Метод Картана—Лаптева в теории многомерных три-тканей

М. А. АКИВИС
Псагот, Израиль
e-mail: m.akivis@gmail.com

А. М. ШЕЛЕХОВ
Тверской государственный университет
e-mail: amshelekhov@rambler.ru

УДК 514.763.7

Ключевые слова: многомерная три-ткань, замкнутая G-структура, связность Черна, дифференциально-геометрический объект, координатная лупа, тождество.

Аннотация

Мы показываем, как метод Картана—Лаптева, обобщающий метод внешних форм и подвижного репера Эли Картана, применяется для исследования замкнутых G-структур, определяемых многомерными три-тканями, образованными тремя слоениями размерности r на гладком многообразии размерности $2r$. Тензор, принадлежащий дифференциально-геометрическому объекту порядка s три-ткани, называется замкнутым, если он выражается через компоненты объектов порядка меньше s. Найдены замкнутые тензоры для произвольной три-ткани. Выяснен геометрический смысл одного из соотношений, связывающих тензоры ткани. Доказан ряд утверждений о замкнутых тензорах ткани, с помощью которых найдены достаточные условия замкнутости. Доказано, что G-структура, определяемая многомерной шестиугольной три-тканью, является замкнутой G-структурой класса 4. Показано, что основные тензоры ткани, принадлежащие дифференциально-геометрическому объекту порядка s, выражаются через коэффициенты порядка не выше s канонического разложения уравнений координатной лупы этой ткани и обратно. Отсюда вытекает, что каноническое разложение любой координатной лупы ткани W с замкнутой G-структурой полностью определяется струей некоторого порядка. Также рассмотрены тождества порядка k с одной переменной, выполнение которых в координатных лупах ткани влечёт замкнутость соответствующей G-структуры.

Abstract

M. A. Akivis, A. M. Shelekhov, Cartan—Laptev method in the theory of multidimensional three-webs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 13—38.

We show how the Cartan—Laptev method which generalizes Elie Cartan's method of external forms and moving frames is supplied to the study of closed G-structures defined by multidimensional three-webs formed on a C^s-smooth manifold of dimension $2r$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 3$, by a triple of foliations of codimension r. We say that a tensor T belonging to a differential-geometric object of order s of three-web W is closed if it can be expressed in terms of components of objects of lower order s. We find all closed tensors of a three-web and the geometric sense of one of relations connecting three-web tensors. We also point

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 13—38.

out some sufficient conditions for the web to have a closed G-structure. It follows from our results that the G-structure associated with a hexagonal three-web W is a closed G-structure of class 4. It is proved that basic tensors of a three-web W belonging to a differential-geometric object of order s of the web can be expressed in terms of s-jet of the canonical expansion of its coordinate loop, and conversely. This implies that the canonical expansion of every coordinate loop of a three-web W with closed G-structure of class s is completely defined by an s-jet of this expansion. We also consider webs with one-digit identities of kth order in their coordinate loops and find the conditions for these webs to have the closed G-structure.

Введение

Метод внешних форм и подвижного репера Эли Картана, блестяще использовавшийся им для исследования задач классической дифференциальной геометрии, был усовершенствован во второй половине XX века и применён для исследования дифференциально-геометрических структур самого разного типа. Достижения этого периода мы связываем с именами наших отечественных математиков: С. П. Финикова, Г. Ф. Лаптева, А. М. Васильева, Н. М. Остиану, М. А. Акивиса, Ю. Г. Лумисте и многих других. Перечисленных геометров объединяет стремление описать рассматриваемый объект во всей его общности, как говорят, описать строение дифференциальной окрестности произвольного порядка. Такого рода теории дают возможность получить наиболее глубокие и ценные результаты.

Теория тканей не является исключением. Одна из проблем в этой области связана с понятием *замкнутой G-структуры*, введённым М. Акивисом в 1975 году [3]. По определению G-структура называется замкнутой порядка k, если в определяющей её системе структурных уравнений объекты порядка $k+1$ являются комитантами от объектов предыдущих порядков. Так устроены, например, структурные уравнения Маурера—Картана группы Ли. Поэтому понятие замкнутой G-структуры обобщает понятие группы Ли.

Как оказалось, замкнутой G-структурой обладают многие известные классы многомерных три-тканей: помимо групповых, это ткани Муфанг, Бола и шестиугольные ткани. Доказательство замкнутости последних — весьма сложная теорема, потребовавшая тщательного исследования дифференциальной окрестности пятого порядка (см. [5]).

Здесь уместно сказать об актуальности исследований замкнутых G-структур. Физики первыми заметили, что в их теориях весьма часто возникают группоиды, близкие в том или ином смысле к группам Ли. Иными словами, возникают бинарные операции (функции двух переменных), близкие к ассоциативным. Их инфинитезимальным аналогом являются нелиевы алгебры, близкие к лиевым (например, Ли-допустимые алгебры, см. [24] и работы в журнале «Hadronic Journal» за 1970-е годы).

Аналитические лупы Муфанг, касательная алгебра которых характеризуется тем, что каждые два вектора порождают лиеву подалгебру, исследовал ещё в 1953 году А. И. Мальцев [14].

В семидесятых годах прошлого века появились работы Дж. Холмса и А. Сейгла [22, 23], посвящённые аналитическим структурам, близким к групповым.

Однако вскоре работы в этом направлении прекратились, поскольку выяснилось, что достаточно «просто» устроены лишь аналитические лупы Муфанг, но уже лупы Бола (следующий по сложности класс луп) устроены намного сложнее. Как установил А. И. Мальцев, для луп Муфанг справедлива формула Кэмпбелла—Хаусдорфа, причём коммутатор в ней удовлетворяет некоторому кубическому тождеству (тождество Сейгла). Для луп Бола аналог формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа не найден до сих пор ввиду его необычайной сложности. Дело в том, что касательная алгебра луп Бола определяется двумя операциями, бинарной и тернарной, причём эти операции связаны весьма сложными соотношениями.

Гладкие квазигруппы и разного рода нелиевы алгебры исследовали ученики А. И. Мальцева (Е. Кузьмин, Ф. Кердман и др.), а также М. Акивис, Л. Сабинин, П. Михеев, М. Киккава, математики прибалтийской школы (Я. Лыхмус, Е. Паал), А. Нестеров, И. Баталин (см. [9]). По существу, сюда же можно отнести работы Ю. Кулакова и Г. Михайличенко [10, 11, 15] по созданной ими теории физических структур, хотя эти авторы не использовали терминов «квазигруппа» и «лупа».

Три-ткани являются геометрическим аналогом понятия квазигруппы или лупы. Можно сказать, что три-ткань является геометрической интерпретацией функции двух переменных, а квазигруппа (лупа) — её алгебраической интерпретацией. Мы изучаем ткани современными геометрическими средствами, применяя метод Картана, развитый в работах перечисленных выше российских математиков. Это обстоятельство позволило существенно продвинуться в изучении общей теории и специальных классов тканей и гладких квазигрупп и луп, описать соответствующие инфинитезимальные объекты, провести классификацию и т. п. В частности, удалось понять, какие тождества определяют классы три-тканей (гладких луп) с замкнутой G-структурой. В настоящем работе мы перечисляем основные результаты в этом направлении и указываем метод, которым они были получены.

1. Структурные уравнения многомерной три-ткани

Результаты этого раздела получены М. А. Акивисом в [2] и более подробно изложены в [21].

Определение. Пусть $X - C^s$-гладкое многообразие размерности $2r$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 3$. Говорят, что на X задана три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, если

а) на X заданы три слоения λ_α коразмерности r;

б) в каждой точке p многообразия X три проходящих через неё слоя находятся в общем положении, т. е. касательные пространства к этим слоям попарно трансверсальны.

На три-ткани W можно ввести естественную систему локальных координат. Поскольку слоения λ_α, образующие три-ткань, находятся в общем положении, то можно считать, что окрестность U точки p многообразия X диффеоморфна прямому произведению баз каких-либо двух её слоений, например $U \sim X_1 \times X_2$. Тогда любая точка p из U получает координаты $p(x^i, y^j)$, где x^i и y^j — локальные координаты на базах X_1 и X_2 соответственно (здесь и всюду далее $i, j, k, l, m, \ldots = 1, 2, \ldots, r$). Таким образом, слои первого и второго слоений ткани W задаются в окрестности U уравнениями $x^i = \mathrm{const}$ и $y^i = \mathrm{const}$. Третье слоение ткани W задаётся уравнениями $f^i(x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r) = \mathrm{const}$, или, короче, $f^i(x^j, y^k) = c^i$, где f^i — гладкие функции. Так как слои ткани находятся в общем положении, то в каждой точке области U выполнены условия

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^k}\right) \neq 0. \tag{1.1}$$

Векторнозначную функцию $f^i(x^j, y^k)$ называют *функцией ткани* W, а уравнение

$$z^i = f^i(x^j, y^k), \tag{1.2}$$

или, короче, $z = f(x, y)$, — *уравнением ткани*.

Геометрический смысл уравнения (1.2) состоит в том, что оно связывает параметры x, y и z трёх слоёв ткани, проходящих через точку $p(x^i, y^j)$ области U. С другой стороны, уравнение ткани $z = f(x, y)$ определяет бинарную операцию, которая согласно соотношениям (1.1) определяет квазигруппу. Эта квазигруппа называется *координатной квазигруппой три-ткани*.

Уравнение (1.2) три-ткани определено не однозначно, а с точностью до *локальных диффеоморфизмов* вида

$$\tilde{x} = J_1(x), \quad \tilde{y} = J_2(y), \quad \tilde{z} = J_3(z), \tag{1.3}$$

означающих преобразование локальных координат на базах X_α слоений λ_α.

Но уравнениям (1.3) можно придать и другой смысл. Рассмотрим наряду с тканью $W = (X, \lambda_\alpha)$ три-ткань $\tilde{W} = (\tilde{X}, \tilde{\lambda}_\alpha)$ той же размерности. Обозначим локальные координаты на базах $\tilde{X}_\alpha$ слоений $\tilde{\lambda}_\alpha$ через $\tilde{x}^i$, $\tilde{y}^i$, $\tilde{z}^i$ и запишем уравнение ткани $\tilde{W}$ в виде $\tilde{z}^i = \tilde{f}^i(\tilde{x}^j, \tilde{y}^k)$, или

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{1.4}$$

Тогда уравнения (1.3) задают локально биективные отображения слоений λ_α на $\tilde{\lambda}_\alpha$. Если при этом отображении сохраняется инцидентность, т. е. всякие три слоя ткани W, проходящие через одну точку, переходят в три слоя ткани $\tilde{W}$, также проходящие через одну точку, то функции f и $\tilde{f}$ связаны соотношением

$$\tilde{f}\big(J_1(x), J_2(y)\big) = J_3\big(f(x, y)\big) \tag{1.5}$$

(«образ произведения равен произведению образов»).

