mathcal{E}(X)$ — класс всех таких модулей Y , что X Y -инъективен, то $\mathcal{E}(X)$ содержит все прямые суммы, подмодули и гомоморфные образы модулей из $\mathcal{E}(X)$.
2. Если модуль X инъективен относительно модуля A_A , то модуль X инъективен.

Предложение 1.4. Пусть X — модуль с инъективной оболочкой M , $\text{sg}(M)$ — идеал кольца $\text{End}(M)$, образованный всеми эндоморфизмами, ядра которых являются существенными подмодулями в M . Равносильны следующие условия:

- 1) X — вполне целозамкнутый модуль;
- 2) $f(X) \subseteq X$ для любого X -существенного эндоморфизма f модуля M ;
- 3) X — малоинъективный модуль и $h(X) \subseteq X$ для любого $h \in \text{sg}(M)$;
- 4) X — малоинъективный модуль и $X = Y \oplus Z$, где $\text{sg}(Y) = 0$, Z — самоинъективный X -инъективный модуль и Z — существенное расширение модуля $\sum_{h \in \text{sg}(M)} h(X)$.

Доказательство. Импликация 1) $\implies$ 2) следует из утверждения 1 леммы 1.2.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 3). Пусть Y_1 — подмодуль модуля X и $f_1 \in \text{End}(Y_1)$. По утверждению 6 леммы 1.1 существует такой подмодуль Z в X ,

что $Y_1 \cap Z = 0$ и X — существенное расширение модуля $Z \oplus Y_1$. Обозначим через f_2 такой эндоморфизм модуля $Z \oplus Y_1$, что $f_2(z + y_1) = f_1(y_1)$ для любых элементов $z \in Z$ и $y_1 \in Y_1$. Эндоморфизм f_2 продолжается до эндоморфизма f инъективного модуля M . Так как $f(Z \oplus Y_1) \subseteq Z \oplus Y_1$, то f — X -существенный эндоморфизм модуля M . По условию $f(X) \subseteq X$. Тогда модуль X малоинъективен, поскольку f_1 продолжается до эндоморфизма модуля X . Пусть h — эндоморфизм модуля M и $\text{Ker}(h)$ — существенный подмодуль в M . Обозначим $Y = X \cap \text{Ker}(h)$. Так как Y — существенный подмодуль в X и $h(Y) = 0 \subseteq Y$, то h — X -существенный эндоморфизм модуля M . По условию $h(X) \subseteq X$.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 1). Пусть Y_1 — подмодуль модуля X и f_1 — Y_1 -существенный гомоморфизм из Y_1 в X . Тогда $f_1(Y_2) \subseteq Y_2$ для некоторого существенного подмодуля Y_2 модуля Y_1 . По утверждению 6 леммы 1.1 существует такой подмодуль Z в X , что $Y_1 \cap Z = 0$ и X — существенное расширение модуля $Z \oplus Y_1$. Непосредственно проверяется, что X — существенное расширение модуля $Z \oplus Y_2$, поскольку Y_1 — существенное расширение модуля Y_2 . Поэтому M — существенное расширение модуля $Z \oplus Y_2$. Обозначим через f_2 такой гомоморфизм из $Z \oplus Y_1$ в X , что $f_2(z + y_1) = f_1(y_1)$ для любых элементов $z \in Z$ и $y_1 \in Y_1$. Обозначим через f_3 такой эндоморфизм модуля $Z \oplus Y_2$, что $f_3(z + y_2) = f_1(y_2) \in Y_2 \subseteq Z \oplus Y_2$ для любых элементов $z \in Z$ и $y_2 \in Y_2$. Так как модуль M малоинъективен, то эндоморфизм f_3 продолжается до эндоморфизма f_4 модуля X . Гомоморфизм f_2 и эндоморфизм f_4 продолжаются до эндоморфизмов f и f' инъективного модуля M . Обозначим $h = f - f' \in \text{End}(M)$. Так как $h(Z \oplus Y_2) = (f - f')(Z \oplus Y_2) = 0$ и M — существенное расширение модуля $Z \oplus Y_2$, то по условию $h(X) \subseteq X$. Тогда $f(X) \subseteq h(X) + f'(X) = h(X) + f_4(X) \subseteq X$, причём f совпадает с f_1 на модуле Y_1 . Поэтому f_1 продолжается до эндоморфизма модуля X , и X — вполне целозамкнутый модуль.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 4). Обозначим через Z_1 подмодуль $\sum_{h \in \text{sg}(M)} h(X)$ модуля M . Так как $\text{sg}(M)$ — идеал кольца $\text{End}(M)$, то Z_1 — вполне инвариантный подмодуль инъективного модуля M . Поэтому модуль Z_1 самоинъективен. По условию $Z_1 \subseteq X$. По утверждению 8 леммы 1.1 существует такое прямое разложение $X = Y \oplus Z$, что Z — существенное расширение самоинъективного модуля Z_1 . Применяя утверждение 4 леммы 1.2 к вполне целозамкнутому модулю Z , получим, что модуль Z самоинъективен, т. е. модуль Z Z -инъективен. По утверждению 9 леммы 1.1 модуль Z Y -инъективен. По утверждению 1 леммы 1.3 модуль Z $Y \oplus Z$ -инъективен, т. е. модуль Z X -инъективен. Пусть $h_1 \in \text{sg}(Y)$. Обозначим через h_2 такой эндоморфизм модуля $X = Y \oplus Z$, что $h_2(y + z) = h_1(y)$ для всех $y \in Y$ и $z \in Z$. Так как $h_1 \in \text{sg}(Y)$, то $h_2 \in \text{sg}(X)$. Эндоморфизм h_2 продолжается до эндоморфизма h инъективного модуля M . Так как $\text{Ker}(h_2) \subseteq \text{Ker}(h)$ и $h_2 \in \text{sg}(X)$, то $h \in \text{sg}(M)$. Поэтому $h_1(Y) \subseteq h(X) \subseteq Z_1$, $h_1(Y) \subseteq Y \cap Z = 0$, $\text{sg}(Y) = 0$.

