Проективная эквивалентность и пространства эквиаффинной связности

И. ГИНТЕРЛЕЙТНЕР
Политехнический университет, Брно, Чехия
e-mail: Hinterleitner.Irena@seznam.cz

Й. МИКЕШ
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
e-mail: mikes@inf.upol.cz

УДК 514.76

Ключевые слова: пространства аффинной связности, пространства эквиаффинной связности, пространства проективной связности, проективная эквивалентность «в целом», геодезические отображения «в целом».

Аннотация

В настоящей статье доказывается, что все пространства аффинной или проективной связности проективно эквивалентны некоторому пространству эквиаффинной связности «в целом».

Abstract

I. Hinterleitner, J. Mikeš, Projective equivalence and manifolds with equiaffine connection, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 47—54.

In this paper, we prove that all manifolds with affine or projective connection are globally projectively equivalent to some manifolds with equiaffine connection (equiaffine manifold).

1. Введение

Изучение морфизмов различных типов геометрических структур на гладких многообразиях составляет важную часть современной дифференциальной геометрии. Под морфизмом в современной геометрии понимают диффеоморфизм, сохраняющий те или иные свойства геометрических объектов. Важнейшими структурами в дифференциальной геометрии многообразий являются структуры аффинной, римановой и проективной связностей, имеющие широкое приложение в естествознании и математике. Особую роль в геометрии этих структур и их приложений играет класс геодезических линий и их различных обобщений [1—6, 8—10, 14—16].

Диффеоморфизм между двумя n-мерными пространствами аффинной связности A_n и $\bar{A}_n$ называется *геодезическим отображением*, если при нём все

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 47—54.

геодезические кривые первого пространства отображаются на геодезические кривые второго пространства [2—6, 8—10, 14—16]. Геодезические отображения изучались многими авторами. Заметим, что геодезические отображения имеют приложения в теоретической механике и физике, в частности в общей теории относительности, (см., например, [4, 9, 10]).

Аффинную связность на многообразиях обобщает проективная связность. Многообразия с проективной связностью будем обозначать через P_n и называть пространствами проективной связности. Диффеоморфизм между двумя n-мерными пространствами проективной связности P_n и $\bar{P}_n$ называется *геодезическим отображением*, если все геодезические кривые P_n отображаются на геодезические кривые $\bar{P}_n$ (см., например, [7, 15]). В этом случае говорят, что P_n и $\bar{P}_n$ являются *геодезически эквивалентными*. Геодезически эквивалентные пространства P_n и $\bar{P}_n$ имеют одинаковую *проективную геометрию*, так как они характеризуются одинаковой проективной связностью.

Основные уравнения геодезических отображений (псевдо)римановых пространств и пространств аффинной или проективной связности были получены Т. Леви-Чивита, Г. Вейлем, Т. Томасом (см. [2—6,8—10,14—16]). Эти уравнения были первоначально записаны локально, однако никогда не вызывало сомнений, что они имеют и глобальный характер.

Аффинные (или *тривиальные геодезические отображения*) — это геодезические отображения, которые сохраняют канонический параметр геодезических. Многие работы посвящены вопросам метризуемости или проективной метризуемости пространств с аффинной или проективной связностью. Под *метризуемостью* пространства A_n понимается существование метрики g, которая генерирует связность ∇, причём ∇ является связностью Леви-Чивита метрики g (для которой $\nabla g = 0$) (см. [7, 8, 14]). С другой стороны, задача о метризуемости (проективной метризуемости), очевидно, равносильна задаче нахождения аффинного (соответственно геодезического) отображения пространства A_n с аффинной связностью на (псевдо)римановы пространства.

Н. С. Синюков нашёл основные уравнения теории геодезических отображений между (псевдо)римановыми пространствами V_n и $\bar{V}_n$ в форме системы линейных дифференциальных уравнений типа Коши в ковариантной форме [2, 5, 14]. В [2, 14] используются эти уравнения «в целом».

Эквиаффинные пространства, т. е. пространства аффинной связности, в которых объём n-мерного параллелепипеда является инвариантным при параллельном переносе, играют большую роль в теории геодезических отображений. Й. Микеш и В. Е. Березовский [11,14] нашли основные уравнения теории геодезических отображений для случая геодезических отображений эквиаффинных многообразий на (псевдо)римановы пространства в форме системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Коши в ковариантных производных. Эти результаты были отправной точкой для М. Г. Иствуда и В. С. Матвеева [7] в исследовании геодезических отображений многообразий с проективной связностью.

В [13] доказано, что любое пространство аффинной связности локально проективно эквивалентно пространству с эквиаффинной связностью. Этот результат также действителен «в целом» [12].

В настоящей статье будет показано, что произвольное пространство проективной связности допускает «в целом» геодезическое отображение на некоторое пространство с эквиаффинной связностью.

