Геометрия двойственных пространств аффинно-метрической связности

Т. Г. АЛЕНИНА
Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева
e-mail: AleninaTanya@mail.ru

УДК 514.764.3

Ключевые слова: пространство проективно-метрической связности, пространство аффинно-метрической связности, нормализация, двойственность, гармоническая нормализация пространства, гиперквадрика.

Аннотация

В работе изучаются вопросы двойственной геометрии нормализованного пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$. В частности, вводятся в рассмотрение двойственные пространства аффинно-метрической связности $\overset{p}{\mathrm{M}}_{n,n}$, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$.

Abstract

T. G. Alenina, Geometry of dual spaces of affine-metric connection, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 39—45.

In this work, we consider the dual geometry of a normalized space of affine connection $\mathrm{A}_{n,n}$. In particular, we study the dual spaces of an affine-metric connection $\overset{p}{\mathrm{M}}_{n,n}$, which are induced by a nondegenerate normalization of a space of affine-metric connection $\mathrm{M}_{n,n}$.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$i,\, j,\, k,\, l,\, s,\, t = \overline{1,n}, \quad \bar\imath,\, \bar\jmath,\, \bar k,\, \bar l,\, \bar s,\, \bar t = \overline{0,n}, \quad a = \overline{1,3}, \quad p = \overline{1,4}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, определяемое системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^i, \theta^i_j\}$ [1], r^i_{st}, r^i_{jst} — тензоры кручения и кривизны этого пространства соответственно.

Известно [7], что

1) система $(n+1)^2$ пфаффовых форм $\{\omega^{\bar\imath}_{\bar\jmath}\}$, где

$$\omega^i_0 = \theta^i, \quad \omega^0_0 = -\frac{1}{n+1}\theta^k_k, \quad \omega^i_j = \theta^i_j - \frac{1}{n+1}\delta^i_j\theta^k_k, \quad \omega^0_j = 0,$$

определяет пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, ассоциированное с $\mathrm{A}_{n,n}$; при этом $\mathrm{P}_{n,n}$ вырождается в проективное пространство P_n тогда и только тогда, когда исходное пространство $A_{n,n}$ является аффинным A_n ($r^i_{st} \equiv r^i_{jst} \equiv 0$);

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 39—45.

2) нормализация [3] пространства $P_{n,n}$ полем ковектора c_i^0 $(dc_i^0 + c_i^0\omega_0^0 - c_k^0\omega_i^k = c_{ik}^0\omega_0^k)$, т. е. полем гиперплоскостей $c_k^0 x^k - x^0 = 0$, равносильна нормализации соответствующего пространства $A_{n,n}$ тем же полем ковектора $(dc_i^0 - c_k^0\theta_i^k = c_{ik}^0\theta^k)$, т. е. полем нормализующих гиперплоскостей $c_k^0 \mathrm{X}^k - 1 = 0$, где $\mathrm{X}^k = x^k/x^0$ — неоднородные координаты точек нормализующей гиперплоскости относительно репера $R = \{\mathrm{A}_0, \vec{e}_k\}$.

Будем считать, что нормализация пространства $P_{n,n}$ (а следовательно, и пространства $A_{n,n}$) является невырожденной, т. е. в каждом слое соответствие между его центром A_0 и гиперплоскостью ξ_0, $\mathrm{A}_0 \notin \xi_0$, является однозначным, непрерывным и дифференцируемым; последнее равносильно тому, что тензор

$$a_{ij}^0 \stackrel{\text{def}}{=} c_{ij}^0 - c_i^0 c_j^0$$

невырожден:

$$b \stackrel{\text{def}}{=} |a_{ij}^0| \neq 0.$$

Функция b есть относительный инвариант:

$$d\ln b + 2(n+1)\omega_0^0 = b_k\omega_0^k.$$

Нормализацию пространства $P_{n,n}$ с полем симметричного тензора a_{ij}^0 по аналогии с нормализованным P_n (см. [3]) назовём гармонической.