Импликация 4) $\implies$ 3) очевидна. $\square$

Лемма 1.5. Если X — подмодуль модуля M и M' — инъективная оболочка модуля M , то равносильны следующие условия:

- 1) M — рациональное расширение модуля X ;
- 2) $f(M) = 0$ для любого $f \in \text{End}(M')$ с условием $f(X) = 0$;
- 3) M — существенное расширение модуля X и для любых двух ненулевых элементов $m \in M$ и $x \in X$ существует такой элемент $a \in A$, что $xa \neq 0$ и $ma \in X$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Допустим, что $f(M) \neq 0$. Тогда $M \cap f(M) \neq 0$. Пусть $0 \neq x = f(y) \in M \cap f(M)$, $y \in M$. Так как M — рациональное расширение модуля X , то существует такое $a \in A$, что $xa \neq 0$ и $ya \in X$. Поэтому $0 = f(ya) = xa \neq 0$. Получено противоречие.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Допустим, что M не является рациональным расширением модуля X . Тогда существуют такие $x, y \in M$, что $x \neq 0$ и $(y \cdot X) \subseteq r(x)$. Так как $r(y) \subseteq (y \cdot X) \subseteq r(x)$, то существует такой эпиморфизм $g: yA \rightarrow xA$, что $g(ya) = xa$ для всех $a \in A$. Тогда $X \cap yA \subseteq \text{Ker}(g)$, поскольку $(y \cdot X) \subseteq r(x)$. Поэтому существует такой эпиморфизм $h: (yA + X) \rightarrow xA$, что $X \subseteq \text{Ker}(h)$ и $h(ya) = xa$ для всех $a \in A$. Так как модуль M' инъективен, то h продолжается до $f \in \text{End}(M')$, причём $f(X) = h(X) = 0$. Так как $f(y) = x \neq 0$, то $f(M) \neq 0$.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 3). Пусть $0 \neq m \in M$. Подставляя в определение рационального расширения $m_1 = m_2 = m$, получим, что существует такой элемент $a \in A$, что $ma \in X$ и $ma \neq 0$. Поэтому M — существенное расширение X . Оставшаяся часть утверждения следует из определения рационального расширения.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 1). Пусть $0 \neq m_1, m_2 \in M$. Надо доказать существование такого элемента $a \in A$, что $m_1a \neq 0$ и $m_2a \in X$. Так как M — существенное расширение X , то $0 \neq m_1a_1 \in X$ для некоторого $a_1 \in A$. Если $m_2a_1 = 0$, то $m_2a_1 \in X$, и можно положить $a = a_1$. Допустим, что $m_2a_1 \neq 0$. Обозначим через x и m ненулевые элементы $m_1a_1 \in X$ и $m_2a_1 \in M$ соответственно. По условию существует такой элемент $b \in A$, что $xb \neq 0$ и $mb \in X$. Обозначим $a = a_1b$. Тогда $m_1a = m_1a_1b = xb \neq 0$ и $m_2a = m_2a_1b = mb \in X$. $\square$