Определение. Две три-ткани W и $\tilde{W}$ одинаковой размерности называются *эквивалентными*, если существует тройка $J = (J_1, J_2, J_3)$ локальных диффеоморфизмов $J_\alpha\colon X_\alpha \to \tilde{X}_\alpha$, таких что функции f и $\tilde{f}$ этих тканей связаны условием (1.5).

В теории квазигрупп тройка биекций J_α, удовлетворяющих условию (1.5), называется *изотопией*.

Пусть $\underset{\alpha}{\omega}$, $\alpha = 1, 2, 3,$ — линейные формы со значениями в r-мерном пространстве, которые определены в области U многообразия X и аннулируются на соответствующих слоениях λ_α ткани W. Соответствующие координатные формы обозначим $\underset{\alpha}{\omega}^i$. Так как каждая пара слоений λ_α, λ_β при $\alpha \neq \beta$ находится в общем положении на X, то система форм $\left\{\underset{\alpha}{\omega}, \underset{\beta}{\omega}\right\}$ при $\alpha \neq \beta$ будет независимой. Выберем в качестве базисных формы $\underset{1}{\omega}$ и $\underset{2}{\omega}$. Тогда форма $\underset{3}{\omega}$ будет их линейной комбинацией:

$$\underset{3}{\omega} = A\underset{1}{\omega} + B\underset{2}{\omega},$$

причём $(r \times r)$-матрицы A и B зависят от локальных координат в U. Поскольку эти соотношения разрешимы относительно $\underset{1}{\omega}$ и $\underset{2}{\omega}$, то матрицы A и B невырожденные. При замене локальных координат на базах слоений по формулам (1.3) формы $\underset{\alpha}{\omega}$ умножаются на невырожденные матрицы. Поэтому допустима замена $A\underset{1}{\omega} \to -\underset{1}{\omega}$, $B\underset{2}{\omega} \to -\underset{2}{\omega}$, в результате которой предыдущее уравнение примет симметричный вид:

$$\underset{1}{\omega} + \underset{2}{\omega} + \underset{3}{\omega} = 0. \tag{1.6}$$

Будем считать, что дифференциальное уравнение ткани всегда записывается в виде (1.6). Тогда базисные формы $\underset{\alpha}{\omega}^i$ определены с точностью до преобразований

$$\underset{\alpha}{\tilde{\omega}}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}^j, \quad \det(A^i_j) \neq 0, \tag{1.7}$$

не изменяющих вид уравнений (1.6).

Условие интегрируемости системы форм $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ можно записать в виде

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k. \tag{1.8}$$

Дифференциальное продолжение уравнений (1.8) приводит к уравнениям

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l \tag{1.9}$$

и

$$\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega}^l, \tag{1.10}$$

причём выполняются соотношения

$$b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]}. \tag{1.11}$$

Величины $a = (a^i_{jk})$ и $b = (b^i_{jkl})$ образуют тензоры относительно группы $\mathrm{GL}(r)$ допустимых преобразований адаптированных реперов три-ткани W. Они называются соответственно *тензором кручения* и *тензором кривизны* три-ткани W. Тензорные поля кручения и кривизны однозначно определяют три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$.

В терминах тензорных полей кручения и кривизны характеризуют основные классы три-тканей с замкнутой G-структурой.

Параллелизуемые три-ткани: $a = 0$ и $b = 0$.

Групповые три-ткани: $b = 0$.

Три-ткани Муфанг: $b^i_{jkl} = b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]}$.

Три-ткани Бола: $b^i_{j(kl)} = 0$ (либо $b^i_{(jk)l} = 0$, либо $b^i_{(j|k|l)} = 0$).

Шестиугольные три-ткани: $b^i_{(jkl)} = 0$.

2. Строение дифференциально-геометрического объекта произвольного порядка три-ткани

Результаты следующих разделов изложены в [18].

1. Дифференциально-геометрический объект порядка $s+2$ три-ткани W содержит 2^{s-1} тензоров типа $\binom{1}{s+2}$ — ковариантных производных порядка $s-1$ тензора кривизны b^i_{jkl}. Как сейчас будет показано, s из этих тензоров независимые. Будем называть их *основными тензорами*.

В дальнейшем будет удобно пользоваться обозначением $b^i_{jkl} \equiv c^i_{jkr+l}$. В соответствии с этим обозначением при записи ковариантных производных тензора кривизны на третьей позиции снизу вместо индекса l будем писать $r+l$, например: $c^i_{jkr+lj_1}$.

В новых обозначениях дифференцирование уравнений (1.9) приводит к равенствам

$$\nabla c^i_{jkr+j_1} = c^i_{jkr+j_1j_2}\underset{1}{\omega}^{j_2} + c^i_{jkr+j_1r+j_2}\underset{2}{\omega}^{j_2}, \tag{2.1}$$

где

$$c^i_{j[k|r+j_1|j_2]} = c^i_{jmr+j_1}a^m_{kj_2}, \tag{2.2}$$

$$c^i_{jk[r+j_1r+j_2]} = -c^i_{jkr+m}a^m_{j_1j_2}, \tag{2.3}$$

$$c^i_{[jk]r+j_1j_2} - c^i_{[j|j_2r+|k]r+j_1} = B^i_{jkr+j_2r+j_1} \tag{2.4}$$

и

$$B^i_{jkr+j_2r+j_1} = a^m_{jk}c^i_{mj_2r+j_1} - a^i_{jm}c^m_{kj_2r+j_1} - a^i_{mk}c^m_{jj_2r+j_1}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Тензоры*

$$c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}j_s},\ c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}r+j_s}, \dots,\ c^i_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_s} \tag{2.6}$$

являются основными тензорами дифференциальной окрестности порядка $s+2$ три-ткани W.

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, содержащую рассматриваемые тензоры:

$$
\begin{aligned}
&\nabla c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-2}j_{s-1}} = c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-1}j_s}\underset{1}{\omega}^{j_s} + c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-1}r+j_s}\underset{2}{\omega}^{j_s},\\
&\nabla c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-2}r+j_{s-1}} = c^i_{jkr+j_1j_2\ldots r+j_{s-1}j_s}\underset{1}{\omega}^{j_s} + c^i_{jkr+j_1j_2\ldots r+j_{s-1}r+j_s}\underset{2}{\omega}^{j_s},\\
&\quad\ldots\\
&\nabla c^i_{jkr+j_1r+j_2\ldots r+j_{s-1}} = c^i_{jkr+j_1r+j_2\ldots r+j_{s-1}j_s}\underset{1}{\omega}^{j_s} + c^i_{jkr+j_1\ldots r+j_s}\underset{2}{\omega}^{j_s}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим

$$
\begin{aligned}
&\nabla c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_s}\wedge\underset{1}{\omega}^{j_s} + \nabla c^i_{jkr+j_1j_2\ldots r+j_s}\wedge\underset{2}{\omega}^{j_s} =\\
&\quad = B^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_sj_{s+1}}\underset{1}{\omega}^{j_s}\wedge\underset{2}{\omega}^{j_{s+1}} - c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-1}m}a^m_{j_sj_{s+1}}\underset{1}{\omega}^{j_s}\wedge\underset{1}{\omega}^{j_{s+1}} +\\
&\quad + c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-1}r+m}a^m_{j_sj_{s+1}}\underset{2}{\omega}^{j_s}\wedge\underset{2}{\omega}^{j_{s+1}},\\
&\quad\ldots\\
&\nabla c^i_{jkr+j_1r+j_2\ldots r+j_{s-1}j_s}\wedge\underset{1}{\omega}^{j_s} + \nabla c^i_{jkr+j_1r+j_2\ldots r+j_s}\wedge\underset{2}{\omega}^{j_s} =\\
&\quad = B^i_{jkr+j_1\ldots r+j_{s-1}j_sj_{s+1}}\underset{1}{\omega}^{j_s}\wedge\underset{2}{\omega}^{j_{s+1}} - c^i_{jkr+j_1\ldots r+j_{s-1}m}a^m_{j_sj_{s+1}}\underset{1}{\omega}^{j_s}\wedge\underset{1}{\omega}^{j_{s+1}} +\\
&\quad + c^i_{jkr+j_1\ldots r+j_{s-1}r+m}a^m_{j_sj_{s+1}}\underset{2}{\omega}^{j_s}\wedge\underset{2}{\omega}^{j_{s+1}},
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где

$$
\begin{aligned}
B^i_{jkr+j_1\ldots r+j_uj_{u+1}\ldots j_sj_{s+1}} &= c^m_{jkr+j_1\ldots r+j_uj_{u+1}\ldots j_{s-1}}c^i_{mj_sr+j_{s+1}} -\\
&- c^i_{mkr+j_1\ldots r+j_uj_{u+1}\ldots j_{s-1}}c^m_{kj_sr+j_{s+1}} - \ldots -\\
&- c^i_{jkr+j_1\ldots r+j_uj_{u+1}\ldots j_{s-2}m}c^m_{j_{s-1}j_sr+j_{s+1}}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Полагая в уравнениях (2.8)

$$
\begin{aligned}
&\nabla c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_s} = c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_sj_{s+1}}\underset{1}{\omega}^{j_{s+1}} + c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_sr+j_{s+1}}\underset{2}{\omega}^{j_{s+1}},\\
&\nabla c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-1}r+j_s} =\\
&\quad = c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-1}r+j_sj_{s+1}}\underset{1}{\omega}^{j_{s+1}} + c^i_{jkr+j_1j_2\ldots j_{s-1}r+j_sr+j_{s+1}}\underset{2}{\omega}^{j_{s+1}},\\
&\quad\ldots\\
&\nabla c^i_{jkr+j_1r+j_2\ldots r+j_s} = c^i_{jkr+j_1j_2\ldots r+j_sj_{s+1}}\underset{1}{\omega}^{j_{s+1}} + c^i_{jkr+j_1\ldots r+j_{s+1}}\underset{2}{\omega}^{j_{s+1}},
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

получим соотношения двух типов:

$$
\begin{aligned}
&c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}[j_sj_{s+1}]} = c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}m}a^m_{j_sj_{s+1}},\\
&c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}[r+j_sr+j_{s+1}]} = -c^i_{jkr+j_1j_2\dots r+j_{s-1}r+m}a^m_{j_sj_{s+1}},\\
&\quad\dots\\
&c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_ur+j_{u+1}\dots[r+j_sr+j_{s+1}]} = -c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_ur+j_{u+1}\dots r+j_{s-1}m}a^m_{j_sj_{s+1}},\\
&\quad\dots\\
&c^i_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}[r+j_sr+j_{s+1}]} = -c^i_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}m}a^m_{j_sj_{s+1}}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&-c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_sr+j_{s+1}} + c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_{s-1}r+j_{s+1}j_s} = B^i_{jkr+j_1j_2\dots j_sj_{s+1}},\\
&-c^i_{jkr+j_1r+j_2\dots j_sr+j_{s+1}} + c^i_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_{s+1}j_s} = B^i_{jkr+j_1r+j_2j_3\dots j_sj_{s+1}},\\
&-c^i_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_uj_{u+1}\dots j_sr+j_{s+1}} + c^i_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_uj_{u+1}\dots r+j_{s+1}j_s} =\\
&\quad = B^i_{jkr+j_1r+j_2\dots r+j_uj_{u+1}\dots j_{s+1}},\\
&\quad\dots\\
&-c^i_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}j_sr+j_{s+1}} + c^i_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}r+j_{s+1}j_s} = B^i_{jkr+j_1\dots r+j_{s-1}j_sj_{s+1}}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Доказательство проведём индукцией по s. Базу индукции составляют соотношения, полученные при дифференцировании равенств (2.1).