Согласно [5], невырожденная нормализация пространства проективной связности $P_{n,n}$ индуцирует три пространства проективной связности $\overset{2}{\mathrm{P}}_{n,n}$, $\overset{3}{\mathrm{P}}_{n,n}$, $\overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n}$, двойственные относительно соответствующих инволютивных преобразований J_a, $a = 1, 2, 3$ $(J_a \equiv J_a^{-1})$, форм связности $\overset{p}{\omega}{}_{\bar{\jmath}}^{\bar{\imath}}$ $(p = \overline{1,4})$ как между собой, так и по отношению к нормализованному пространству $\overset{1}{\mathrm{P}}_{n,n} \equiv \mathrm{P}_{n,n}$. Например, преобразование J_1 имеет вид

$$J_1 \begin{cases} \overset{2}{\omega}{}_0^i = \omega_0^i, \quad \overset{2}{\omega}{}_0^0 = \omega_0^0 + \left(2c_k^0 - \dfrac{1}{n+1}b_k\right)\omega_0^k, \\ \overset{2}{\omega}{}_j^i = \omega_j^i + \left[a_0^{is}(a_{sjk}^0 - c_s^0 a_{kj}^0) - \left(\delta_k^i c_j^0 + \delta_j^i \dfrac{1}{n+1} b_k\right)\right]\omega_0^k, \\ \overset{2}{\omega}{}_j^0 = \omega_j^0(\equiv 0) + \left[-3c_j^0 c_k^0 + a_0^{st} c_s^0(a_{tjk}^0 - c_t^0 a_{kj}^0) - 2a_{[jk]}^0\right]\omega_0^k. \end{cases} \tag{1}$$

Отметим, что каждая из систем уравнений $\{\overset{p}{\omega}{}_{\bar{\jmath}}^{\bar{\imath}} = 0\}$ является вполне интегрируемой.

Замечание 1. Можно показать, что в случае $\mathrm{A}_{n,n} \equiv \mathrm{A}_n$ пространство $\overset{3}{\mathrm{P}}_{n,n}$ (или $\overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n}$), индуцируемое невырожденной нормализацией аффинного пространства A_n, является проективным тогда и только тогда, когда данная нормализация является гармонической; при этом

$$\overset{3}{\mathrm{P}}_{n,n} \equiv \overset{2}{\mathrm{P}}_n, \quad \overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n} \equiv \mathrm{P}_n.$$

Замечание 2. В случае аффинной нормализации пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ ($c_{\bar{i}}^0 \equiv 0$, при этом нормализующая гиперплоскость Π_{n-1} в каждом слое является несобственной) $a_{ij}^0 \equiv 0$; при этом вести речь о пространствах $\overset{2}{\mathrm{P}}_{n,n}$, $\overset{3}{\mathrm{P}}_{n,n}$, $\overset{4}{\mathrm{P}}_{n,n}$ не имеет смысла.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *С пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, нормализованным полем ковектора $c_{\bar{i}}^0$ невырожденным образом, ассоциируются четыре пространства проективной связности $\overset{p}{\mathrm{P}}_{n,n}$, нормализованные невырожденным образом полем ковектора $c_{\bar{i}}^0$ ($c_0^0 = -1$), причём эти пространства попарно двойственны относительно трёх инволютивных преобразований J_a форм связности. Гармоничность нормализации одного из пространств $\overset{p}{\mathrm{P}}_{n,n}$ влечёт гармоничность нормализации других.*

Замечание 3. В общем случае (например, при $a_{[ij]}^0 \neq 0$) теорема 1 остаётся в силе и при $\mathrm{A}_{n,n} \equiv \mathrm{A}_n$.