Лемма 1.6. Пусть X — правый модуль над кольцом A , M — инъективная оболочка модуля X и $X = Y \oplus Z$, где модуль Y несингулярен и модуль Z инъективен. Тогда M — рациональное расширение модуля X .

Доказательство. Пусть $0 \neq m = y' + z_1 \in M$ и $0 \neq x = y + z_2 \in X$, где $y' \in Y'$, $y \in Y$ и $z_1, z_2 \in Z$. Тогда $y' \neq 0$ и $y \neq 0$. По утверждению 11 леммы 1.1 $(y' \cdot Y)$ — существенный правый идеал кольца A . Так как модуль Y несингулярен, то $ya \neq 0$ для некоторого элемента $a \in (y' \cdot Y)$, причём $y'(y' \cdot Y) \in Y$. Тогда $xa \neq 0$ и $ma \in X$. По лемме 1.5 M — рациональное расширение модуля X . $\square$

Лемма 1.7. Пусть X — локально нётеров модуль и f — эндоморфизм модуля M . Если $\text{Ker}(f)$ — существенный подмодуль в X , то f локально нильпотентен.

Доказательство. Пусть Y — циклический подмодуль в X и $Y_i = Y \cap \text{Ker}(f^i)$. Так как $Y_i \subseteq Y_{i+1}$ и по условию Y — нётеров модуль, то $Y_{n+1} = Y_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому гомоморфизм f^n индуцирует изоморфизм $h: Y/Y_n \rightarrow f^n(Y)$. Пусть

$$K = \text{Ker}(f) \cap f^n(Y), \quad Z/Y_n = h^{-1}(K), \quad Y_n \subseteq Z \subseteq Y.$$

Если $f^n(Y) = 0$, то f локально нильпотентен. Допустим, что $f^n(Y) \neq 0$. Так как X — существенное расширение $\text{Ker}(f)$, то Z строго содержит Y_n и $f^{n+1}(Z) = f(K) = 0$. Поэтому $Z \subseteq Y_{n+1} = Y_n$. Получено противоречие. Поэтому f локально нильпотентен. $\square$

Лемма 1.8. Пусть X — малоинъективный модуль и M — его инъективная оболочка.

