Проективный аналог преобразований Егорова

М. А. АКИВИС
Псагот, Израиль
e-mail: m.akivis@gmail.com

УДК 514.76

Ключевые слова: поверхность, преобразование Егорова, проективное пространство, проективная кинематика.

Аннотация

Доказано следующее утверждение, являющееся проективным аналогом известного результата Егорова для поверхностей евклидова пространства: для того чтобы семейство линий $v = \mathrm{const}$ на поверхности S в трёхмерном проективном пространстве было основанием для преобразования Егорова, необходимо и достаточно, чтобы поверхностные полосы, определяемые на S этими линиями, принадлежали билинейным системам плоских элементов. При этом существует не одно, а целый набор преобразований Егорова, зависящий от одной функции аргумента v, для которых это семейство линий служит основанием соответствия. Описаны свойства указанной билинейной системы.

Abstract

A. M. Akivis, Projective analog of Egorov transformation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 3—12.

We prove the following assertion, which is a projective analog of the well-known Egorov theorem on surfaces in the Euclidean space: a family of lines $v = \mathrm{const}$ on a surface S in $\mathbf{P}^3$ is a basis for Egorov transformation if and only if the surface bands defined on S by these lines belong to bilinear systems of plane elements. There exist a whole set of Egorov transformations that depend on one function of v with this family of lines as the basis of the correspondence.

1. В [9] Д. Ф. Егоров рассматривает поверхность S трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, на которой задано семейство линий F, зависящее от одного параметра. Каждая линия этого семейства подвергается некоторому конечному перемещению, которое непрерывно меняется от одной линии к другой. При этом получается новое семейство линий $\bar{F}$ и, следовательно, новая поверхность $\bar{S}$. Автор детально изучает случай, когда нормали поверхностей S и $\bar{S}$ соответствуют друг другу при указанных перемещениях. Впоследствии такие преобразования поверхности стали называть преобразованиями Егорова [5], а семейство линий F — основанием этого преобразования. Оказалось, что преобразования Егорова связаны с задачей о нахождении огибающей однопараметрического семейства конгруэнтных поверхностей — вопросом, важным для некоторых технических дисциплин.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 3—12.

В [9] получен следующий красивый геометрический результат: семейство линий F на заданной поверхности S будет основанием преобразования Егорова тогда и только тогда, когда нормали к поверхности S, взятые в точках каждой из этих линий, принадлежат линейному комплексу (который меняется от линии к линии). Этот результат позволил изучить целый ряд классов распределений линий на поверхности и получить интересные следствия.

В последующие годы появился целый ряд работ, в которых преобразование Егорова обобщалось для поверхностей в проективном, аффинном, неевклидовых пространствах [2,4,5], а также для конгруэнций [6], но эти работы не содержали теорем, аналогичных сформулированному выше результату Д. Ф. Егорова. В данной работе мы устраняем этот пробел, доказывая проективный аналог теоремы Егорова. Из неё может быть получена как исходная теорема Егорова, так и аналогичные теоремы для любой геометрии, подчинённой проективной.

Тему этой работы можно отнести к проективной кинематике — разделу геометрии, ведущему начало от В. Бляшке [7] и интенсивно развивающемуся в настоящее время (см., например, [8]). Однако теорию огибания с точки зрения неевклидовой кинематики пока ещё никто не рассматривал.

Все функции и многообразия, рассматриваемые в работе, предполагаются дифференцируемыми, а область изменения параметров, от которых они зависят, — достаточно малой, исключающей появление особенностей.

2. Пусть S — поверхность трёхмерного проективного пространства, заданная в точечных координатах уравнением $x = x(u,v)$, и $\xi = \xi(u,v)$ — семейство её касательных плоскостей, таких что

$$(\xi, x) = 0, \quad (\xi, x_u) = 0, \quad (\xi, x_v) = 0. \tag{1}$$

Здесь точка x по отношению к некоторой неподвижной системе проективных координат определяется координатами x^i, $i = 0,1,2,3$, плоскость ξ — тангенциальными координатами ξ_i и $(\xi, x) = \xi_i x^i$.