Предположим теперь, что тензоры (2.6) являются основными, и докажем, что в следующей дифференциальной окрестности основными будут тензоры

$$
c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_sj_{s+1}},\ c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_sr+j_{s+1}},\dots,\ c^i_{jkr+j_1\dots r+j_{s+1}}.
\tag{2.13}
$$

Сначала заметим, что каждый тензор типа $\binom{1}{s+3}$ является ковариантной производной некоторого тензора типа $\binom{1}{s+2}$, причём тензор T типа $\binom{1}{s+2}$ порождает два тензора: $T_j = \nabla_j T$ и $T_{r+j} = \nabla_{r+j} T$. По предположению индукции тензор T выражается через основные тензоры, а так как производные по $\underset{2}{\omega}{}^s$ от основных тензоров также будут основными тензорами, то через основные тензоры выражается и тензор T_{r+j}.

Рассмотрим теперь тензоры вида T_j. Среди них только один, а именно тензор $c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_{s+1}}$ является основным, остальные содержат хотя бы один индекс $r+j_u$, стоящий не на последнем месте, и, следовательно, основными не являются. Но так как тензор T выражается через основные тензоры, то тензор T_j выражается через их производные вида $c^i_{jkr+j_1j_2\dots j_ur+j_{u+1}\dots r+j_sj_{1+s}}$. Эти тензоры, в свою очередь, с помощью соотношений (2.8) выражаются через тензоры типа T_{r+j}, а поскольку последние, как уже было показано, выражаются через основные тензоры, то через них выражаются и тензоры T_j. □

Итак, дифференциально-геометрический объект порядка $s+3$ три-ткани W содержит s основных тензоров типа $\binom{1}{s+3}$, которые удовлетворяют соотношениям (2.11) и соотношениям, получающимся при ковариантном дифференцировании таких же равенств, но связанных с дифференциальными окрестностями более низкого порядка. Тензоры, входящие в дифференциально-геометрический объект порядка $s+3$, выражаются через основные с помощью соотношений (2.12) и им аналогичных, которые получаются при дифференцировании таких же соотношений, но связанных с дифференциальными окрестностями более низкого порядка.

2. Как видно из соотношений (1.11), (2.2)—(2.4), (2.11) и т. п., некоторые альтернации тензоров ткани выражаются через тензоры меньшей валентности. Этот факт приводит нас к следующему определению: будем говорить, что тензор T, принадлежащий дифференциально-геометрическому объекту порядка s три-ткани W, является *замкнутым*, если он выражается через компоненты объектов порядка меньше s.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$\underset{\alpha\beta}{T} \overset{\mathrm{def}}{=} \left(c^i_{jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_\alpha r+k_2\ldots r+k_\beta}\right) -$$

основной тензор типа $\binom{1}{1+\alpha+\beta}$. *Тогда его альтернация по любой паре индексов из набора* $j_1, j_2, \ldots, j_\alpha$ *или по любой паре индексов из набора* $k_1, k_2, \ldots, k_\beta$ *является замкнутой.*

Доказательство.

1. Для $\beta = 1$ и любого α из соотношений (2.2)—(2.11) следует, что альтернации тензоров типа $\binom{1}{1+\alpha+1}$ по каждой паре соседних индексов из набора $j_1, j_2, \ldots, j_\alpha$ являются замкнутыми. Отсюда вытекает замкнутость альтернаций тех же тензоров и по любой паре указанных индексов.

2. При $\beta = 2$ и $\alpha = 1$ справедливость леммы вытекает из (2.3). Предположим, что лемма справедлива при $\beta = 2$ и $\alpha = s$, и докажем, что она имеет место при $\beta = 2$ и $\alpha = s + 1$. По формуле (2.12) получаем

$$c^i_{jj_1[r+k_1|j_2\ldots j_{s+1}|r+k_2]} = c^i_{jj_1[r+k_1|j_2\ldots j_s|r+k_2]j_{s+1}} - B^i_{jj_1[k_1|j_2\ldots j_{s+1}|k_2]}. \tag{2.14}$$

По предположению индукции тензор $c^i_{jj_1[r+k_1|j_2\ldots j_s|r+k_2],j_{s+1}}$ является замкнутым. Так как

$$c^i_{jj_1[r+k_1|j_2\ldots j_s|r+k_2]j_{s+1}} = c^i_{jj_1[r+k_1|j_2\ldots j_s|r+k_2],j_{s+1}}$$

(в правой части индекс, отделённый запятой, обозначает соответствующую ковариантную производную), то замкнутым будет и тензор $c^i_{jj_1[r+k_1|j_2\ldots j_s|r+k_2]j_{s+1}}$. Кроме того, из (2.9) следует, что тензор $B^i_{jj_1[k_1|j_2\ldots j_{s+1}|k_2]}$ также является замкнутым. Следовательно, вся правая часть в (2.14) выражается через тензоры меньшей валентности, что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим теперь тензор $\underset{\alpha\beta}{T}$ типа $\binom{1}{1+\alpha+\beta}$, где $\beta > 2$. Так как

$$c^i_{jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_\alpha r+k_2\ldots r+k_\beta} = c^i_{jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_\alpha, r+k_2\ldots r+k_\beta},$$

то согласно п. 1 альтернации тензора $\underset{\alpha\beta}{T}$ по любой паре индексов $j_1, j_2, \ldots, j_\alpha$ замкнуты. Так как

$$c^i_{jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_\alpha r+k_2\ldots r+k_\beta} = c^i_{jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_\alpha r+k_2, r+k_3\ldots r+k_\beta},$$

то согласно п. 2 альтернация тензора $\underset{\alpha\beta}{T}$ по индексам k_1, k_2 также является замкнутой. Поскольку

$$c^i_{jj_1r+k_1j_2\dots j_\alpha r+k_2\dots r+k_\beta} = c^i_{jj_1r+k_1j_2\dots j_\alpha r+k_2r+k_3,r+k_4\dots r+k_\beta},$$

то в силу второго соотношения в (2.11) альтернация тензора $\underset{\alpha\beta}{T}$ по индексам k_2, k_3 будет замкнутой. Точно так же с помощью первого соотношения в (2.11) доказывается, что замкнуты альтернации тензора $\underset{\alpha\beta}{T}$ по любой паре соседних индексов из набора $k_2, k_3, \dots, k_\beta$, а отсюда вытекает, что замкнуты его альтернации и по любой паре индексов из этого набора. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2.2. *Тензоры вида*

$$-c^i_{jkr+lt_1\dots t_upr+qt_{u+1}\dots t_s} + c^i_{jkr+lt_1\dots t_ur+qpt_{u+1}\dots t_s},$$

где индексы $t_1, t_2, \dots, t_s$ *могут принимать значения* $j_1, j_2, \dots, j_\alpha, r+k_1, \dots, r+k_\beta$, *являются замкнутыми.*

Альтернированные части основных тензоров связаны ещё соотношениями, которые получаются при дифференцировании соотношений (2.4). Дифференцируя, например, по первой серии переменных, получим

$$c^i_{[jk]j_1lj_2\dots j_s} - c^i_{[j|l|k]r+j_1j_2\dots j_s} = B^i_{jklj_1j_2\dots j_s}. \tag{2.15}$$

Согласно лемме 2.2 индекс $r+j_1$ в тензоре $c^i_{[j|l|k]r+j_1j_2\dots j_s}$ можно последовательно менять с соседними $j_2, j_3, \dots, j_s$, добавляя при каждой транспозиции соответствующие слагаемые в правую часть равенства (2.15). В результате оно примет вид

$$c^i_{[jk]j_1lj_2\dots j_s} - c^i_{[j|l|k]j_2\dots j_sr+j_1} = \tilde{B}^i_{jklj_1j_2\dots j_s}. \tag{2.16}$$

При этом добавляемые слагаемые, как и тензор $B^i_{jklj_1j_2\dots j_s}$, являются замкнутыми, так что замкнутым будет и тензор $\tilde{B}^i_{jklj_1j_2\dots j_s}$. Аналогичными рассуждениями из (2.4) выведем равенства

$$c^i_{[jk]j_1lj_2\dots j_ur+j_{u+1}\dots r+j_s} - c^i_{[j|l|k]j_2\dots j_ur+j_1r+j_{u+1}\dots r+j_s} = \tilde{B}^i_{jklj_1\dots r+j_s}, \tag{2.17}$$

где правые части являются замкнутыми тензорами. Можно доказать, что последние соотношения вместе с теми, которые приведены в лемме 2.1, — это единственные соотношения, связывающие основные тензоры три-ткани.

3. Итак, как только что было показано, некоторые из альтернаций основных тензоров три-ткани являются замкнутыми, т. е. их можно выразить через тензоры, принадлежащие дифференциальной окрестности меньшего порядка. Оказывается, что формулы, реализующие такое разложение, имеют определённый геометрический смысл. Продемонстрируем это на примере одной из альтернаций.

Следующие два утверждения впервые доказаны в [16].