1. Если f — эндоморфизм модуля M с условием $f(X \cap f^{-1}(X)) \subseteq X \cap f^{-1}(X)$, то $f(X) \subseteq X$.
2. Если $X = Y \oplus Z$, где модуль Y несингулярен и модуль Z инъективен, то X — вполне целозамкнутый модуль и M — рациональное расширение модуля X .
3. Если для любого $x \in X$ и каждого $g \in \text{sg}(X)$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^{n+1}(x) \in \sum_{i=0}^n g^i(x)A$, то X — вполне целозамкнутый модуль.
4. Если каждый эндоморфизм $g \in \text{sg}(X)$ локально нильпотентен, то X — вполне целозамкнутый модуль.
5. Если $\text{sg}(X)$ — ниль-идеал в $\text{End}(X)$, то X — вполне целозамкнутый модуль, $h(X) \subseteq X$.
6. Если X — локально нётеров модуль, то X — вполне целозамкнутый модуль.

Доказательство. 1. Так как $f(X \cap f^{-1}(X)) \subseteq X \cap f^{-1}(X)$ и X малоинъективен, то $(f - g)(X \cap f^{-1}(X)) = 0$ для некоторого эндоморфизма g модуля X . Теперь утверждение 1 следует из утверждения 5 леммы 1.1.

2. Существует прямое разложение $M = Y' \oplus Z$, где Y' — инъективная оболочка несингулярного модуля Y . По лемме 1.6 M — рациональное расширение модуля X . Пусть $h \in \text{sg}(M) = \text{sg}(Y' \oplus Z)$. По утверждению 12 леммы 1.1 $\text{Sing}(Y') = 0$. Пусть π — проекция модуля $M = Y' \oplus Z$ на модуль Y' с ядром Z . По утверждению 11 леммы 1.1 $\pi h(X) \subseteq \text{Sing}(Y') = 0$. Так как $h(X) \subseteq M = Y' \oplus Z$, то $h(X) \subseteq Z$. По предложению 1.4 X — вполне целозамкнутый модуль.

3. По предложению 1.4 достаточно доказать, что $h(X) \subseteq X$ для любого $h \in \text{sg}(M)$. Пусть

$$P \equiv X \cap h^{-1}(X), \quad Y \equiv \{x \in X \mid h^n(X) \subseteq X \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

Так как $Y \supseteq X \cap \text{Ker}(h)$, то M и X — существенные расширения модуля Y . Кроме того, Y — такой наибольший подмодуль в X , что $h(Y) \subseteq Y$. Так как X малоинъективен и $h(Y) \subseteq Y$, то $(h - g)(Y) = 0$ для некоторого $g \in \text{End}(X)$. Так как $g(X \cap \text{Ker}(h)) = 0$, то $g \in \text{sg}(X)$. Обозначим $\bar{X} = X/Y$. Если $\bar{X} = 0$, то $X = Y$, $h(X) \subseteq X$, и в данном случае утверждение доказано.

Теперь допустим, что $\bar{X} \neq 0$. Тогда $(h - g)(Y) = 0$, и правилом $t(x + Y) = (h - g)(x)$ корректно определён гомоморфизм $t: \bar{X} \rightarrow M$. Пусть $\bar{Z} \equiv t^{-1}(Y) \subseteq \bar{X}$, Z — такой подмодуль в X , что $Z \supseteq Y$ и $Z/Y = \bar{Z}$. Так как M — существенное расширение модуля X , то по утверждению 10 леммы 1.1 $\bar{X}$ — существенное расширение модуля $\bar{Z}$. Поэтому $\bar{Z} \neq 0$. Кроме того, $h(Z) \subseteq t(Z) + g(Z) \subseteq \subseteq Y + g(Z) \subseteq X$. Так как $Z \supseteq Y$, то X — существенное расширение модуля Z .