Рассмотрим на поверхности S семейство линий $v = \mathrm{const}$ и подвергнем каждую из них проективному преобразованию $A = A(v)$, где $A(v)$ — гладкая кривая на группе $\mathrm{SL}(4)$ проективных преобразований пространства $\mathbf{P}^3$, $\det A = 1$. Тогда поверхность S перейдёт в поверхность $\bar{S}$, определяемую уравнением

$$y = A(v)x(u,v). \tag{2}$$

В координатной форме это уравнение имеет вид $y^i = a^i_j(v)x^j(u,v)$. Касательные плоскости исходной поверхности перейдут в плоскости

$$\eta = \xi(u,v)A^{-1}(v), \tag{3}$$

тангенциальные координаты которых определяются формулами $\eta_i = \xi_j(u,v)\tilde{a}^j_i(v)$, где $\tilde{a}^j_i(v)$ — элементы матрицы $A^{-1}(v)$, обратной матрице $A(v)$. При этом, конечно, $(\eta, y) = 0$.

Поверхность $\bar{S}$ будет представлять собой преобразование Егорова для S, если её касательные плоскости совпадают с плоскостями $\eta(u,v)$, определяемыми уравнением (3). Аналитически это условие записывается в виде

$$(\eta, y_u) = 0, \quad (\eta, y_v) = 0. \tag{4}$$

Линии $v = \mathrm{const}$ на поверхности S в этом случае образуют основание преобразования Егорова.

Из соотношения (2) следует, что

$$y_u = A(v)x_u(u,v), \quad y_v = A(v)x_v(u,v) + A'(v)x(u,v).$$

Подставляя эти выражения в соотношения (4), получим два соотношения, первое из которых выполняется тождественно в силу второго из соотношений (1), а второе принимает вид $(\xi A^{-1}, Ax_v + A'x) = 0$, откуда следует, что $\big(\xi, A^{-1}(Ax_v + A'x)\big) = 0$. По третьему из соотношений (1) это уравнение приводится к виду $(\xi, A^{-1}A'x) = 0$. Если ввести обозначение

$$P = A^{-1}A', \tag{5}$$

то последнее уравнение перепишется в виде

$$(\xi, Px) = 0. \tag{6}$$

Легко убедиться, что оператор $P = P(v)$ принадлежит алгебре Ли $\mathbf{sl}(4)$ группы проективных преобразований пространства $\mathbf{P}^3$ и удовлетворяет условию $\operatorname{tr} P = 0$. Компоненты матрицы оператора P имеют вид $p^i_j = \tilde{a}^i_k (a^k_j)'$ и удовлетворяют условию $p^i_i = 0$.

Таким образом, плоские элементы $\alpha = \langle x, \xi \rangle$ поверхности S вдоль линий $v = \mathrm{const}$, образующих основание преобразования Егорова, удовлетворяют уравнению (6), где $P = P(v) \in \mathbf{sl}(4)$. Множество плоских элементов, определяемое уравнением вида (6), назовём билинейной системой и обозначим через L_P. Плоские элементы вдоль линии $v = \mathrm{const}$, касательные к поверхности S, образуют поверхностную полосу $s(v)$, которая, как теперь можно сказать, принадлежит билинейной системе L_P, определяемой уравнением (6). Строение билинейной системы плоских элементов мы выясним в п. 3. Заметим здесь только, что система L_P не меняется при умножении уравнения (6) на некоторый множитель. Поэтому если линии $v = \mathrm{const}$ образуют на поверхности S правильное семейство, то $P'_v \neq \lambda P$.

Обратно, пусть на поверхности S задано семейство линий $v = \mathrm{const}$ так, что определяемые ими поверхностные полосы $s(v)$ принадлежат билинейным системам L_Q, определяемым уравнением

$$(\xi, Qx) = 0, \tag{7}$$

где $Q = Q(v)$ — гладкая кривая на $\mathbf{sl}(4)$ и $Q' \neq \lambda Q$.

Докажем, что это семейство линий является основанием для семейства преобразований Егорова, зависящего от одной функции одного аргумента. Действительно, положим

$$P(v) = \varphi(v)Q(v), \tag{8}$$

где снова $P(v) \in \mathbf{sl}(4)$, и рассмотрим матричное уравнение

$$\frac{dA}{dv} = AP, \tag{9}$$

которое равносильно соотношению (5). Это уравнение имеет единственное решение $A = A(v)$, если задано начальное условие $A(v_0) = A_0$. При этом имеет место тождество Якоби (см. [3, с. 420])

$$\det A = \det A_0 e^{\int\limits_{v_0}^{v} \operatorname{tr} P\, dv}.$$

Так как $P \in \mathbf{sl}(4)$, то $\operatorname{tr} P = 0$ и $\det A = \det A_0$. Считая, что $\det A_0 = 1$, получим, что $A(v) \in \mathrm{SL}(4)$. При этом, поскольку $P'_v \neq \lambda P$, интегральные кривые $A = A(v)$ уравнения (9) не касаются ни одной из однопараметрических подгрупп группы $\mathrm{SL}(4)$.