Лемма 2.3. *Имеет место формула*

$$c^i_{j_1j_2[r+l|j_3\dots j_{s-1}|r+j_s]} = -c^i_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}}a^m_{lj_s} - \\ - \sum_{\Lambda(u,v,s-1)} c^k_{ju+1j_{\lambda_{u+2}}|r+l|j_{\lambda_{u+3}}\dots j_{\lambda_v}} c^i_{j_1j_2|r+j_s|j_3\dots j_u k j_{\lambda_{v+1}}\dots j_{\lambda_{s-1}}}. \qquad (2.18)$$

Мы используем способ записи суммы, предложенный в [12].

Здесь

$$0 \leqslant u+1 < v < s-1, \quad \lambda_{u+2} < \ldots < \lambda_v, \quad \lambda_{v+2} < \ldots < \lambda_{s-1} \qquad (2.19)$$

и $\Lambda(u,v,s-1)$ — множество перестановок, удовлетворяющих неравенствам (2.15), которые можно составить из чисел $u+2,\dots,s-1$. Выделенные индексы $r+l$ и $r+j_s$ стоят на третьем месте независимо от u, и по ним проведена альтернация. Доказательство проводится индукцией по числу нижних индексов. Оно довольно громоздко, и поэтому мы его здесь не приводим.

Геометрический смысл формулы (2.14) проясняется в следующей теореме.

Теорема 2.2. *Пусть* $*\overline{H^p}(\lambda_1)$ — *главное расслоённое пространство неголономных* p*-кореперов над базой* λ_1 *первого слоения три-ткани* W*. Тогда формы*

$$\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1} = \omega^i{}_j,\ \underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2},\dots,\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2\dots j_s},$$

где

$$\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2\dots j_s} = c^i_{j_1j_2r+mj_3\dots j_s}\underset{2}{\omega}{}^m, \quad s=2,3,\dots,p, \qquad (2.20)$$

задают в $*\overline{H^p}(\lambda_1)$ *некоторое подрасслоение.*

(Определение неголономных p-кореперов можно найти, например, в [8].)

Доказательство. Запишем уравнения структуры (1.8) и (1.9) три-ткани W в виде

$$d\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \theta^i_j, \quad d\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1} = \underset{1}{\omega}{}^k{}_{j_1} \wedge \omega^i_k + \underset{1}{\omega}{}^{j_2} \wedge \underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2}, \qquad (2.21)$$

где $\theta^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k$ и

$$\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2} = c^i_{j_1j_2r+m}\underset{2}{\omega}{}^m. \qquad (2.22)$$

Мы хотим найти уравнения, которым удовлетворяют формы $\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2}$, $\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2j_3}$ и т. д., определённые равенствами (2.16). Продифференцируем эти равенства и воспользуемся уравнениями (2.10) и определением оператора ∇. В результате получим

$$d\underset{1}{\omega}{}^i{}_{j_1j_2\dots j_{s-1}} = \Big(c^i_{j_1j_2r+mj_3\dots j_s}\underset{1}{\omega}{}^{j_s} + c^i_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}r+j_s}\underset{2}{\omega}{}^{j_s} - \\ - c^k_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}}\omega^i_k + c^i_{kj_2r+mj_3\dots j_{s-1}}\underset{1}{\omega}{}^k{}_{j_1} + c^i_{j_1kr+mj_3\dots j_{s-1}}\omega^k_{j_2} + \\ + \underline{c^i_{j_1j_2r+kj_3\dots j_{s-1}}\omega^k_m} + \ldots + c^i_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-2}k}\omega^k_{j_{s-1}}\Big) \wedge \underset{2}{\omega}{}^m + \\ + c^i_{j_1j_2r+mj_3\dots j_{s-1}}\Big(\underline{\underset{2}{\omega}{}^k \wedge \omega^m_k} - a^m_{j_sl}\underset{2}{\omega}{}^{j_s} \wedge \underset{2}{\omega}{}^l\Big).$$

Подчёркнутые слагаемые уничтожаются. Раскрывая скобки и используя обозначения (2.20), получаем

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_{s-1}} = &-\underset{1}{\omega}^{j_s} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_s} - \underset{1}{\omega}^{i}{}_{k} \wedge \omega^{k}_{j_1 j_2 \ldots j_{s-1}} + \\ &+ \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_1} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{k j_2 \ldots j_{s-1}} + \ldots + \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_{s-1}} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_{s-2} k} + \\ &+ \big(-c^{i}_{j_1 j_2 |r+l| j_3 \ldots r+j_s} - c^{i}_{j_1 j_2 r+m j_3 \ldots j_{s-1}} a^{m}_{l j_s}\big) \underset{2}{\omega}^{l} \wedge \underset{2}{\omega}^{j_s}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Согласно формуле (2.18) последняя сумма преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\big(-c^{i}_{j_1 j_2 |r+l| j_3 \ldots r+j_s} - c^{i}_{j_1 j_2 r+m j_3 \ldots j_{s-1}} a^{m}_{l j_s}\big) \underset{2}{\omega}^{l} \wedge \underset{2}{\omega}^{j_s} = \\ &= \sum_{\Lambda(u,v,s-1)} c^{k}_{j_{u+1} j_{\lambda_{u+2}} |r+l| j_{\lambda_{u+3}} \cdots j_{\lambda_v}} c^{i}_{j_1 j_2 |r+j_s| j_3 \ldots j_u k j_{\lambda_{v+1}} \cdots j_{\lambda_{s-1}}} \underset{2}{\omega}^{l} \wedge \underset{2}{\omega}^{j_s} = \\ &= \sum_{\Lambda(u,v,s-1)} \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_{u+1} j_{\lambda_{u+2}} j_{\lambda_{u+3}} \cdots j_{\lambda_v}} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_u k j_{\lambda_{v+1}} \cdots j_{\lambda_{v+1}} \cdots j_{\lambda_{s-1}}}. \end{aligned}$$

Напомним, что в этой сумме $u+1 < v < s-1$. Слагаемые такого же типа, но при $v = u+1$, имеют вид

$$\begin{aligned} &\sum_{u} \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_{u+1}} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_u k j_{\lambda_{u+2}} \cdots j_{\lambda_{s-1}}} = \\ &\qquad = \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_1} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{k j_2 \ldots j_{s-1}} + \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_2} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 k \ldots j_{s-1}} + \ldots + \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_{s-1}} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 \ldots j_{s-2} k}. \end{aligned}$$

При $v = s-1$ аналогичные слагаемые имеют вид

$$\underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_1 j_2 \ldots j_{s-1}} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{k} = -\underset{1}{\omega}^{i}{}_{k} \wedge \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_1 j_2 \ldots j_{s-1}}.$$

Поэтому формулу (2.23) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_{s-1}} = &\sum_{\Lambda(u,v,s-1)} \underset{1}{\omega}^{j_s} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_s} + \\ &+ \sum_{\Lambda(u,v,s-1)} \underset{1}{\omega}^{k}{}_{j_{u+1} j_{\lambda_{u+2}} \cdots j_{\lambda_v}} \wedge \underset{1}{\omega}^{i}{}_{j_1 j_2 \ldots j_u k j_{\lambda_{v+1}} \cdots j_{\lambda_{s-1}}}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где u, v и s удовлетворяют уже соотношениям $0 \leqslant u < v \leqslant s-1$. Уравнения (2.24) в точности совпадают с уравнениями главного расслоённого пространства $*\overline{H^p}(\lambda_1)$ неголономных кореперов над многообразием λ_1, базисными формами которого будут формы $\underset{1}{\omega}^{i}$ (см. [13]).

Аналогичным образом доказывается, что формы

$$\underset{2}{\omega}^{i}{}_{j_1 \ldots j_s} = c^{i}_{j_1 m r+j_2 r+j_3 \ldots r+j_s} \underset{1}{\omega}^{m}$$

определяют подрасслоение главного расслоения $*\overline{H^p}(\lambda_2)$ неголономных p-кореперов над многообразием λ_2 — базой второго слоения три-ткани W. $\square$

4. В заключение выясним геометрический смысл обращения в нуль тензоров $B^i_{jklj_1}, B^i_{jklj_1j_2}, \ldots$, общий вид которых определяется формулой (2.9). Эти тензоры удобно рассматривать как препятствия. А именно, имеет место следующее утверждение: тензорное поле $T = (c^i_{jklr+j_1\ldots r+j_u j_{u+1}\ldots j_{s-1}})$ является параллельным в связности Черна только тогда, когда

$$B^i_{jklr+j_1\ldots r+j_u j_{u+1}\ldots j_s j_{s+1}} = 0. \tag{2.25}$$

Действительно, если указанное поле параллельно, то вполне интегрируемо уравнение $\nabla T = 0$. Дифференцируя его внешним образом, придём к условиям (2.25).

3. Леммы о замкнутых тензорах

С помощью формул, полученных в предыдущем разделе, доказывается следующая важная теорема.

Теорема 3.1. *G-структура шестиугольной три-ткани W, заданной на многообразии размерности $2r$ при $r > 1$, является замкнутой G-структурой класса 4.*

Впервые этот результат получен в [16] путём нахождения всех замкнутых тензоров в дифференциальной окрестности пятого порядка. Наиболее прозрачное доказательство было дано в [25].

Напомним, что шестиугольные ткани характеризуются условием $b^i_{(jkl)} = 0$.

Стремление обобщить теорему 3.1 естественно приводит к гипотезе о том, что обращение в нуль некоторых симметричных компонент дифференциально-геометрического объекта порядка p ткани W влечёт замкнутость определяемой этой тканью G-структуры. Как будет показано в разделе 4, эта гипотеза имеет положительное решение, однако, чтобы его получить, необходимо доказать несколько вспомогательных утверждений.

Начнём с замечания, которое неоднократно будет использоваться в дальнейшем. Обозначим через $\underset{\alpha\beta}{T}_{(ij)}$ и $\underset{\alpha\beta}{T}_{[ij]}$ тензоры, полученные из тензора $\underset{\alpha\beta}{T}$ симметрированием или альтернированием по i-му и j-му индексам (напоминаем, что обозначение $\underset{\alpha\beta}{T}$ введено в лемме 2.1). Предположим, что $\alpha > 1$ и $\beta > 1$. Тогда из (2.17) вытекает, что если один из тензоров $\underset{\alpha\beta}{T}_{[12]}$ или $\underset{\alpha-1,\beta+1}{T}_{[13]}$ замкнут, то замкнут и другой. В частности, из замкнутости тензора $\underset{\alpha\beta}{T}$ вытекает замкнутость тензора $\underset{\alpha-1,\beta+1}{T}_{[13]}$, а из замкнутости тензора $\underset{\alpha-1,\beta+1}{T}$ — замкнутость тензора $\underset{\alpha\beta}{T}_{[12]}$.