Пусть $x \in X \setminus Y$, $0 \neq \bar{x} = x + Y \in \bar{X}$. По условию $g^{n+1}(x) \in \sum_{i=0}^n g^i(x)A$ для некоторого n . Так как $(h^i - g^i)(Y) = 0$ для всех i , то правилом $t_i(\bar{x}a) = (h^i - g^i)(xa)$ ($a \in A$) корректно определены гомоморфизмы $t_i: \bar{x}A \rightarrow M$. Пусть $\bar{Z}_i \equiv t_i^{-1}(Y) \subseteq \bar{x}A$ и $\bar{W} \equiv \bar{Z}_1 \cap \dots \cap \bar{Z}_n \subseteq \bar{x}A$. Так как M — существенное расширение модуля X , то по утверждению 10 леммы 1.1 $\bar{x}A$ — существенное расширение каждого из модулей $\bar{Z}_i$. Поэтому $\bar{x}A$ — существенное расширение модуля $\bar{W}$. Тогда $0 \neq \bar{x}a \in \bar{W}$ для некоторого $a \in A$. Поэтому $h^i(xa) = t_i(xa) + g^i(xa) \in X$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $h^{n+1}(xa) \in \sum_{i=0}^n h^i(xa)A \in X$. Тогда $h^{n+j}(xa) \in X$ для всех $j \geq 1$. Поэтому $h^k(xa) \in X$ для всех $k \geq 1$, $xa \in Y$, $\bar{x}a = 0$. Получено противоречие.

Утверждения 4 и 5 следуют из утверждения 3.

Утверждение 6 следует из утверждения 4 и леммы 1.7. $\square$

Предложение 1.9. Для несингулярного модуля X равносильны следующие условия:

- 1) X — вполне целозамкнутый модуль;
- 2) X — малоинъективный модуль.

Доказательство. Импликация 1) $\implies$ 2) следует из предложения 1.4.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Пусть M — инъективная оболочка модуля X . По предложению 1.4 достаточно показать, что $h(X) \subseteq X$ для любого такого эндоморфизма h модуля M , что $\text{Ker}(h)$ — существенный подмодуль в M . Это так, поскольку $h \equiv 0$ по утверждению 12 леммы 1.1. $\square$

2. Вполне целозамкнутые кольца

Лемма 2.1 [2, 19.34, 19.36]. Пусть A — кольцо, Q — его максимальное правое кольцо частных, M — инъективная оболочка модуля A_A . Если M — рациональное расширение модуля A_A , то Q_A — инъективная оболочка модуля A_A , кольцо Q инъективно справа и отображение $\varphi: \text{End}(Q_A) \rightarrow Q$, при котором $\varphi(f) = f(1)$, является изоморфизмом колец.

Предложение 2.2. Пусть A — кольцо и Q — его максимальное правое кольцо частных. Равносильны следующие условия:

- 1) A_A — вполне целозамкнутый модуль;
- 2) A_A — малоинъективный модуль и $A_A = Y \oplus Z$, где модуль Y несингулярен и модуль Z самоинъективен;
- 3) A_A — вполне целозамкнутый модуль, Q_A — инъективная оболочка модуля A_A , кольцо Q инъективно справа, A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q , $A_A = Y \oplus Z$, где модуль Y несингулярен и модуль Z инъективен;
- 4) A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q и модуль Q_A инъективен.

Доказательство. Пусть M — инъективная оболочка модуля A_A .

Импlicationи 3) $\implies$ 4) и 3) $\implies$ 1) очевидны.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). По предложению 1.4 A_A — малоинъективный модуль и $A_A = Y \oplus Z$, где $\text{sg}(Y) = 0$, модуль Z самоинъективен и Z — существенное расширение модуля $\sum_{h \in \text{sg}(M)} h(A)$. Пусть $y \in \text{Sing}(Y)$ и f — такой

эндоморфизм модуля A , что $f(a) = ya$ для всех $a \in A$. Эндоморфизм f продолжается до эндоморфизма h инъективного модуля M . Так как $\text{Ker}(f) = r(x)$ — существенный правый идеал в A , то $f \in \text{sg}(A_A)$ и $h \in \text{sg}(M)$. Тогда

$$y \in f(A) = h(A) \subseteq \sum_{h \in \text{sg}(M)} h(A) \subseteq Z \cap Y = 0.$$

Поэтому модуль Y несингулярен.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 3). По утверждению 9 леммы 1.1 модуль Z Y -инъективен. Кроме того, Z Z -инъективен. По утверждению 1 леммы 1.3 модуль Z A_A -инъективен. По утверждению 2 леммы 1.3 модуль Z инъективен. По утверждению 2 леммы 1.8 A_A — вполне целозамкнутый модуль и M — рациональное расширение модуля A_A . По лемме 2.1 Q_A — инъективная оболочка модуля A_A , кольцо Q инъективно справа и отображение $\varphi: \text{End}(Q_A) \rightarrow Q$, при котором $\varphi(f) = f(1)$, является изоморфизмом колец.