Для решения задачи о проективной метризуемости пространства A_n (или, что равносильно, задачи нахождения геодезического отображения пространства A_n на (псевдо)римановы многообразия $\bar{V}_n$) мы находим геодезическое отображение на некоторое эквиаффинное многообразие $\tilde{A}_n$, которое проективно эквивалентно данному пространству A_n.

Так как многообразия с аффинной (или проективной) связностью имеют общие геодезические кривые с соответствующей симметрической аффинной (или проективной) связностью, мы ограничимся в дальнейшем изучением многообразий с симметрическими связностями.

2. Пространства аффинной связности

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_n = (M, \nabla)$, где M — многообразие и ∇ — аффинная связность. Предположим, что ∇ — связность без кручения, т. е. выполняется условие $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, где $[\,,\,]$ — скобка Ли: $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ для $f \in \mathcal{F}(M)$. Здесь и далее через $X, Y, \ldots$ обозначаем произвольные касательные векторы на многообразии M.

В локальных координатах $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ аффинная связность ∇ определяется совокупностью n^3 функций $\Gamma^h_{ij}(x)$, $h, i, j = 1, 2, \ldots, n$. При переходе к новым координатам $x' = x'(x)$ $(x = x(x'))$ эти компоненты преобразуются согласно следующему закону:

$$\Gamma'^h_{ij}(x') = \left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\big(x(x')\big)\frac{\partial x^\alpha(x')}{\partial x'^i}\,\frac{\partial x^\beta(x')}{\partial x'^j} + \frac{\partial^2 x^\gamma(x')}{\partial x'^i \partial x'^j}\right)\frac{\partial x'^h(x(x'))}{\partial x^\gamma}. \tag{1}$$

Этим трансформационным законом на многообразии определяется аффинная связность.

Аффинная связность ∇ не имеет кручения тогда и только тогда, когда во всех координатных окрестностях симметричны компоненты объекта аффинной связности: $\Gamma^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ji}(x)$. Поэтому многообразия A_n с аффинной связностью без кручения часто называют пространствами с симметрической связностью.

Кривизна R пространства аффинной связности A_n является тензором типа $(1, 3)$, определённым следующим образом:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{2}$$

Этот тензор часто называют тензором Римана.

На A_n вводится тензор Риччи Ric типа $(0,2)$ как след линейных отображений:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{trace}\{V \mapsto R(X,V)Y\}.$$

Многообразие A_n с аффинной связностью без кручения называется *эквиаффинным многообразием*, если его тензор Риччи симметричен: $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$ [3,5,14]. Это соотношение равносильно тому, что в любой координатной окрестности x существует функция $f(x)$, для которой $\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}(x) = \partial f(x)/\partial x^i$.

Хорошо известно [3, 5, 14], что (псевдо)римановы пространства являются эквиаффинными многообразиями и верно соотношение $\Gamma^{\alpha}_{i\alpha} = \partial\mathcal{G}(x)/\partial x^i$, где $\mathcal{G} = \sqrt{|\det\|g_{ij}\||}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора g и Γ^h_{ij} — символы Кристоффеля второго рода (т. е. компоненты связности Леви-Чивита ∇).

3. Основные свойства геодезических отображений

Пространство аффинной связности $A_n = (M,\nabla)$ допускает геодезическое отображение на $\bar{A}_n = (M,\bar{\nabla})$ тогда и только тогда, когда имеют место *уравнения Леви-Чивита* [2—6, 8—10, 14—16]:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi(X)Y + \psi(Y)X. \tag{3}$$

Здесь ∇ и $\bar{\nabla}$ — аффинные связности на A_n и $\bar{A}_n$ соответственно, ψ — линейная форма. Геодезическое отображение при $\psi \equiv 0$ является *тривиальным*, или *аффинным*.

Используя формулу (2) для тензора кривизны и условия (3) для геодезических отображений $A_n \to \bar{A}_n$, мы находим соотношения, связывающие тензоры кривизны R и $\bar{R}$ пространств A_n и $\bar{A}_n$:

$$\bar{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \big(\psi(X,Y) - \psi(Y,X)\big)Z + \psi(X,Z)Y - \psi(Y,Z)X, \tag{4}$$

где $\psi(X,Y) = \nabla_Y\psi(X) - \psi(X)\psi(Y)$. Производя операцию свёртки в формуле (4), мы получим следующее соотношение для тензоров Риччи:

$$\overline{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \mathrm{Ric}(X,Y) + n\psi(X,Y) - \psi(Y,X).$$

4. Объекты проективной связности и пространства проективной связности

Пусть имеется геодезическое отображение между пространствами аффинной связности $A_n = (M,\nabla)$ и $\bar{A}_n = (M,\bar{\nabla})$. Тогда имеют место уравнения Леви-Чивита (3). Свернём эти условия и выразим линейную форму ψ:

$$\psi(X) = \frac{1}{n+1}\,\mathrm{trace}(V \to \bar{\nabla}_V X - \nabla_V X).$$