Наряду с тензорами $\underset{\alpha\beta}{T}$ будем рассматривать и определяемые ими формы $\underset{\alpha\beta}{X}$:

$$\underset{\alpha\beta}{X}_{a_1a_2\ldots a_{\alpha+\beta+1}} \equiv c^i_{jj_1r+k_1j_2\ldots j_{\alpha} r+k_2\ldots r+k_\beta}\, y_i x^j_{a_1} x^{j_1}_{a_2} \ldots x^{k_\beta}_{a_{\alpha+\beta+1}}, \tag{3.1}$$

где индексы $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\alpha+\beta+1}$ могут принимать значения от 1 до $\alpha+\beta+1$. В силу леммы 2.1 альтернации величин $\underset{\alpha\beta}{X}$ по любой паре индексов из набора

$a_2, a_4, \ldots, a_{\alpha+2}$ и любой паре индексов из набора $a_3, a_{\alpha+3}, \ldots, a_{\alpha+\beta+1}$ являются замкнутыми, т. е. выражаются через формы, которые определяются тензорами, принадлежащими дифференциально-геометрическим объектам меньших порядков.

Лемма 3.1. *Если тензор*

$$c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2 \ldots j_{\alpha-2}) j_{\alpha-1} j_\alpha r+k_2 \ldots r+k_\beta} \tag{3.2}$$

замкнут, то замкнут и тензор $\underset{\alpha\beta}{T}_{(13)}$.

Доказательство. Из замкнутости тензора (3.2) вытекает замкнутость величин $\underset{\alpha\beta}{X}_{(a_1 a_2 \ldots a_\alpha) a_{\alpha+1} \ldots a_{\alpha+\beta+1}}$, т. е. имеют место уравнения вида

$$\underset{\alpha\beta}{X}_{(a_1 a_2 \ldots a_\alpha) a_{\alpha+1} \ldots a_{\alpha+\beta+1}} = \ldots, \tag{3.3}$$

где правые части представляют собой комитанты от форм меньшей степени (с меньшим числом индексов). Мы хотим доказать, что замкнуты величины $\underset{\alpha\beta}{T}_{(13)}$, т. е. выполняются соотношения

$$\underset{\alpha\beta}{X}_{(a_1 | a_2 | a_3) \ldots a_{\alpha+\beta+1}} = \ldots, \tag{3.4}$$

где правые части также являются комитантами от форм меньшей степени.

Сделаем важное замечание, позволяющее существенно упростить доказательство как этой леммы, так и последующих. Поскольку нас не интересует, что именно входит в правые части равенств (3.3) и (3.4), то для доказательства достаточно рассмотреть однородную систему

$$\underset{\alpha\beta}{X}_{(a_1 a_2 \ldots a_\alpha) a_{\alpha+1} \ldots a_{\alpha+\beta+1}} = 0, \tag{3.5}$$

присоединённую к системе (3.3), и доказать, что из неё вытекают равенства

$$\underset{\alpha\beta}{X}_{(a_1 | a_2 | a_3) \ldots a_{\alpha+\beta+1}} = 0. \tag{3.6}$$

При этом величины $\underset{\alpha\beta}{X}_{a_1 a_2 \ldots a_{\alpha+\beta+1}} = \ldots$, входящие в систему (3.5), согласно лемме 2.1 следует считать симметричными по индексам $a_2, a_4, \ldots, a_{\alpha+2}$ и по индексам $a_3, a_{\alpha+3}, \ldots, a_{\alpha+\beta+1}$.

Указанная симметрия даёт возможность, в частности, использовать обозначение

$$\underset{\alpha\beta}{X}_{a_1 a_2 \ldots a_{\alpha+\beta+1}} \equiv \underset{\alpha\beta}{Y}_{a_1 a_2 a_{\alpha+3} \ldots a_{\alpha+\beta+1}}. \tag{3.7}$$

Тогда соотношения (3.5) запишутся в виде

$$\sum_{(i,j) \in \Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_i a_j) a_{\alpha+3} \ldots a_{\alpha+\beta+1}} = 0, \tag{3.8}$$

где $\Lambda_{\alpha+1} = \{1, 2, \ldots, \alpha, \widehat{\alpha+1}\}$ и «шапочка» над $\alpha+1$ означает, что индекс $\alpha+1$ пропускается. Для разных наборов индексов получим $\alpha+1$ соотношений (переставляя «шапочку» влево):

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda_a} \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_i a_j) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0, \tag{3.9}$$

где $\Lambda_a = \{1, 2, \dots, \hat{a}, \dots, \alpha+1\}$. Сложив все эти равенства, получим

$$(\alpha - 1) \sum_{(i,j)\in\Lambda} \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_i a_j) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0,$$

где $\Lambda = \{1, 2, \dots, \alpha+1\}$. Деля на $\alpha - 1$ и вычитая (3.8), получаем

$$\sum_{i\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_i a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0. \tag{3.10}$$

Заменим в этих равенствах индекс α на $\alpha + 2$. Получим

$$\sum_{i\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_i a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0,$$

где $\Lambda_{\alpha+1} = \{1, 2, \dots, \alpha-1, \alpha+2, \alpha+1\}$. Сравнивая с (3.10), находим, что

$$\underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_\alpha a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_{\alpha+2} a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}}.$$

Полученные соотношения означают, что величины $Y_{(a_1 a_3) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}}$, определяемые (3.7), равны, если они отличаются только первым индексом. Следовательно,

$$\underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_1 a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_2 a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = \dots = \underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_\alpha a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}},$$

т. е. слагаемые в сумме (3.10) равны. Поэтому они все равны нулю:

$$\underset{\alpha\beta}{Y}_{(a_1 a_{\alpha+1}) a_{\alpha+3}\dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0.$$

Тогда в силу обозначений (3.7) $\underset{\alpha\beta}{X}_{(a_1|a_2|a_3)\dots a_{\alpha+\beta+1}} = 0$, т. е. тензор $\underset{\alpha\beta}{T}_{(13)}$ будет замкнутым. $\square$

Следствие. *Если вместе с тензором* (3.2) *замкнут и тензор* $\underset{\alpha\beta}{T}_{[13]}$, *то будет замкнутым и тензор* $\underset{\alpha\beta}{T}$.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 3.2. *Если замкнут тензор*

$$c^i_{(jj_1 r+k_1|j_2\dots r+k_{\beta-2})r+k_{\beta-1} r+k_\beta}, \tag{3.11}$$

то будет замкнут и тензор $\underset{\alpha\beta}{T}_{(12)}$.

Следствие. *Если вместе с тензором* (3.11) *замкнут и тензор* $\underset{\alpha\beta}{T}_{[12]}$, *то будет замкнут и тензор* $\underset{\alpha\beta}{T}$.

Лемма 3.3. *Если замкнуты тензоры*

$$c^i_{(jj_1r+k_1j_2\dots j_{\alpha-2})j_{\alpha-1}j_\alpha}, \quad c^i_{(jj_1r+k_1j_2\dots j_{\alpha-2})j_{\alpha-1}r+k_2}, \tag{3.12}$$

то замкнуты и тензоры $\underset{\alpha1}{T}$ *и* $\underset{\alpha-1,2}{T}{}_{[13]}$.

Доказательство. Обозначим, как и раньше (см. (3.1)), формы, соответствующие тензорам $\underset{\alpha1}{T}$ и $\underset{\alpha-1,2}{T}$, через $\underset{\alpha1}{X}$ и $\underset{\alpha-1,2}{X}$. Тогда присоединённые однородные уравнения в силу (3.12) имеют вид

$$\underset{\alpha1}{X}{}_{(a_1\dots a_\alpha)a_{\alpha+1}a_{\alpha+2}} = 0, \quad \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{(a_1\dots a_\alpha)a_{\alpha+1}a_{\alpha+2}} = 0. \tag{3.13}$$

Кроме того, из соотношений (2.17) получим ещё серию равенств на величины $\underset{\alpha1}{X}$ и $\underset{\alpha-1,2}{X}$:

$$\underset{1}{X}{}_{a_1a_2\dots a_{\alpha+2}} - \underset{\alpha1}{X}{}_{a_2a_1a_3\dots a_{\alpha+2}} = \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_1a_4a_2a_5\dots a_{\alpha+2}a_3} - \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_2a_4a_1a_5\dots a_{\alpha+2}a_3}, \tag{3.14}$$

а ковариантное дифференцирование равенств (1.11) приведёт к соотношениям

$$\underset{\alpha1}{X}{}_{[a_1a_2a_3]a_4\dots a_{\alpha+2}} = 0. \tag{3.15}$$

По лемме 3.1 из замкнутости первого из тензоров (3.12) вытекает замкнутость тензора $\underset{\alpha1}{T}{}_{(13)}$, так что величины $\underset{\alpha1}{X}$, входящие в присоединённую однородную систему, кососимметричны по первому и третьему индексам. Поэтому равенство (3.15) примет вид

$$\underset{\alpha1}{X}{}_{a_1a_2a_3\dots a_{\alpha+2}} + \underset{\alpha1}{X}{}_{a_2a_3a_1a_4\dots a_{\alpha+2}} + \underset{\alpha1}{X}{}_{a_3a_1a_2a_4\dots a_{\alpha+2}} = 0.$$

Используя последние соотношения, преобразуем левую часть равенства (3.14):

$$\begin{aligned}&\underset{\alpha1}{X}{}_{a_2a_1\dots a_{\alpha+2}} - \underset{\alpha1}{X}{}_{a_2a_1a_3\dots a_{\alpha+2}} = \\ &\quad = \underset{\alpha1}{X}{}_{a_1a_2\dots a_{\alpha+2}} + \underset{\alpha1}{X}{}_{a_1a_3a_2a_4\dots a_{\alpha+2}} + \underset{\alpha1}{X}{}_{a_3a_2a_1a_4\dots a_{\alpha+2}} = \underset{\alpha1}{X}{}_{a_1a_3a_2a_4\dots a_{\alpha+2}}.\end{aligned}$$

В результате соотношения (3.14) примут вид

$$\underset{\alpha1}{X}{}_{a_1a_3a_2a_4\dots a_{\alpha+2}} = \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_1a_4a_2a_5\dots a_{\alpha+2}a_3} - \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_2a_4a_1a_5\dots a_{\alpha+2}a_3}. \tag{3.16}$$