Пусть q — такой элемент кольца Q , что $qB \subseteq B$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A . Обозначим через f такой эндоморфизм модуля Q_A , что $f(x) = qx$ для всех $x \in Q$. Тогда f — A_A -существенный эндоморфизм инъективной оболочки Q_A вполне целозамкнутого модуля A_A . По предложению 1.4 $f(A) \subseteq A$. Поэтому $q = f(1) \in A$ и A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q .

Докажем импликацию 4) $\implies$ 1). Рациональное расширение Q_A модуля A является существенным расширением модуля A_A . Кроме того, модуль Q_A инъективен по условию. Поэтому Q_A — инъективная оболочка модуля A_A . По предложению 1.4 достаточно доказать, что $\alpha(A) \subseteq A$ для любого A_A -существенного эндоморфизма α модуля Q_A . Так как α — A_A -существенный эндоморфизм, то $\alpha(B) \subseteq B$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A . Обозначим $q = \alpha(1) \in Q$. По лемме 2.1 отображение $\varphi: \text{End}(Q_A) \rightarrow Q$, при котором

$\varphi(f) = f(1)$, является изоморфизмом колец. Так как $qB \subseteq B$ и A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q , то $q \in A$. Поэтому $\alpha(A) \subseteq A$. $\square$

Предложение 2.3. Если A — несингулярное справа кольцо и Q — его максимальное правое кольцо частных, то равносильны следующие условия:

- 1) A_A — вполне целозамкнутый модуль;
- 2) A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q ;
- 3) A_A — малоинъективный модуль.

Доказательство. Так как кольцо A несингулярно справа, то Q_A — инъективная оболочка модуля A_A [2, 19.35]. Поэтому эквивалентность 1) $\iff$ 2) вытекает из предложения 2.2. Эквивалентность 1) $\iff$ 3) вытекает из предложения 1.9. $\square$

Замечание 2.4 [4, 11.13, 13.15]. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A — полупервичное правое кольцо Голди;
- 2) A — правый порядок в полупростом артиновом кольце Q ;
- 3) A — несингулярное справа конечномерное справа полупервичное кольцо;
- 4) в A множество всех существенных правых идеалов совпадает с множеством всех правых идеалов, содержащих делители нуля.

В этом случае кольцо Q является максимальным правым кольцом частных кольца A .

Предложение 2.5. Пусть A — полупервичное правое кольцо Голди и Q — его классическое правое кольцо частных. Равносильны следующие условия:

- 1) A_A — вполне целозамкнутый модуль;
- 2) A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q ;
- 3) A_A — малоинъективный модуль;
- 4) A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q .

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2) и 3) вытекает из предложения 2.3 и замечания 2.4.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 4). Пусть $q \in Q$, a — делитель нуля в A и $q^n a \in A$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через B правый идеал $\sum_{n=1}^{\infty} q^n a A$, содержащий делитель нуля a . По замечанию 2.4 B — существенный правый идеал. Так как $qB \subseteq B$ и A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q , то $q \in A$.

Докажем импликацию 4) $\implies$ 2). Пусть B — существенный правый идеал кольца A , $q \in Q$ и $qB \subseteq B$. По замечанию 2.4 B содержит некоторый делитель нуля a . Тогда $q^n a \in qB \subseteq B \subseteq A$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q , то $q \in A$. $\square$

Замечание 2.6. Нётеров модуль X является малоинъективным в точности тогда, когда X — целозамкнутый модуль.