Теорема 2. *При невырожденной нормализации пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ индуцируются четыре двойственные между собой (относительно инволютивных преобразований J_a) пространства аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, определяемые системами форм $\{\theta^i, \overset{p}{\theta}{}_j^i\}$, где*

$$\overset{p}{\theta}{}_j^i = \overset{p}{\omega}{}_j^i - \delta_j^i\big(\overset{p}{\omega}{}_0^0 - c_k^0\omega_0^k\big) + c_j^0\omega_0^i;$$

тензоры кручения $\overset{p}{r}{}_{st}^i$ и кривизны $\overset{p}{r}{}_{jst}^i$ этих пространств имеют следующее строение:

$$\overset{1}{r}{}_{st}^i = r_{st}^i, \quad \overset{1}{r}{}_{jst}^i = r_{jst}^i - \delta_j^i\big(2a_{[st]}^0 - c_k^0 r_{st}^k\big) + 2a_{j[s}^0\delta_{t]}^i + c_j^0 r_{st}^i; \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\overset{2}{r}{}_{st}^i = -a_0^{ik}c_l^0(r_{kst}^l + c_k^0 r_{st}^i),\\ \overset{2}{r}{}_{jst}^i = -\big[a_0^{ik}a_{lj}^0(r_{kst}^l + c_k^0 r_{st}^l) + \overset{1}{r}{}_{jst}^i - r_{jst}^i - c_j^0 r_{st}^i\big];\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\overset{3}{r}{}_{st}^i = -a_0^{ik}c_l^0(r_{kst}^l + c_k^0 r_{st}^l) + \frac{2}{n}\delta_{[s}^i\big[b_{t]} - 2(n+1)c_{t]}^0\big],\\ \overset{3}{r}{}_{jst}^i = \overset{2}{r}{}_{jst}^i + \frac{2}{n}\delta_j^i r_{lst}^l + \frac{2(n+1)}{n}\big(\overset{1}{r}{}_{jst}^i - r_{jst}^i - 2a_{j[s}^0\delta_{t]}^i - c_j^0 r_{st}^i\big);\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\overset{4}{r}{}_{st}^i = \overset{1}{r}{}_{st}^i - \frac{2}{n}\delta_{[s}^i\big[b_{t]} - 2(n+1)c_{t]}^0\big],\\ \overset{4}{r}{}_{jst}^i = \overset{1}{r}{}_{jst}^i - \frac{2}{n}\delta_j^i r_{lst}^l + \frac{2(n+1)}{n}\delta_j^i\big(2a_{[st]}^0 - c_k^0 r_{st}^k\big).\end{gathered} \tag{5}$$

Показано, что формы $\overset{1}{\theta}{}^i_j$ и $\overset{2}{\theta}{}^i_j$ связности пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ связаны соотношениями

$$da^0_{ij} - a^0_{ik}\overset{2}{\theta}{}^k_j - a^0_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = 0. \tag{6}$$

Уравнения (6) доказывают следующее утверждение.

Теорема 3. *Аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$, *индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$, *являются обобщённо сопряжёнными относительно поля тензора* a^0_{ij} [3].

Показано, что тензоры кривизны пространств $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ могут обращаться в нуль лишь одновременно.

Известно [3,4], что тождественное обращение в нуль тензора кривизны пространства аффинной связности — это условие, при выполнении которого данное пространство обладает абсолютным параллелизмом. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пространства* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *и* $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$, *индуцируемые невырожденной нормализацией пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$, *могут быть пространствами с абсолютным параллелизмом лишь одновременно.*

Из соотношений (2)—(5) получаем, что

$$\overset{1}{r}{}^i_{st} + \overset{2}{r}{}^i_{st} = \overset{3}{r}{}^i_{st} + \overset{4}{r}{}^i_{st}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если из четырёх пространств аффинной связности* $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, *индуцируемых невырожденной нормализацией пространства аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$, *любые три являются пространствами без кручения, то четвёртое пространство также имеет нулевое кручение.*

Известно [2], что пространством проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$ называется пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик. Доказано [6], что критерием того, что $\mathrm{P}_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$ с полем локальных абсолютов Q_{n-1}

$$\begin{gathered} a_{ij}x^ix^j + \frac{1}{c}(g_{i0}x^i + cx^0)^2 = 0, \\ a_{ij} = a_{ji}, \quad g_{i0} = g_{0i}, \quad c = \mathrm{const} \neq 0, \end{gathered} \tag{7}$$

отличных от сдвоенных гиперплоскостей, является выполнение уравнений

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega^k_i - c\omega^0_i = a_{ik}\omega^k_0, \quad da_{ij} - a_{ik}\omega^k_j - a_{kj}\omega^k_i = -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0})\omega^k_0,$$