Рассмотрим теперь величины $\underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_1\dots a_{\alpha+2}}$. По лемме 2.1 они симметричны по индексам $a_2, a_4, \dots, a_{\alpha+1}$ и по индексам a_3 и $a_{\alpha+2}$. Поэтому обозначим

$$\underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_1a_2\dots a_{\alpha+2}} = \underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{a_1a_3a_{\alpha+2}} = \underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{a_1a_{\alpha+2}a_3}. \tag{3.17}$$

Тогда соотношения (3.13) дадут

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{(a_ia_j)a_{\alpha+2}} = 0, \tag{3.18}$$

где $\Lambda_{\alpha+1} = \{1, 2, \ldots, \alpha, \widehat{\alpha+1}\}$. Рассуждая дальше таким же образом, как и при доказательстве леммы 3.1, приходим к равенствам

$$\sum_{i\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{(a_i a_{\alpha+1})a_{\alpha+2}} = 0. \tag{3.19}$$

Переставив в (3.19) индексы $a_{\alpha+1}$ и $a_{\alpha+2}$, получим

$$\sum_{i\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{(a_i a_{\alpha+2})a_{\alpha+1}} = 0.$$

Вычитая это равенство из предыдущего и пользуясь симметрией величин $\underset{\alpha-1,2}{Y}$, находим, что

$$\sum_{i\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{[a_{\alpha+1} a_{\alpha+2}]a_i} = 0. \tag{3.20}$$

С другой стороны, альтернируя соотношения (3.14) по индексам a_3 и $a_{\alpha+2}$ и учитывая симметрию величин $\underset{\alpha 1}{X}{}_{a_1 a_2 \ldots a_{\alpha+2}}$ по этим же индексам, получаем

$$\underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_1 a_4 a_2 a_5 \ldots a_{\alpha+2} a_3} - \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_2 a_4 a_1 a_5 \ldots a_{\alpha+2} a_3} = \\ = \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_1 a_4 a_2 a_5 \ldots a_3 a_{\alpha+2}} - \underset{\alpha-1,2}{X}{}_{a_2 a_4 a_1 a_5 \ldots a_3 a_{\alpha+2}}.$$

В обозначениях 3.17 эти равенства примут вид

$$\underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{[a_1 a_2]a_3} = \underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{[a_1 a_2]a_{\alpha+2}}.$$

Полученные соотношения означают, что величины $\underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{[a_i a_j]a_k}$, отличающиеся только последним индексом, равны. Поэтому из (3.20) вытекает, что $\underset{\alpha-1,2}{Y}{}_{[a_i a_j]a_k} = 0$, т. е. величины $\underset{\alpha-1,2}{Y}$ симметричны по первым двум индексам. Тогда (см. обозначения (3.17)) величины $\underset{\alpha-1,2}{X}$ симметричны по первому и третьему индексам, т. е. тензор $\underset{\alpha-1,2}{T}{}_{[13]}$ замкнут. Но тогда из (3.16) вытекает, что $\underset{\alpha 1}{X} = 0$, т. е. замкнут и тензор $\underset{\alpha 1}{T}$. □

Следствие 1. *Если замкнут тензор* $\underset{\alpha_1,1}{T}{}_s = (c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_{\alpha_1})})$, *то при* $\alpha > \alpha_1+1$ *замкнуты и тензоры* $\underset{\alpha,1}{T}$ *и* $\underset{\alpha-1,2}{T}{}_{[13]}$.

Доказательство. В самом деле, из замкнутости тензора $\underset{\alpha,1}{T}{}_s$ вытекает замкнутость его ковариантных производных $c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_{\alpha_1})j_{\alpha_1+1}\ldots j_\alpha}$, $c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2\ldots j_{\alpha_1})j_{\alpha_1+1}\ldots j_{\alpha-1} r+k_2}$. Так как $\alpha > \alpha_1 + 1$, то через эти производные выражаются тензоры (3.12), т. е. выполнено условие леммы 3.3. □

Следствие 2. *Если* $\alpha = 3$, *то из* (3.12) *вытекает замкнутость тензоров* $\underset{3,1}{T}$ *и* $\underset{2,2}{T}$.

Доказательство. В самом деле, при доказательстве леммы 3.3 мы получили, что величины $Y_{a_i a_j a_k}$ симметричны по всем индексам, поэтому соотношения (3.18) и (3.19) примут вид

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha-1,2}{Y}_{a_i a_j a_{\alpha+2}} = 0, \tag{3.21}$$

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda_{\alpha+1}} \underset{\alpha-1,2}{Y}_{a_i a_{\alpha+1} a_{\alpha+2}} = 0. \tag{3.22}$$

Покажем, что первые соотношения следуют из последних. Для этого запишем соотношения (3.22) для различных наборов индексов:

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda_p} \underset{\alpha-1,2}{Y}_{a_i a_p a_{\alpha+2}} = 0, \quad \Lambda_p = \{1, \dots, \hat{p}, \dots, \alpha+1\}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda} \underset{\alpha-1,2}{Y}_{a_i a_j a_{\alpha+2}} = 0,$$

где $\Lambda = \{1, \dots, \alpha+1\}$. Вычитая из полученной суммы равенства (3.22), придём к (3.21).

Равенств (3.22) всего $C^2_{\alpha+1}$, а величин $\underset{\alpha-1,2}{Y}_{a_i a_j a_k} - C^3_{\alpha+2}$. Поэтому если $\alpha > 3$, то система (3.22) имеет ненулевые решения. Покажем, что при $\alpha = 3$ система допускает только тривиальное решение. Для этого вспомним, что

$$\underset{2,2}{Y}_{a_1 a_3 a_5} = \underset{2,2}{X}_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}.$$

Так как величины $\underset{2,2}{Y}_{a_1 a_3 a_5}$, а следовательно и величины $\underset{2,2}{X}_{a_1 \dots a_5}$, симметричны по индексам a_1, a_3, a_5, то можно обозначить

$$\underset{2,2}{X}_{a_1 \dots a_5} = \underset{2,2}{X}_{a_2 a_4}, \tag{3.23}$$

причём в силу леммы 2.1 $\underset{2,2}{X}_{a_2 a_4} = \underset{2,2}{X}_{a_4 a_2}$. В результате соотношения (3.22) перепишутся в виде

$$\underset{2,2}{X}_{a_1 a_4} + \underset{2,2}{X}_{a_2 a_4} + \underset{2,2}{X}_{a_3 a_4} = 0. \tag{3.24}$$

Соотношения (3.22) при $\alpha = 3$ примут вид

$$\underset{2,2}{Y}_{a_1 a_4 a_5} + \underset{2,2}{Y}_{a_2 a_4 a_5} + \underset{2,2}{Y}_{a_3 a_4 a_5} = 0.$$

С учётом обозначений (3.23) имеем

$$\underset{2,2}{X}_{a_2 a_3} + \underset{2,2}{X}_{a_1 a_3} + \underset{2,2}{X}_{a_1 a_2} = 0.$$

Запишем эти равенства для другого набора индексов:

$$\underset{2,2}{X}_{a_1 a_4} + \underset{2,2}{X}_{a_2 a_4} + \underset{2,2}{X}_{a_1 a_2} = 0.$$

Сравнивая с (3.24), находим, что $\underset{2,2}{X}_{a_3a_4} = \underset{2,2}{X}_{a_1a_2}$. Таким же образом получаем, что $\underset{2,2}{X}_{a_3a_4} = \underset{2,2}{X}_{a_1a_5}$, откуда следует, что $\underset{2,2}{X}_{a_1a_5} = \underset{2,2}{X}_{a_1a_2}$, т. е. все величины $\underset{2,2}{X}_{a_1a_2}$, отличающиеся только одним индексом, равны. Поэтому из (3.24) следует, что $\underset{2,2}{X}_{a_1a_2} = 0$, и следствие 2 доказано. □

Подобно лемме 3.3 доказывается лемма 3.4.

Лемма 3.4. *Если замкнуты тензоры* $c^i_{(jj_1r+k_1r+k_2\ldots r+k_{\beta-2})r+k_{\beta-1}r+k_\beta}$, $c^i_{(jj_1r+k_1|j_2|r+k_2\ldots r+k_{\beta-2})r+k_{\beta-1}}$, *то замкнуты тензоры* $\underset{1,\beta}{T}$ *и* $\underset{1,\beta}{T}_{[12]}$.

4. Аналитические условия замкнутости G-структуры

Теорема 4.1. *Пусть на ткани* W *замкнуты следующие основные тензоры типа* $\binom{1}{2\alpha+1}$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{2\alpha-3})j_{2\alpha-2}j_{2\alpha-1}},\\
(2) & c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{2\alpha-4})j_{2\alpha-3}j_{2\alpha-2}r+k_2},\\
(3) & c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{2\alpha-5})j_{2\alpha-4}j_{2\alpha-3}r+k_2r+k_3},\\
 & \ldots\\
(\alpha-1) & c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{\alpha-1})j_{2\alpha-4}j_\alpha j_{\alpha+1}r+k_2\ldots r+k_{\alpha-1}},\\
(\alpha) & c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_\alpha r+k_2\ldots r+k_\alpha)},\\
(\alpha+1) & c^i_{(jj_1r+k_1|j_2\ldots j_{\alpha-1}|r+k_2\ldots r+k_{\alpha-1})r+k_\alpha r+k_{\alpha-1}},\\
 & \ldots\\
(2\alpha-3) & c^i_{(jj_1r+k_1|j_2j_3|r+k_2\ldots r+k_{2\alpha-5})r+k_{2\alpha-4}r+k_{2\alpha-3}},\\
(2\alpha-2) & c^i_{(jj_1r+k_1|j_2|r+k_2\ldots r+k_{2\alpha-4})r+k_{2\alpha-3}r+k_{2\alpha-2}},\\
(2\alpha-1) & c^i_{(jj_1r+k_1r+k_2\ldots r+k_{2\alpha-3})r+k_{2\alpha-2}r+k_{2\alpha-1}}.
\end{array}
\tag{4.1}
$$

Тогда G-структура будет замкнутой класса не выше 2α.

Доказательство. Так как тензор

$$c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{2\alpha-3})j_{2\alpha-2}r+k_2}$$

выражается через тензор (4.1) (2), то он замкнут, а это вместе с замкнутостью тензора (4.1) (1) составляет условие леммы 3.3. Следовательно, по этой лемме тензоры $\underset{2\alpha-1,1}{T}$ и $\underset{2\alpha-2,2}{T}_{[13]}$ являются замкнутыми.