Поверхность S, определяемая соотношением (2), будет преобразованием Егорова для поверхности S с заданным основанием $v = \mathrm{const}$, поскольку на ней выполняется соотношение (6), равносильное ввиду (8) соотношению (7). Если $A_1(v)$ и $A_2(v)$ — два решения уравнения (9), где $\det A = 1$, то $A_2 = CA_1$, где C — постоянная матрица с определителем, равным единице, и соответствующие этим двум решениям поверхности $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ связаны постоянным проективным преобразованием: $\bar{S}_2 = C\bar{S}_1$.

Так как матрица $P(v)$ определяется соотношением (8), в которое входит произвольная функция $\varphi(v)$, то семейство линий $v = \mathrm{const}$ на поверхности S, определяемое уравнением (7), служит основанием для семейства преобразований Егорова, зависящего от одной функции параметра v.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы семейство линий $v = \mathrm{const}$ на поверхности S в $\mathbf{P}^3$ было основанием для преобразования Егорова, необходимо и достаточно, чтобы поверхностные полосы, определяемые на S этими линиями, принадлежали билинейным системам плоских элементов. При этом существует не одно, а целый набор преобразований Егорова, зависящий от одной функции аргумента v, для которых это семейство линий служит основанием соответствия.*

Это утверждение является прямым обобщением сформулированной в п. 1 теоремы Д. Ф. Егорова. Действительно, пусть $\mathbb{R}^3$ — евклидово пространство и $x^0 = 0$ — уравнение его бесконечно удалённой плоскости, а (x^1, x^2, x^3) — прямоугольные декартовы координаты его точки x. Пусть S — поверхность в $\mathbb{R}^3$ и $A = A(v)$ — семейство евклидовых преобразований, которым подвергается эта поверхность. Тогда матрица $P = A^{-1}A'$ принимает вид

$$P(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & 0 & -p^3 & p^2 \\ v^2 & p^3 & 0 & -p^1 \\ v^3 & -p^2 & p^1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

а уравнение (6) записывается как

$$\begin{vmatrix} p^1 & p^2 & p^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} + v^1\xi_1 + v^2\xi_2 + v^3\xi_3 = 0. \tag{11}$$

Это уравнение только обозначениями отличается от уравнения (11) в [9]. В нём ξ_1, ξ_2, ξ_3 представляют собой координаты нормального вектора к поверхности S вдоль линии $v = \mathrm{const}$, а три определителя $x^i\xi_j - x^j\xi_i$ $(i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$ вместе с величинами ξ_i — плюккеровы координаты нормальной прямой. Уравнение (11) показывает, что нормали к поверхности S вдоль линии $v = \mathrm{const}$ принадлежат одному линейному комплексу.

Пусть G — подгруппа группы $\mathrm{SL}(4)$, являющаяся фундаментальной группой для некоторой трёхмерной геометрии, подчинённой проективной, и $\mathbf{g}$ — алгебра Ли этой группы. Пусть S — поверхность в этом пространстве и $\bar{S}$ — её преобразование Егорова, определяемое группой G. Тогда нетрудно показать, повторяя предыдущие выкладки, что вдоль линий $v = \mathrm{const}$, образующих основание этого преобразования, должны выполняться уравнения вида (6), где $P(v) \subset \mathbf{g}$. Обратно: всякая гладкая кривая $Q(v)$ на алгебре $\mathbf{g}$, такая что $Q'_v \neq \lambda Q$, определяет на S семейство линий, которое является основанием для семейства преобразований Егорова, зависящего от одной функции параметра v. Ввиду этого поверхностные полосы $s(v)$ вдоль линий $v = \mathrm{const}$, образующих на поверхности S основание преобразования Егорова, связанного с группой G, принадлежат билинейным системам специального вида, определяемым операторами $P(v) \in \mathbf{g}$.