Замечание 2.6 вытекает из того, что подмодули нётерова модуля являются конечно порождёнными модулями.

Предложение 2.7. Пусть A — нётерово справа кольцо.

1. Если X — правый A -модуль, то X — вполне целозамкнутый модуль тогда и только тогда, когда X — малоинъективный модуль.
2. A_A — вполне целозамкнутый модуль тогда и только тогда, когда A_A — малоинъективный модуль, что имеет место тогда и только тогда, когда A_A — целозамкнутый модуль.

Доказательство. 1. Импликация в прямую сторону вытекает из предложения 1.4. Обратная импликация вытекает из утверждения 6 леммы 1.8 и того, что каждый правый модуль над нётеровым справа кольцом является локально нётеровым модулем.

2. Первая эквивалентность вытекает из утверждения 1. Вторая эквивалентность вытекает из замечания 2.6. $\square$

Замечание 2.8 (окончание доказательства теорем 3, 4, 6). Теорема 3 вытекает из предложения 2.2. Теорема 4 вытекает из утверждения 2 предложения 2.7. Теорема 6 вытекает из предложения 2.5 и утверждения 2 предложения 2.7.

Замечание 2.9. Пусть A — кольцо, S — множество всех неделителей нуля в A , причём каждый эндоморфизм любого главного правого идеала продолжается до эндоморфизма модуля A_A .

1. Если a — элемент кольца A , то $r(a)$ — идеал в A в точности тогда, когда $aA \subseteq Aa$. В частности, если a — левый неделитель нуля, то $aA \subseteq Aa$.
2. S — левое множество Оре, A имеет классическое левое кольцо частных Q и $sAs^{-1} \subseteq A$ для любого $s \in S$. Если A имеет классическое правое кольцо частных, то Q — двустороннее классическое кольцо частных кольца A .
3. Если $As \subseteq sA$ для каждого $s \in S$, то A имеет классическое двустороннее кольцо частных Q и $A = sAs^{-1} = s^{-1}As$ для каждого $s \in S$.

Доказательство. 1. Допустим, что $r(a)$ — идеал в A и $b \in A$. Тогда $r(a) \subseteq r(ab)$. Поэтому $f(a) = ab$ для некоторого эпиморфизма $f: aA \rightarrow abA$. Тогда $f \in \text{End}(aA)$. По условию f продолжается до некоторого эндоморфизма f' модуля A_A . Обозначим $c = f'(1)$. Тогда $ab = f(a) = ca$. Поэтому Aa — идеал.

Допустим, что Aa — идеал в A и $b \in A$. Тогда $ab = ca$ для некоторого $c \in A$. Поэтому $ab \cdot r(a) = ca \cdot r(a) = 0$, $b \cdot r(a) \subseteq r(a)$ и $r(a)$ — идеал.

2. Пусть $s \in S$, $a \in A$. Так как по утверждению 1 $sa = bs$ для некоторого $b \in A$, то S — левое множество Оре. Поэтому A имеет классическое левое кольцо частных. Включение $sAs^{-1} \subseteq A$ следует из утверждения 1. Второе утверждение следует из того, что если кольцо имеет классическое левое кольцо частных Q и классическое правое кольцо частных, то Q — двустороннее классическое кольцо частных [4, 10.14].

3. Пусть $s \in S$. Так как $As \subseteq sA$, то S — правое множество Оре. Поэтому A имеет классическое правое кольцо частных Q . По утверждению 2 A имеет классическое двустороннее кольцо частных Q . По утверждению 1 $sA \subseteq As$. Кроме того, $As \subseteq sA$ по условию. Поэтому $sA = As$, $sAs^{-1} = s^{-1}As = A$. $\square$

Замечание 2.10. Пусть A — целозамкнутое справа кольцо, S — множество всех неделителей нуля кольца A , Q — классическое левое кольцо частных кольца A , которое существует по утверждению 2 замечания 2.9.