Далее из замкнутости тензоров $\underset{2\alpha-2,2}{T}_{[13]}$ и (4.1) (2) по следствию к лемме 3.1 получаем, что замкнут и тензор $\underset{2\alpha-2,2}{T}$. Из его замкнутости вытекает замкнутость тензора $\underset{2\alpha-3,3}{T}{}_{[13]}$ (см. замечание в начале раздела 3), а отсюда и из замкнутости тензора (4.1) (3), пользуясь тем же следствием из леммы 3.1, выводим, что замкнут и тензор $\underset{2\alpha-3,3}{T}$. Рассуждая далее аналогично, докажем замкнутость тензоров $\underset{2\alpha-4,4}{T}, \underset{2\alpha-5,5}{T}, \dots, \underset{\alpha+1,\alpha-1}{T}, \underset{\alpha,\alpha}{T}{}_{[13]}$.

Рассмотрим теперь тензоры (4.1) $(2\alpha-1)$ и (4.1) $(2\alpha-2)$. Пользуясь сначала леммой 3.3, а затем следствием к лемме 3.2, находим, что тензоры $\underset{1,2\alpha-1}{T}$ и $\underset{2,2\alpha-2}{T}$ замкнуты. Тогда вследствие того же замечания из раздела 3 получаем, что замкнут и тензор $\underset{3,2\alpha-3}{T}{}_{[12]}$. Это условие вместе с замкнутостью (4.1) $(2\alpha-3)$ приводит в силу следствия из леммы 3.2 к замкнутости тензора $\underset{3,2\alpha-3}{T}$ и т. д. Таким образом, мы получаем, что замкнуты тензоры $\underset{4,2\alpha-4}{T}, \underset{5,2\alpha-5}{T}, \dots, \underset{\alpha-1,\alpha+1}{T}, \underset{\alpha,\alpha}{T}{}_{[12]}$.

Рассмотрим, наконец, тензор $\underset{\alpha,\alpha}{T}$ и докажем, что он тоже является замкнутым. Действительно, соответствующие ему величины $\underset{\alpha,\alpha}{X}{}_{a_1\dots a_{2\alpha+1}}$, входящие в однородную присоединённую систему, будут вследствие замкнутости тензоров $\underset{\alpha,\alpha}{T}{}_{[12]}$ и $\underset{\alpha,\alpha}{T}{}_{[13]}$ симметричными по индексам a_1, a_2 и a_1, a_3. Но так как эти величины уже симметричны по индексам $a_2, a_4, a_5, \dots, a_{2\alpha+1}$ (см. лемму 3.1), то получаем, что они симметричны по всем индексам. С другой стороны, из замкнутости тензора (4.1) (α) вытекает, что выполняются соотношения $\underset{\alpha,\alpha}{X}{}_{(a_1\dots a_{2\alpha+1})} = 0$, которые вследствие указанной симметрии дают $\underset{\alpha,\alpha}{X}{}_{a_1\dots a_{2\alpha+1}} = 0$. Итак, тензор $\underset{\alpha,\alpha}{T}$ также оказывается замкнутым. □

Теорема 4.2. *Если симметричные части основных тензоров* $\underset{\alpha-1,1}{T}$ *и* $\underset{1,\alpha-1}{T}$ *типа* $\binom{1}{\alpha+1}$ *три-ткани* W *являются замкнутыми, то* G*-структура будет замкнутой класса не выше* 2α*.*

Доказательство. Пусть тензоры

$$\underset{\alpha-1,1}{T}{}^s = (c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2\dots j_{\alpha-1})}), \quad \underset{1,\alpha-1}{T}{}^s = (c^i_{(jj_1 r+k_1\dots r+k_{\alpha-1})}) \tag{4.2}$$

замкнуты. Тогда замкнуты и их ковариантные производные

$$\begin{aligned} &c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2\dots j_{\alpha-1})j_\alpha\dots j_{2\alpha-1}}, \\ &c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2\dots j_{\alpha-1})j_\alpha\dots j_{2\alpha-2} r+k_2}, \\ &\dots \\ &c^i_{(jj_1 r+k_1 j_2\dots j_{\alpha-1})j_\alpha r+k_2\dots r+k_\alpha}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

и

$$\begin{aligned} &c^i_{(jj_1 r+k_1\dots r+k_{\alpha-1})j_2\dots j_{\alpha-1} r+k_\alpha r+k_{\alpha+1}}, \\ &c^i_{(jj_1 r+k_1\dots r+k_{\alpha-1})j_2\dots j_{\alpha-2} r+k_{\alpha-1} r+k_\alpha r+k_{\alpha+1}}, \\ &\dots \\ &c^i_{(jj_1 r+k_1\dots r+k_{\alpha-1}) r+k_\alpha\dots r+k_{2\alpha-1}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Тензоры (4.1) (1)—(α) выражаются через соответствующие тензоры (4.3), поэтому из замкнутости вторых вытекает замкнутость первых. Точно так же, пользуясь леммой 2.2, находим, что из замкнутости тензоров (4.4) следует замкнутость тензоров (4.1) ($\alpha+1$)—($2\alpha-1$). Таким образом, выполнены условия теоремы 4.1, и G-структура рассматриваемой ткани является замкнутой структурой класса не выше 2α. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\alpha = 2$, тогда оба тензора* (4.2) *совпадают с симметрированным тензором кривизны $b^i_{(jkl)}$. Отсюда, в частности, вытекает теорема* 3.1: *G-структура, определяемая шестиугольной три-тканью, является замкнутой структурой класса* 4.

Следствие 2. *Если $\alpha = 3$, то тензоры* (4.2) *представляют собой симметричные части ковариантных производных тензора кривизны b^i_{jkl}, которыми исчерпываются все основные тензоры, принадлежащие дифференциально-геометрическому объекту четвёртого порядка этой ткани.*

Теорема 4.2 при этом звучит так: если замкнуты симметрированные ковариантные производные $c^i_{(jklm)}$ и $c^i_{(jklr+m)}$ тензора кривизны три-ткани W, то её G-структура будет замкнутой структурой класса 6.

Возникает естественный вопрос: является ли число 2α, указывающее порядок замкнутой G-структуры в формулировке теоремы 4.2, точным?

Подобно теореме 4.1 в [16] доказываются следующие утверждения.

Теорема 4.3. *Если на три-ткани W замкнуты тензоры $c^i_{(jj_1r+k_1)j_2j_3}$, $c^i_{(jj_1r+k_1)j_2r+k_2}$, $c^i_{(jj_1r+k_1r+k_2)r+k_3}$, то замкнуты и тензоры $\underset{3,1}{T}$, $\underset{2,2}{T}$, $\underset{1,3}{T}$, т. е. G-структура является замкнутой структурой класса* 4.

Теорема 4.4. *Пусть на три-ткани W замкнуты тензоры*

$$
\begin{aligned}
&c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{2\alpha-2})j_{2\alpha-1}j_{2\alpha}},\\
&c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{2\alpha-3})j_{2\alpha-2}j_{2\alpha-1}r+k_2},\\
&c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{2\alpha-4})j_{2\alpha-3}j_{2\alpha-2}r+k_2r+k_3},\\
&\quad\ldots\\
&c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{\alpha-1})j_\alpha j_{\alpha+1}r+k_2\ldots r+k_\alpha},\\
&c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_\alpha)r+k_2\ldots r+k_{\alpha+1}},\\
&c^i_{(jj_1r+k_1j_2\ldots j_{\alpha-1}r+k_2r+k_3)r+k_4\ldots r+k_{\alpha+2}},\\
&\quad\ldots\\
&c^i_{(jj_1r+k_1\ldots r+k_{2\alpha-1})r+k_{2\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Тогда G-структура будет замкнутой структурой класса $2\alpha+1$.

Теорема 4.5. *Пусть замкнуты следующие тензоры типа $\binom{1}{2\alpha+2}$, принадлежащие дифференциально-геометрическому объекту порядка $2\alpha+2$ три-ткани W:*

$$
\begin{aligned}
&c^i_{(jj_1 r+k_1 \ldots r+k_{2\alpha-2}) r+k_{2\alpha-1} r+k_{2\alpha}},\\
&c^i_{(jj_1 r+k_1 | j_2 | r+k_2 \ldots r+k_{2\alpha-3}) r+k_{2\alpha-2} r+k_{2\alpha-1}},\\
&c^i_{(jj_1 r+k_1 | j_2 j_3 | r+k_2 \ldots r+k_{2\alpha-4}) r+k_{2\alpha-3} r+k_{2\alpha-2}},\\
&\quad \ldots\\
&c^i_{(jj_1 r+k_1 | j_2 j_3 \ldots j_\alpha | r+k_2 \ldots r+k_{\alpha-1}) r+k_\alpha r+k_{\alpha+1}},\\
&c^i_{(jj_1 r+k_1 | j_2 j_3 \ldots j_{\alpha+1} | r+k_2 \ldots r+k_\alpha)},\\
&c^i_{(jj_1 r+k_1 | j_2 j_3 \ldots j_\alpha | j_{\alpha+1} j_{\alpha+2} r+k_2 \ldots r+k_{\alpha-1})},\\
&c^i_{(j_1 r+k_1 | j_2 \ldots j_{\alpha-1} | j_{\alpha+1} j_{\alpha+2} j_{\alpha+3} r+k_2 \ldots r+k_{\alpha-2})},\\
&\quad \ldots\\
&c^i_{(jj_1 r+k_1 | j_2 | j_3 \ldots j_\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Тогда G-структура является замкнутой структурой класса $2\alpha + 1$.

5. Координатные лупы три-ткани с замкнутой G-структурой

Как уже отмечалось в разделе 1, уравнение $z = f(x, y) \equiv x \cdot y$ три-ткани W, связывающее параметры слоёв ткани, проходящих через одну точку, можно рассматривать как бинарную операцию — координатную квазигруппу q этой ткани. В окрестности точки $x = a$, $y = b$ введём на третьем слоении ткани новую операцию $\circ$, положив

$$u \circ v = x \cdot y = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v). \tag{5.1}$$

Как видно из (2.4), квазигруппа $(\circ)$ является главным изотопом квазигруппы q, причём изотопия $q \to (\circ)$ имеет вид (R_b, L_a, id). Легко проверить, что $(\circ)$ — лупа с единицей $e = f(a, b)$. Она связана с точкой (a, b) три-ткани W, называется *координатной лупой ткани* и обозначается $l(a, b)$.

Так как все координатные лупы ткани изотопны координатной квазигруппе, то они изотопны между собой. Таким образом, три-ткань можно рассматривать как класс изотопных между собой луп.