при этом форма ω^0_0 является главной:

$$\omega^0_0 = -\frac{1}{c}g_{k0}\omega^k_0.$$

Известно [6], что наличие инвариантного поля локальных гиперквадрик (7) приводит к конечным соотношениям для компонент тензора кривизны-кручения пространства $\mathrm{K}_{n,n}$:

$$R^0_{0st} + \frac{1}{c} g_{k0} R^k_{0st} = 0, \quad g_{k0} R^k_{ist} + a_{ik} R^k_{0st} + c R^0_{ist} = 0,$$
$$a_{ik} R^k_{jst} + a_{kj} R^k_{ist} - \frac{1}{c}(a_{ik} g_{j0} + a_{jk} g_{i0}) R^k_{0st} = 0.$$

Согласно [8], пространство $\mathrm{A}_{n,n}$ называется пространством аффинно-метрической связности, если пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, ассоциированное с исходным пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, является пространством проективно-метрической связности.

Ниже пространство аффинно-метрической связности обозначаем через $\mathrm{M}_{n,n}$.

Рассмотрим пространство аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, нормализованное невырожденным образом полем ковектора $c^0_{\bar{\imath}}$. При этом индуцируются четыре двойственных между собой пространства аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$. Задача состоит в том, чтобы при некоторых предположениях найти условие, при котором $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ (p фиксировано) также является пространством аффинно-метрической связности.

С пространством аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $\overset{p}{\Pi}_{n,n}$, определяемое системой пфаффовых форм $\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}}$ по схеме

$$\overset{p}{\Omega}{}^i_0 = \overset{p}{\theta}{}^i \equiv \theta^i, \quad \overset{p}{\Omega}{}^0_0 = -\frac{1}{n+1} \overset{p}{\theta}{}^k_k, \quad \overset{p}{\Omega}{}^i_j = \overset{p}{\theta}{}^i_j - \frac{1}{n+1} \delta^i_j \overset{p}{\theta}{}^k_k, \quad \overset{p}{\Omega}{}^0_j = 0.$$

Каждая из систем форм $\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}}$ удовлетворяет структурным уравнениям пространства проективной связности $\overset{p}{\Pi}_{n,n}$

$$D\overset{p}{\Omega}{}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}} = \overset{p}{\Omega}{}^{\bar{k}}_{\bar{\jmath}} \wedge \overset{p}{\Omega}{}^{\bar{\imath}}_{\bar{k}} + \frac{1}{2} \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}st} \overset{p}{\Omega}{}^s_0 \wedge \overset{p}{\Omega}{}^t_0,$$

где компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{p}{\mathfrak{R}}{}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}st}$ имеют вид

$$\begin{gathered} \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^i_{0st} = \overset{p}{r}{}^i_{st}, \quad \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^0_{0st} = -\frac{1}{n+1} \overset{p}{r}{}^k_{kst}, \\ \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^0_{jst} = 0, \quad \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^i_{jst} = \overset{p}{r}{}^i_{jst} - \frac{1}{n+1} \delta^i_j \overset{p}{r}{}^k_{kst}. \end{gathered} \tag{8}$$

Заметим, что в (8) тензоры кручения $\overset{p}{r}{}^i_{st}$ и кривизны $\overset{p}{r}{}^i_{jst}$ пространства $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ имеют строение (2)—(5).

Показано, что

$$\overset{p}{\Omega}{}^0_0 = -\frac{1}{c} \overset{p}{g}_{k0} \overset{p}{\Omega}{}^k_0,$$

где

$$\overset{1}{g}_{k0} = g_{k0} + c \cdot c_k^0, \qquad \overset{2}{g}_{k0} = g_{k0} - c \cdot c_k^0 + \frac{c}{n+1} b_k,$$
$$\overset{3}{g}_{k0} = g_{k0} + c \cdot c_k^0, \qquad \overset{4}{g}_{k0} = g_{k0} - c \cdot c_k^0 + \frac{c}{n+1} b_k. \tag{9}$$