Отметим ещё, что как в общем случае, когда $A(v) \subset \mathrm{SL}(4)$, так и в случае, когда $A(v) \subset G$, поверхность $\bar{S}$, являющаяся преобразованием Егорова для поверхности S, будет огибающей семейства поверхностей $A(v)S$, эквивалентных поверхности S относительно группы $\mathrm{SL}(4)$ или её подгруппы G соответственно.

3. Выясним теперь геометрический смысл уравнения (6). Множество плоских элементов $\alpha = \langle x, \xi \rangle$ в пространстве $\mathbf{P}^3$ зависит от пяти параметров. Уравнение (6) выделяет из него четырёхпараметрическое семейство L_P, которое названо выше билинейной системой. Каждая точка x общего положения служит центром однопараметрического семейства элементов $\alpha \in L_P$, и каждая плоскость ξ является носителем такого же семейства элементов $\alpha \in L_P$. Чтобы описать билинейную систему L_P, рассмотрим в $\mathbf{P}^3$ коллинеацию $z = Px$. Для плоского элемента $\alpha = \langle x, \xi \rangle \in L_P$, кроме условия $(\xi, x) = 0$, в силу (6) выполняется ещё условие $(\xi, z) = 0$. Это означает, что если точка x не является неподвижной точкой коллинеации P, т. е. $Px \neq \lambda x$, то все плоскости ξ элементов $\alpha \in L_P$ с центром в точке x проходят также через точку z. Поэтому точка x является центром пучка элементов $\alpha \in L_P$, плоскости которых проходят через прямую $[x, z]$. Если же x — неподвижная точка коллинеации P, то все плоские элементы с центром x принадлежат L_P. Точно так же, если ξ не является неподвижной плоскостью коллинеации P, т. е. $\xi P \neq \lambda\xi$, то она несёт прямую $[\xi, \zeta]$, где $\zeta = \xi P$, точек x, образующих вместе с ξ плоские элементы, принадлежащие L_P. Если же ξ — неподвижная плоскость коллинеации P, то все определяемые ею плоские элементы принадлежат L_P.

Пусть $\alpha = \langle x, \xi\rangle$ — плоский элемент, принадлежащий системе L_P. Определённые на нём прямые $[x, z]$ и $[\xi, \zeta]$ назовём сопряжёнными. В общем случае эти прямые не совпадают. Плоские элементы $\alpha \in L_P$, для которых сопряжённые прямые совпадают, назовём особыми элементами билинейной системы L_P. Эти элементы определяются условием $(\zeta, z) = 0$, которое может быть переписано в виде $(\xi P, Px) = 0$ или $(\xi, P^2x) = 0$. Последнее условие означает, что плоскость ξ особого элемента содержит, кроме точек x и Px, ещё точку P^2x. В общем случае эти точки не коллинеарны и $\xi = [x, Px, P^2x]$. Поэтому множество особых плоских элементов билинейной системы L_P для коллинеации P общего вида представляет собой распределение Δ_P, определённое всюду в $\mathbf{P}^3$, за исключением алгебраической кривой шестого порядка, имеющей уравнение $\mathrm{rang}(x, Px, P^2x) \leqslant 2$. Как нетрудно показать, в общем случае эта кривая распадается на шесть прямых, являющихся рёбрами тетраэдра, вершинами которого служат неподвижные точки оператора P. Если же предыдущее условие выполнено для любого x, то оператор P удовлетворяет уравнению

$$aP^2 + bP + cE = 0, \tag{12}$$

и все плоские элементы системы L_P будут особыми.

Матрица $P \in \mathbf{sl}(4)$ определяет на группе $\mathrm{SL}(4)$ однопараметрическую подгруппу $A(t) = e^{Pt}$. Прямая $[x, z]$ будет касательной к орбите точки x, описываемой при действии этой подгруппы. Действительно, если $x(t) = A(t)x_0$, то

$$\frac{dx}{dt} = Px = z. \tag{13}$$

Плоскость $\xi = [x, Px, P^2x]$ будет соприкасающейся с орбитой точки x, так как $P^2x = d^2x/dt^2$. Поэтому будет справедлива следующая теорема.