Исключая $\psi(X)$ из уравнений Леви-Чивита (3), получаем, что

$$\bar{\Pi}(X,Y) = \Pi(X,Y) \quad \text{для всех} \quad X,Y \in \mathcal{X}(M), \tag{5}$$

где

$$\Pi(X,Y) = \nabla(X,Y) - \frac{1}{n+1}(\operatorname{trace}(V \to \nabla_V X) \cdot Y + \operatorname{trace}(V \to \nabla_V Y) \cdot X).$$

Аналогичным образом в $\bar{A}_n$ определяется $\bar{\Pi}$.

Геометрический объект Π, определённый выше, называется *объектом проективной связности Томаса* в пространстве A_n. В 1925 году эти объекты были получены Т. Томасом [15]. Очевидно, они инвариантны относительно геодезических отображений. Объект проективной связности Томаса является геометрическим объектом, компоненты которого при переходе к новым координатам $x' = x'(x)$ $(x = x(x'))$ преобразуются по закону

$$\Pi'^h_{ij}(x') = \left(\Pi^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} - \frac{1}{n{+}1}\left(\frac{\partial \ln\Delta}{\partial x'^i}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^j} + \frac{\partial \ln\Delta}{\partial x'^j}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^i}\right) + \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j}\right)\frac{\partial x'^h}{\partial x^\gamma},$$

где

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right).$$

Проделав несложные вычисления, можно убедиться, что условие (5) является не только необходимым для того, чтобы отображение $f\colon A_n \to \bar{A}_n$ было геодезическим, но и достаточным.

Геометрический объект Π, который преобразуется по закону, аналогичному закону преобразования объекта проективной связности Томаса, называют *проективной связностью*, и многообразие, на котором определена проективная связность, называют *пространством проективной связности*; обозначим его P_n. Введённые в рассмотрение пространства являются естественным обобщением пространств аффинной связности.

Проективную связность на P_n будем обозначать символом $\blacktriangledown$. Очевидно, что $\blacktriangledown$ является отображением $TP_n \times TP_n \to TP_n$, т. е. $(X,Y) \mapsto \blacktriangledown_X Y$. Поэтому можем обозначать многообразие M с проективной связностью $\blacktriangledown$ через $P_n = (M, \blacktriangledown)$. Компоненты $\blacktriangledown$ в координатах x будем обозначать $\Pi^h_{ij}(x)$; условимся, что $P_n \in C^r$, если $\Pi^h_{ij}(x) \in C^r$.

Очевидно, что произвольные (псевдо)римановы пространства и пространства аффинной связности являются пространствами проективной связности. В этом случае проективные параметры Томаса являются проективными связностями.

5. Геодезические отображения и эквиаффинные пространства «в целом»

Как мы заметили ранее, на всех упоминаемых многообразиях M можно ввести натуральным образом проективную связность $\blacktriangledown$. Покажем, что на любом многообразии M с проективной связностью $\blacktriangledown$ можно построить эквиаффинную связность $\bar{\nabla}$ так, что все геодезические линии пространства $P_n = (M, \blacktriangledown)$ являются одновременно геодезическими линиями $\bar{A}_n = (M, \bar{\nabla})$.

Теорема 1. *Любое пространство проективной связности $P_n \in C^1$ является проективно эквиаффинным.*

Замечание. Другими словами, любое пространство проективной связности $P_n \in C^1$ допускает геодезическое отображение «в целом» на пространство $\bar{A}_n$ с эквиаффинной связностью; более того, $\bar{A}_n \in C^1$.

Доказательство. Докажем существование геодезического отображения «в целом» пространства $P_n = (M, \blacktriangledown) \in C^1$ на пространство $\bar{A}_n = (M, \bar{\nabla})$ с эквиаффинной связностью $\bar{\nabla}$.

Как известно, на произвольном многообразии M можно построить «в целом» достаточно гладкую метрику $\tilde{g}$. Достаточно, чтобы $\tilde{g} \in C^2$, т. е. чтобы компоненты $\tilde{g}_{ij}$ метрики $\tilde{g}$ в координатных окрестностях M являлись функциями класса C^2. Через $\tilde{\nabla}$ обозначим связность Леви-Чивита метрики $\tilde{g}$.

Положим
$$\tau(X) = \frac{1}{n+1}\,\mathrm{trace}(V \mapsto \tilde{\nabla}_V X)$$
и построим $\bar{\nabla}$ следующим образом:
$$\bar{\nabla}_X Y = \blacktriangledown_X Y + \tau(X)\cdot Y + \tau(Y)\cdot X. \tag{6}$$
Легко убедиться, что построенная таким способом $\bar{\nabla}$ является аффинной связностью на M. Этот факт обосновывается тем, что компоненты $\bar{\nabla}$ преобразуются по закону трансформации объектов аффинной связности (1) при изменении координат.