1. Если $q \in Q$ и $q^{n+1} = q^n a_n + \dots + q_1 a + a_0$ для некоторых $a_0, \dots, a_n \in A$, то $q \in s^{-1}As$ для некоторого $s \in S$.
2. Если $As \subseteq sA$ для каждого $s \in S$, то Q — классическое двустороннее кольцо частных кольца A и A — классически целозамкнутое справа подкольцо в Q .

Доказательство. 1. Обозначим через M конечно порождённый подмодуль $\sum_{i=1}^n q^i A$ модуля Q_A . Тогда $qM \subseteq M$. Так как $q, q^2, \dots, q^n$ — конечное число элементов классического левого кольца частных Q кольца A , то существуют такие элементы $s, a_1, \dots, a_n \in A$, что t — неделитель нуля и $sq^i \in A$ для $i = 1, \dots, n$ [5, с. 61]. Поэтому sM — конечно порождённый правый идеал кольца A и $s \in sM$. Кроме того,

$$qs^{-1} \cdot sM = qM \subseteq M = s^{-1} \cdot sM.$$

Поэтому правилом $f(x) = sqs^{-1}x$ задаётся эндоморфизм f конечно порождённого правого идеала sM . По условию f продолжается до эндоморфизма g модуля A_A . Обозначим $c = g(1)$. Тогда

$$sq = sqs^{-1} \cdot s = f(s) = cs, \quad q = s^{-1}cs \in s^{-1}As.$$

2. По утверждению 3 замечания 2.9 Q — двустороннее классическое кольцо частных кольца A и $A = sAs^{-1} = s^{-1}As$ для каждого $s \in S$. Пусть $q \in Q$ и $q^{n+1} = q^n a_n + \dots + q_1 a + a_0$ для некоторых $a_0, \dots, a_n \in A$. По утверждению 1 $q \in s^{-1}As = A$ для некоторого неделителя нуля s в A . Поэтому A — классически целозамкнутое справа подкольцо в Q . $\square$

Следующее замечание 2.11 хорошо известно.

Замечание 2.11. Если A — коммутативная область и Q — его поле частных, то A_A — целозамкнутый модуль тогда и только тогда, когда A — классически целозамкнутое справа подкольцо в Q .

Доказательство. Импликация в прямую сторону следует из утверждения 2 замечания 2.10. Докажем обратную импликацию. Пусть $0 \neq B = \sum_{i=1}^n b_i A \subseteq A$ и $0 \neq f \in \text{End}(B_A)$. Так как модуль Q_A инъективен, то можно считать, что f — эндоморфизм модуля Q_A . Обозначим $q = f(1) \in Q$. Непосредственно проверяется, что $q \neq 0$ и $f(x) = qx$ для всех $x \in Q$. Так как $qB \subseteq B$, то $qb_i = \sum_{j=1}^n b_j a_{ji}$, где $a_{ji} \in A$ и $1 \leq i, j \leq n$. Тогда $\left\{ (q - a_{ii})b_i = \sum_{i \neq j} b_j a_{ji} = 0 \right\}_{i,j=1}^n$ и система уравнений $\left\{ (q - a_{ii})x_i = \sum_{i \neq j} x_j a_{ji} = 0 \right\}_{i,j=1}^n$ имеет ненулевое решение $b_1, \dots, b_n$.

Поэтому определитель $D(q)$ этой системы равен нулю и является многочленом относительно q с коэффициентами из A , причём старший коэффициент этого многочлена равен 1. Так как A классически целозамкнуто в Q , то $q \in A$. Поэтому правилом $h(a) = qa$ задаётся эндоморфизм h модуля A_A , совпадающий с f на B . $\square$

Литература

- [1] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.
- [2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.
- [3] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York: Springer, 1992.
- [4] Lam T. Y. Lectures on Modules and Rings. — New York: Springer, 1999.
- [5] Stenström B. Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory. — Berlin: Springer, 1975.