Теорема. *Билинейная система L_P состоит из всех плоских элементов α, касательных к орбитам однопараметрической подгруппы e^{Pt} группы $\mathrm{SL}(4)$, определяемой оператором P. Особые плоские элементы системы L_P являются соприкасающимися элементами этих орбит.*

Рассмотрим в качестве примера строение билинейной системы, когда матрица P имеет вид (10), т. е. принадлежит алгебре Ли группы движений евклидова пространства. В этом случае

$$z = Px = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & 0 & -p^3 & p^2 \\ v^2 & p^3 & 0 & -p^1 \\ v^3 & -p^2 & p^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v^1 - p^3x^2 + p^2x^3 \\ v^2 - p^1x^3 + p^3x^1 \\ v^3 - p^2x^1 + p^1x^2 \end{pmatrix},$$

а дифференциальное уравнение (13) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{x}, \tag{14}$$

где $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$ — радиус-вектор точки x в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = \{v^1, v^2, v^3\}$ — вектор её линейной скорости, $\omega = \{p^1, p^2, p^3\}$ — вектор её угловой скорости, $\omega \times \mathbf{x}$ — векторное произведение. Интегральными линиями этого дифференциального уравнения являются винтовые линии, определяемые винтом, ось которого имеет плюккеровы координаты $\bigl\{\omega, (1/\omega^2)\bigl((\mathbf{v}\cdot\omega)\omega - \omega^2\cdot\mathbf{v}\bigr)\bigr\}$, где $\mathbf{v}\cdot\omega$ — скалярное произведение и ω^2 — скалярный квадрат соответствующих векторов. Параметр этого винта равен $k = \mathbf{v}\cdot\omega/\omega^2$.

Прямая $[x, z]$ в этом случае касается в точке x проходящей через неё интегральной винтовой линии уравнения (14). Плоскость Θ, содержащая точку x и перпендикулярная прямой $[x, z]$, соответствует точке x относительно нуль-системы, определяемой комплексом (11). Прямые, проходящие через точку x и лежащие в плоскости Θ, принадлежат этому комплексу, а плоскости ξ, проходящие через прямую $[x, z]$, образуют вместе с точкой x плоские элементы, принадлежащие системе L_P. Поэтому плоскость ξ элемента $\alpha = \langle x, \xi\rangle \in L_P$ перпендикулярна одной из прямых комплекса (11), проходящей через точку x. Следовательно, нормали к элементам $\alpha = \langle x, \xi\rangle$ системы L_P принадлежат линейному комплексу (11), что согласуется с конструкцией, рассмотренной в [9].

4. Вернёмся к общему случаю билинейной системы плоских элементов L_P. Пусть S — произвольная поверхность в $\mathbf{P}^3$. В общем случае на ней имеется единственная поверхностная полоса, принадлежащая системе L_P. В самом деле, на пятимерном многообразии всех плоских элементов пространства $\mathbf{P}^3$ поверхность S выделяет двупараметрическое семейство, пересечение которого с четырёхмерной билинейной системой L_P и определяет полосу s. Если же в $\mathbf{P}^3$ задано однопараметрическое семейство билинейных систем $L_{P(v)}$, где $P'_v \neq \lambda P$, то оно определяет на поверхности S однопараметрическое семейство поверхностных полос $s(v)$ и однопараметрическое семейство линий, образующих основание для преобразования Егорова.

Однако в $\mathbf{P}^3$ существуют поверхности, все плоские элементы которых принадлежат одной билинейной системе плоских элементов L_P. Будем искать уравнение такой поверхности в виде $F(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$, где F — однородная функция. Тогда уравнение касательной плоскости к поверхности S в её точке $x(x^i)$ записывается в виде $(\partial F/\partial x^i)y^i = 0$, где y^i — текущие координаты точки плоскости. Поэтому её тангенциальные координаты ξ_i пропорциональны $\partial F/\partial x^i$, и в силу (6) дифференциальное уравнение искомых поверхностей записывается в виде
$$p^i_j x^j \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \tag{15}$$
Здесь $P = (p^i_j)$ — постоянная матрица, определяющая билинейную систему L_P. Уравнение характеристик (см., например, [1, с. 60]) для этого дифференциального уравнения записывается в виде $dx^i/dt = p^i_j x^j$ и совпадает с уравнением (13), определяющим орбиты однопараметрической подгруппы $A(t) = e^{Pt}$ группы $\mathrm{SL}(4)$. Поэтому искомая поверхность S образована однопараметрическим семейством этих орбит, проходящих через некоторую линию общего положения

в пространстве $\mathbf{P}^3$. Такую поверхность обозначим S_P. В частности, для матрицы P вида (10) эта поверхность будет винтовой поверхностью, образованной винтовыми линиями, принадлежащими этому винту.