Параметры x, y и z слоёв ткани определены с точностью до локальных диффеоморфизмов. Поэтому в окрестности точки (a, b) их всегда можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $a = 0$, $b = 0$, $f(0, y) = y$ и $f(x, 0) = x$. Тогда координатная квазигруппа (т. е. уравнение ткани) становится координатной лупой с единицей, имеющей нулевые координаты. Это обстоятельство даёт возможность использовать теорию тканей для исследования свойств локальных аналитических луп.

Локальные координаты в локальной аналитической лупе с операцией $z = f(x, y)$ называются *каноническими*, если они удовлетворяют условию

$f(x,x) = 2x$. Канонические координаты были введены в [1], их существование было доказано позднее в [5].

Разложение уравнений аналитической лупы в ряд, записанное в канонических координатах, называется каноническим разложением (см. [1]). Выражение тензоров кривизны и кручения ткани через коэффициенты «почти канонического» разложения уравнений её локальной координатной лупы было получено в [4]. Аналогичные формулы для ковариантных производных первого и второго порядка от тензора кривизны ткани найдены в [17, 20].

Основная теорема здесь следующая.

Теорема 5.1. *Пусть Q — координатная лупа $l(a,b)$ три-ткани W, заданной на аналитическом многообразии. Тогда значения основных тензоров типа $\binom{1}{s}$ этой ткани в точке (a,b) выражаются через коэффициенты порядка не выше s канонического разложения уравнений лупы $l(a,b)$. Обратно: коэффициенты порядка s канонического разложения лупы $l(a,b)$ являются комитантами основных тензоров типа $\binom{1}{q}$, вычисленных в точке (a,b), причём $q < s$.*

Подробное доказательство этого утверждения имеется в [18], здесь мы его не приводим.

Предположим теперь, что G-структура ткани W является замкнутой класса k. Тогда согласно определению замкнутой G-структуры компоненты дифференциально-геометрического объекта порядка $k+1$ этой ткани, в частности её основные тензоры типа $\binom{1}{k+1}$, являются комитантами основных тензоров типа $\binom{1}{q}$, где $q \leqslant k$. Но тогда из теоремы 5.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть G-структура три-ткани W, заданной на аналитическом многообразии, является замкнутой класса k. Тогда каноническое разложение любой координатной лупы ткани W полностью определяется струей порядка k, т. е. коэффициенты порядка выше k этого разложения являются комитантами от коэффициентов до порядка k включительно.*

В частности, для групп Ли, аналитических луп Муфанг, луп Бола и координатных луп шестиугольных тканей число k соответственно равно 2, 2, 3, 4.

6. Тождества порядка k с одной переменной

Как видно из предыдущих рассуждений, кососимметричные части тензоров ткани всегда являются замкнутыми, но симметричные части — не обязательно. В то же время замкнутость симметричных частей приводит к замкнутости соответствующей G-структуры. Напомним, что для групповых тканей тензор кривизны равен нулю, у тканей Бола тензор кривизны, просимметрированный по двум индексам, равен нулю, у шестиугольных тканей симметричная часть тензора кривизны равна нулю.

Вспомним также, что каждый из перечисленных классов тканей характеризуется некоторым тождеством, которое выполняется во всех координатных лупах этой ткани. Для групповых ткани — тождество ассоциативности; для тканей

Бола — одно из тождеств Бола (левое, правое или среднее); для шестиугольных тканей — тождество моноассоциативности $u \cdot u^2 = u^2 \cdot u$. Это наиболее «слабое» из всех тождеств, так как оно содержит только одну переменную.

Возникает вопрос: существуют ли в этом ряду тождеств другие, ещё более слабые тождества, которые приводят к замкнутости соответствующей G-структуры?

Мы обобщаем тождество моноассоциативности, вводя понятие тождества порядка k с одной переменной.

Пусть $Q(\cdot)$ — аналитическая лупа и $S(u)$ — слово длины n от одной переменной u в Q. Разложим функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности единицы лупы. Коэффициенты этого ряда выразятся через симметрированные коэффициенты разложения функции $x \cdot y$, определяющей умножение в лупе Q.

Два слова $S_1(u)$ и $S_2(u)$ длины n от переменной u в лупе Q назовём *k-эквивалентными*, если их тейлоровские разложения совпадают до членов k-го порядка включительно.

Тождество $S_1(u) = S_2(u)$ в лупе Q назовём *тождеством порядка k*, если слова $S_1(u)$ и $S_2(u)$ (оба длины n) являются k-эквивалентными. Например, тождество моноассоциативности есть тождество порядка 2.

Тождества порядка выше двух найти непросто: в разложениях слов $S_1(u)$ и $S_2(u)$ надо сравнивать соответствующие коэффициенты, которые являются комитантами от коэффициентов разложения произведения $x \cdot y$. Это приводит к длинным вычислениям, которые, впрочем, осуществляются с помощью ЭВМ. Слова длины 3 и 4 исследовались в [6, 7].

Как оказалось, тождества порядка 3 появляются при $n > 4$. Например,

$$u^2(u^2u) = u\big((u^2u)u\big), \quad (u^2u)u^2 = \big(u(u^2u)\big)u. \tag{6.1}$$

Тождества порядка 4 появляются при $n > 9$. Например,

$$\begin{gathered}
u\Bigg(u^2\bigg(u^2\Big(u\big(u(uu^2)\big)\Big)\bigg)\Bigg) = u^2\Bigg(u\bigg(u\Big(u\big(u^2(u^2u)\big)\Big)\bigg)\Bigg),\\
u\Bigg(u^2\bigg(u\Big((uu^2)\big(u(uu^2)\big)\Big)\bigg)\Bigg) = u^2\Bigg(u\bigg(u\Big(u^2\big((u(uu^2))u\big)\Big)\bigg)\Bigg),\\
u\Bigg(u\bigg(\Big(u^2\big(u(uu^2)\big)\Big)(uu^2)\bigg)\Bigg) = u^2\Bigg(\bigg(u^2\Big(u\big((u(uu^2))u\big)\Big)\bigg)u\Bigg).
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Пусть теперь некоторое тождество $S_1(u) = S_2(u)$ порядка k с одной переменной выполняется во всех координатных лупах некоторой три-ткани W. Это требование приводит к соотношениям на симметрированные части разложений слов $S_1(u)$ и $S_2(u)$, а в конечном счёте — на симметрированные части канонического разложения координатной лупы. Согласно теореме 5.1 это, в свою очередь, даёт соотношения на симметрированные части основных тензоров ткани W. Если таких соотношений получается достаточно много, то согласно теоремам из раздела 4 G-структура, определяемая три-тканью W, становится замкнутой. Точнее, верны утверждения следующего типа.

Теорема 6.1. *Если в координатных лупах аналитической три-ткани W выполняются $k-1$ независимых тождеств порядка k, то определяемая этой тканью G-структура является замкнутой структурой класса не выше $2k$.*

В частности, если выполняются тождества (6.1), получаем замкнутую структуру класса не ниже 6, если выполняются тождества (6.2) — замкнутую структуру класса не ниже 11. Подробные доказательства можно найти в [18].

В заключение отметим, что в теории три-тканей с замкнутой G-структурой остаётся много нерешённых проблем. На наш взгляд, две из них наиболее важные.

1. Доказать, что определяемая три-тканью G-структура является замкнутой, если в координатных лупах этой ткани выполняется *одно* из указанных выше тождеств порядка k (например, одно из тождеств (6.1)), и оценить класс соответствующей замкнутой структуры.
2. Найти аналог формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа для аналитических луп Бола. На важность этой задачи указывали в своё время М. А. Акивис, А. М. Васильев, А. Т. Фоменко. Ею занимались также Л. В. Сабинин и П. О. Михеев.

Литература

[1] Акивис М. А. О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы // ДАН СССР. — 1969. — Т. 188, № 5. — С. 967—970.

[2] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1969. — Т. 2. — С. 7—31.

[3] Акивис М. А. О замкнутых G-структурах на дифференцируемом многообразии // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1975. — Т. 7. — С. 69—79.

[4] Акивис М. А., Шелехов А. М. О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы // Сиб. мат. журн. — 1971. — Т. 12, № 5. — С. 953—960.

[5] Акивис М. А., Шелехов А. М. О канонических координатах в локальной аналитической лупе // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1986. — С. 120—124.

[6] Биллиг В. А., Шелехов А. М. О классификации тождеств с одной переменной в гладкой локальной лупе // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1987. — С. 24—32.

[7] Биллиг В. А., Шелехов А. М. Классификация тождеств длины 12 порядка 4 с одной переменной в локальной аналитической лупе // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1990. — С. 10—18.

[8] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—246.

[9] Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. — Тарту, 1990.

[10] Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур / С добавлением Г. Г. Михайличенко. — Новосибирск, 1968.

[11] Кулаков Ю. И., Владимиров Ю. С., Карнаухов А. В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. — М.: Архимед, 1992.

[12] Лумисте Ю. Г. Связности в однородных расслоениях // Мат. сб. — 1966. — Т. 69, № 3. — С. 434—469.

[13] Лумисте Ю. Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-кореперов // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1974. — Т. 5. — С. 239—257.

[14] Мальцев А. И. Аналитические лупы // Мат. сб. — 1955. — Т. 36, № 3. — С. 569—575.

[15] Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // ДАН СССР. — 1972. — Т. 206, № 5. — С. 1056—1058.

[16] Шелехов А. М. О замкнутых g-структурах, определяемых многомерными три-тканями. — Калинин. — 49 с. — Деп. в ВИНИТИ 25.12 1985; № 8815-В.

[17] Шелехов А. М. О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1986. — С. 96—103.

[18] Шелехов А. М. О дифференциально-геометрических объектах высших порядков многомерной три-ткани // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1987. — Т. 19. — С. 101—154.

[19] Шелехов А. М. Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1989. — Т. 21. — С. 109—154.

[20] Шелехов А. М. Вычисление вторых ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1990. — С. 49—55.

[21] Akivis M. A., Shelekhov A. M. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

[22] Holmes J. P. Differentiable power associative groupoids // Pacific J. Math. — 1972. — Vol. 42, no. 2. — P. 391—394.

[23] Holmes J. P., Sagle A. A. Analytic H-spaces, Campbell—Hausdorff formula, and alternative algebras // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 91, no. 1. — P. 105—134.

[24] Santilli R. M. Lie-Admissible Approach to the Hadronic Structure. Vol. I. — Palm Harbor: Hadronic Press, 1978.

[25] Shelekhov A. M. The g-structure associated with a multidimensional hexagonal 3-web is closed // J. Geom. — 1989. — Vol. 35. — P. 167—176.