Каждое из соотношений (9) удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$d\overset{p}{g}_{k0} - \overset{p}{g}_{s0}\overset{p}{\Omega}{}_k^s - c\overset{p}{\Omega}{}_k^0 (\equiv 0) = \overset{p}{a}_{ks}\overset{p}{\Omega}{}_0^s,$$

где, например, тензор $\overset{1}{a}_{ks}$ имеет вид

$$\overset{1}{a}_{ks} = a_{ks} + 2c \cdot c_k^0 c_s^0 + c \cdot a_{ks}^0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Если для пространства $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ (p фиксировано), индуцируемого невырожденной нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, тензор $\overset{p}{a}_{ks}$ симметрический, то оно является пространством аффинно-метрической связности с полем метрического тензора $\overset{p}{a}_{ks}$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение*

$$\overset{p}{a}_{kt}\overset{p}{\mathfrak{R}}{}^t_{0sl} + \overset{p}{a}_{st}\overset{p}{\mathfrak{R}}{}^t_{0kl} + \overset{p}{g}_{t0}\big(\overset{p}{\mathfrak{R}}{}^t_{ksl} + \overset{p}{\mathfrak{R}}{}^t_{skl}\big) = 0. \tag{10}$$

Допустим, что при некоторой невырожденной гармонической нормализации пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ все четыре пространства аффинной связности $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ имеют нулевое кручение. Заметим, что согласно теореме 5 для последнего достаточно, чтобы любые три из них (например, $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,n}$, $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$, $\overset{3}{\mathrm{A}}_{n,n}$) имели нулевое кручение. Таким образом, согласно нашему допущению справедливы соотношения

$$a^0_{[st]} = 0, \quad \overset{1}{r}{}^i_{st} = \overset{2}{r}{}^i_{st} = \overset{3}{r}{}^i_{st} = \overset{4}{r}{}^i_{st} = 0. \tag{11}$$

Показано, что при предположениях (11) условия (10) для любых $p = \overline{1,4}$ эквивалентны соотношениям

$$(g_{t0} + c \cdot c_t^0)(a^0_{k[s}\delta^t_{l]} + a^0_{s[k}\delta^t_{l]}) = 0. \tag{12}$$

Заметим, что при этих предположениях тензоры $\overset{p}{a}_{ij}$ при любом p симметричны.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. *Если каждое из двойственных пространств $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, индуцируемых невырожденной гармонической нормализацией пространства аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$, имеет нулевое кручение, то условие, при котором любое из них является пространством проективно-метрической связности, выражается равенствами* (12).

Теорема 8. *Если каждое из двойственных пространств* $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$, *индуцируемых невырожденной гармонической нормализацией пространства аффинно-метрической связности* $\mathrm{M}_{n,n}$, *имеет нулевое кручение, то любое из них является пространством аффинно-метрической связности* $\overset{p}{\mathrm{M}}_{n,n}$ *тогда и только тогда, когда нормализация пространства* $M_{n,n}$ *является полярной в смысле А. П. Нордена* [3, с. 255]; *при этом пространства* $\overset{p}{\mathrm{A}}_{n,n}$ *совпадают.*

В условиях теоремы 8 локальный абсолют Q_{n-1} пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ в неоднородных координатах имеет уравнение

$$a^0_{ij}\mathrm{X}^i\mathrm{X}^j - (c^0_i\mathrm{X}^i - 1)^2 = 0,$$

а следовательно, является гиперквадрикой овального типа.

Литература

[1] Лаптев Г. Ф. О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности // ДАН СССР. — 1943. — Т. 41, № 8. — С. 329—331.

[2] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—382.

[3] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

[4] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.

[5] Столяров А. В. Двойственная теория оснащённых многообразий. — Чебоксары, 1994.

[6] Столяров А. В. Пространство проективно-метрической связности // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2003. — № 11. — С. 70—76.

[7] Столяров А. В. Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та. — 2005. — Вып. 4. — С. 21—27.

[8] Столяров А. В. Аффинно метрическая связность // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та. — 2006. — Вып. 5. — С. 158—167.