Заметим ещё, что на поверхности S_P направление прямой $[x, z]$, $z = Px$, касательное в точке x к орбите подгруппы e^{Pt}, будет сопряжено в обычном смысле направлению прямой $[\xi, \zeta]$, $\zeta = \xi P$, проходящей через эту точку.

Изучим строение поверхностной полосы s, принадлежащей билинейной системе L_P. Обозначим через $\alpha(u) = \langle x(u), \xi(u)\rangle$ текущий плоский элемент полосы s, и пусть $z(u) = Px(u)$. Из уравнения (6) следует, что $\big(\xi(u) z(u)\big) = \big(\xi(u) Px(u)\big) = 0$, ввиду чего точка $z(u)$ принадлежит плоскости $\xi(u)$. При этом возможны два случая.

1. Точки $x(u)$, $x'(u)$ и $z(u)$ не коллинеарны. Тогда полоса s принадлежит поверхности S_P, образованной орбитами однопараметрической подгруппы $A(t) = e^{Pt}$ группы $\mathrm{SL}(4)$, проходящими через линию $x(u)$. Такую полосу s назовём неособой.

2. Точки $x(u)$, $x'(u)$ и $z(u)$ коллинеарны. Тогда точка $z(u)$ принадлежит касательной к линии $x(u)$, ввиду чего сама эта линия совпадает с орбитой однопараметрической подгруппы $A(t) = e^{Pt}$, порождаемой оператором P. Такую полосу назовём особой. Для особой полосы имеем $(\xi, x') = (\xi', x) = 0$, поэтому прямые $[\xi, \xi']$ и $[\xi, \zeta]$ сопряжены в обычном смысле.

Рассмотрим две билинейные системы плоских элементов L_1 и L_2, определяемые операторами P_1 и P_2, и найдём их пересечение. Пусть x — произвольная точка $\mathbf{P}^3$ и $z_1 = P_1 x$, $z_2 = P_2 x$. Если точки x, z_1 и z_2 находятся в общем положении в $\mathbf{P}^3$, то имеется единственный элемент $\alpha = \langle x, \xi\rangle$, где $\xi = [x, z_1, z_2]$, с центром в x, принадлежащий как L_1, так и L_2, а следовательно, и пересечению $L_1 \cap L_2$. Если точки x, z_1, z_2 коллинеарны, то все элементы α с центром в x, у которых плоскость ξ проходит через прямую, содержащую x, z_1 и z_2, принадлежат $L_1 \cap L_2$. Наконец, если $z_1 = z_2 = x$, то все элементы α с центром в точке x принадлежат $L_1 \cap L_2$. Точки x, которые вместе с точками z_1 и z_2 не находятся в общем положении, назовём особыми точками пересечения $L_1 \cap L_2$. Особые точки определяются из условия $\operatorname{rang}(x, z_1, z_2) \leqslant 2$ и образуют алгебраическую кривую шестого порядка в $\mathbf{P}^3$. Вне этой кривой элементы $\alpha \in L_1 \cap L_2$ образуют распределение $\Delta = L_1 \cap L_2$, которое в общем случае не является интегрируемым. Однако распределение Δ допускает одномерные решения — линии, которые в каждой своей точке касаются плоских элементов этого распределения. Эти решения определяют поверхностные полосы s, принадлежащие распределению Δ.

Пусть теперь поверхность S несёт семейство линий, каждая из которых определяет поверхностную полосу $s(v)$, принадлежащую распределению $\Delta(v) = L_1(v) \cap L_2(v)$. Тогда это семейство линий является основанием для семейства преобразований Егорова, зависящего от двух функций одного аргумента v. Доказательство этого утверждения проводится точно так же, как это сделано в [9] для случая евклидова пространства.