Компоненты объекта $\bar{\nabla}$ на основании (6) в системе координат x можно записать следующим образом:
$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Pi^h_{ij}(x) + \tau_i(x)\cdot\delta^h_j + \tau_j(x)\cdot\delta^h_i, \tag{7}$$
где Π^h_{ij} и $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ — компоненты проективной связности $\blacktriangledown$ и аффинной связности $\bar{\nabla}$ соответственно,
$$\tau_i = \frac{1}{n+1}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x^i}, \quad \mathcal{G} = \ln\sqrt{|\det\|\tilde{g}_{ij}\|\,|}.$$
Следовательно, с помощью формулы (6), применённой к τ, мы построили «в целом» аффинную связность $\bar{\nabla}$ на M. Очевидно, что P_n допускает геодезическое отображение на пространство $\bar{A}_n = (M, \bar{\nabla})$ и, кроме того, так как $\bar{\Gamma}^h_{ij} \in C^1$, имеем, что $\bar{A}_n \in C^1$.

Осталось доказать, что пространство $\bar{A}_n$ эквиаффинное. Непосредственным вычислением убедимся, что $\bar{\Gamma}^\alpha_{i\alpha} = \partial\mathcal{G}/\partial x^i$. Это выражение эквивалентно условию симметричности тензора Риччи $\overline{\mathrm{Ric}}(X,Y) = \overline{\mathrm{Ric}}(Y,X)$, где $\overline{\mathrm{Ric}}$ — тензор Риччи пространства $\bar{A}_n$ (см. [3,5,14]). Это означает, что пространство $\bar{A}_n$ является эквиаффинным многообразием. $\square$

6. Геодезические отображения и эквиаффинные пространства «локально»

Ограничимся рассмотрением геодезического отображения пространства проективной связности P_n на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ области, охватывающей одну координатную окрестность $U(x) \subset P_n$. На этой окрестности будем считать, что $\tilde{g}$ — евклидова метрика $\tilde{g}_{ij}(x) = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$. Тогда формулы (7) запишутся в более простой форме:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Pi^h_{ij}(x). \tag{8}$$

Естественно, что в другой системе координат координатной окрестности U равенство (8) в общем случае не верно. Это вытекает из того, что $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ и $\Pi^h_{ij}(x)$ преобразуются по разным законам преобразования: закону преобразования аффинной связности (1) и закону преобразования проективной связности соответственно.

В данной системе координат $U(x)$ выполняется равенство $\bar{\Gamma}^\alpha_{i\alpha} = 0$. Очевидно, что пространство $\bar{A}_n$ имеет эквиаффинную связность.

Приведённое рассмотрение является конструктивным построением проективно соответствующей эквиаффинной связности для заданной проективной связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов MSM 6198959214 и MSM 0021630511 Чешской республики и чешско-венгерского гранта MEB 040907.

Литература

[1] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—246.

[2] Микеш Й. Геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2002. — Т. 11. — С. 121—162.

[3] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

[4] Петров А. З. Новые методы в теории относительности. — М.: Наука, 1965.

[5] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

[6] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. — М.; Л.: Гостехиздат, 1939 (т. I); М.: ИЛ, 1949 (т. II).

[7] Eastwood M., Matveev V. S. Metric connections in projective differential geometry // Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations (Minneapolis, MN, 2006). — New York: Springer, 2007. — (IMA Vol. Math. Appl.; Vol. 144). — P. 339—351.

[8] Eisenhart L. P. Non-Riemannian geometry. — Amer. Math. Soc., 2000. — (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; Vol. 8).

[9] Hall G. S., Lonie D. P. Projective equivalence of Einstein spaces in general relativity // Classical Quantum Gravity — 2009. — Vol. 26, no. 12. — P. 10.

[10] Levi-Civita T. Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche // Ann. Mat. Milano. — 1886. — Vol. 24, no. 2.

[11] Mikeš J., Berezovski V. Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. — 1989. — Vol. 56. — P. 491—494.

[12] Mikeš J., Hinterleitner I. On geodesic mappings of manifolds with affine connection. — 2009. — arXiv:math.DG/0905.1839v2.

[13] Mikeš J., Hinterleitner I., Kiosak V. On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations // Acta Phys. Debrecena. — 2006. — Vol. 861. — P. 428—435.

[14] Mikeš J., Kiosak V., Vanžurová A. Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection. — Olomouc: Palacký Univ. Press, 2008.

[15] Thomas T. Y. On projective and equiprojective geometries of paths // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1925. — No. 11. — P. 198—203.

[16] Weyl H. Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der Projectiven und der Konformen Auffassung // Göttinger Nachr. — 1921. — S. 99—112.