Примером поверхностей, несущих основания для семейств преобразований Егорова, зависящих от двух функций, служат поверхности, образованные орбитами однопараметрических подгрупп группы $\mathrm{SL}(4)$. Действительно, пусть S — такая поверхность. Тогда все лежащие на ней поверхностные полосы принадлежат билинейной системе L_1, определяемой оператором P_1. Зададим второе семейство операторов $P_2(v)$. Оно определяет на S семейство поверхностных полос $s(v)$, таких что $s(v) \subset L_1 \cap L_2(v)$. Эти полосы определяют на S основание семейства преобразований Егорова указанного типа.

Пусть, наконец, L_1, L_2, L_3 — три билинейные системы плоских элементов, определяемые операторами P_1, P_2, P_3, $x \in \mathbf{P}^3$ и $z_\alpha = P_\alpha x$, $\alpha = 1, 2, 3$. Тогда точка x является центром элемента $\alpha \subset L_1 \cap L_2 \cap L_3$ в том и только том случае, когда точки x, z_1, z_2, z_3 компланарны, т. е. удовлетворяют условию $(x, z_1, z_2, z_3) = 0$. Это условие является уравнением четвёртой степени относительно координат точки x и поэтому определяет поверхность V степени 4 в $\mathbf{P}^3$. Точно так же, если $\xi \in \mathbf{P}^{3*}$ и $\zeta_\alpha = \xi P_\alpha$, то плоскость ξ будет носителем элемента $\alpha \subset L_1 \cap L_2 \cap L_3$ тогда и только тогда, когда плоскости ξ, ζ_1, ζ_2 и ζ_3 пересекаются в одной точке. Это условие определяет в дуальном пространстве $\mathbf{P}^{3*}$ поверхность V^* степени 4. При этом, вообще говоря, поверхности V и V^* не совпадают, т. е. элементы $\alpha = \langle x, \xi \rangle \in L_1 \cap L_2 \cap L_3$ с центрами на V не являются касательными для этой поверхности, а их плоскости ξ огибают новую поверхность V^*. Каждая кривая $x(u)$ на поверхности V определяет поверхностную полосу, принадлежащую пересечению $L_1 \cap L_2 \cap L_3$, плоскости $\xi(u)$ которой касаются поверхности V^*.

Если поверхность S несёт однопараметрическое семейство линий, каждая из которых определяет поверхностную полосу, принадлежащую пересечению $L_1(v) \cap L_2(v) \cap L_3(v)$, то она допускает семейство преобразований Егорова, зависящее от трёх функций аргумента v. Для каждого из этих преобразований заданное семейство линий будет основанием соответствия. Примеры поверхностей в $\mathbb{R}^3$, допускающих семейство преобразований Егорова, зависящее от трёх функций одного аргумента, приведены в [9]. Проективное преобразование этих поверхностей приведёт нас к новым поверхностям, допускающим проективные преобразования Егорова, зависящие от такого же числа функций.

Конечно, указанные выше примеры не исчерпывают все классы поверхностей, допускающих семейства преобразований Егорова, зависящих от двух и трёх функций одного аргумента. Интересно было бы найти их полное описание.

Литература

[1] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1978.

[2] Беркуцкий В. Я. E-отображения и преобразования Егорова в трёхмерных квазинеевклидовых пространствах // Геометр. сб. — 1981. — Вып. 21. — С. 45—54.

[3] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М., 1967.

[4] Ерохина А. П. О преобразовании Егорова в теории поверхностей // II науч. конф. по мат. и мех. Зап.-Сиб. региона МВ и ССО РСФСР. Тезисы докл. — Томск, 1972. — С. 62.

[5] Щербаков Р. Н. К вопросу об образовании поверхностей линиями // Успехи мат. наук. — 1953. — Т. 8, вып. 2. — С. 147—156. Исправление к статье. — Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 1. — С. 259—261.

[6] Щербаков Р. Н. Преобразования Егорова в теории конгруэнций // III Всесоюзн. мат. съезд. Сб. докл. Т. 1. — М.: 1956. — С. 176—177.

[7] Blaschke W. Über affine Kinematik // Leonhard Euler 250. Geburstag. — Berlin: Akademie, 1959. — S. 42—48.

[8] Bottema O., Veldkamp G. R. Instantane projective und affine Kinematik // Sitzungsber. Osterr. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II 2a. — 1979. — Bd. 188, No. 1-3. — S. 119—141.

[9] Egoroff D. F. Sur les surfacea, engendrees par la distribution des lignes d'une famille donnee // Мат. сб. — 1924. — Т. 31. — С. 153—184.