# Теоретико-категорный подход, естественно расширяющий фундаментальное понятие связности, и его приложение к геометрии дифференциальных систем

**Л. Е. ЕВТУШИК**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: ngus12@mail.ru

**О. М. ОМЕЛЬЯН**
*Российский государственный*
*университет им. И. Канта*
e-mail: olga_omelyan2002@mail.ru

УДК 514.76

**Ключевые слова:** связность, обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка.

**Аннотация**

Дано максимально возможное геометрически содержательное обобщение понятия связности в расслоённых пространствах, позволяющее адекватно строить геометрию обыкновенных дифференциальных систем любого порядка. Опираясь на развитую в этом направлении теорию нелинейных стабильных связностей, разработанную Л. Е. Евтушиком, авторы прилагают её к системам четвёртого порядка.

**Abstract**

*L. E. Evtushik, O. M. Omelyan, A category-theoretic approach extending the notion of connection in a natural way, and its application to the geometry of differential systems*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 55—63.

We give the widest geometrical generalization of the notion of connection in fiber spaces that allows one to adequately construct the geometry of ordinary differential systems of any order. In this area, there is a theory of nonlinear stable connections developed by the first author. Here we apply it to fourth-order systems.

Исторически понятие связности как структуры, проявляющейся в операции параллельного перенесения различных геометрических объектов на поверхностях или многообразиях, возникло при изучении внутренней геометрии поверхностей в классических пространствах, а также в геометрии римановых многообразий. В длительном процессе расширения категории изучаемых пространств и структур на гладких многообразиях (Эрлангенская программа, теория геометрических объектов и расслоённых пространств) понятие связности оформилось

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2010, том 16, № 1, с. 55—63.

в современное понятие связности в главных и ассоциированных с ними расслоённых пространствах. Связность в главном расслоении (а автоматически и во всех ассоциированных) определяется как распределение плоскостей, трансверсальных к слоям, инвариантное к действию структурной группы, сохраняющей слои расслоения. Это и обеспечивает вдоль каждой кривой базисного многообразия расслоения однозначно определённый изоморфизм слоёв, связанных с точками кривой (т. е. «параллельное перенесение»). Так определённый функтор из группоида кривых в базе расслоения в группоид изоморфизмов слоёв главного расслоения является конечной целью конструкции связности. Можно ли в рамках той же категории расслоённых пространств естественным образом расширить категорию дифференциально-геометрических структур, способных порождать функторы указанного выше типа функторов связности?

# 1.

Функторы, порождаемые классическим вариантом связностей в качестве инвариантных и трансверсальных к слоям распределений главного расслоения, характеризуются следующими геометрическими признаками:

1) кривые в базе, имеющие касание первого порядка, поднимаясь в расслоение для осуществления перенесения слоёв, также имеют касание первого порядка, одновременно в каждой точке соответствующего слоя касаясь плоскости распределения в указанной точке;
2) следовательно, каждый касательный к базе вектор порождает в соответствующем слое трансверсальное к этому слою векторное поле, принадлежащее распределению и вместе с этим распределением инвариантное относительно действия структурной группы на указанном слое;
3) при этом когда вектор в некоторой точке базы пробегает всё касательное пространство, соответствующие при поднятии трансверсальные к слою векторы заполняют плоскости распределения, трансверсальные к этому слою.

Этот анализ позволяет дать другое определение связности, не прибегая к понятию распределения. Пусть $\pi\colon H(X_n, G) \to X_n$ — произвольное главное расслоение со структурной группой Ли $G$, порождающей своим правым действием на расслоении $H$ слои $G_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in X_n$. Изоморфизмом двух слоёв $G_x$ и $G_y$ является любое их отображение $G_x \to G_y$, коммутирующее с действием группы $G$ на расслоении $H(X_n, G) \supset G_x, G_y$. Группоид Ли, образованный всеми изоморфизмами слоёв расслоения $H$, является расслоением над $X_n \times X_n$ размерности $2n + \dim G$ со слоями типа $G$. Так как действие $G$ на $H(X_n, G)$ сохраняет слои и проектируется с помощью канонической проекции $\pi$ в тождественное отображение базы $\mathrm{id}\colon X_n \to X_n$, то касательное отображение $d\pi\colon TH(X_n, G) \to T(X_n)$ порождает отображение

$$\hat{\pi}\colon \Pi(X_n) = TH(X_n, G)/G \to T(X_n) \to X_n,$$

где фактор-расслоение $\Pi(X_n)$ является векторным расслоением над $X_n$ с естественной проекцией $\hat{\pi}$ на $T(X_n)$. Элементами этого расслоения являются трансверсальные ко всевозможным слоям $G_x$ $G$-инвариантные «векторные поля» (щётки).

Назовём нелинейной связностью первого порядка в главном расслоении отображение

$$\gamma^1\colon T(X_n) \to \Pi(X_n), \quad \hat{\pi}\circ\gamma^1 = \mathrm{id}_{T(X_n)},$$

т. е. любое сечение $\Pi(X_n)$ над $T(X_n)$. Если отображение $\gamma^1$ является линейным для каждого касательного пространства $T_x(X_n)$, то этот случай тождествен заданию на расслоении $H(X_n, G)$ распределения, определяющего связность. Нетрудно обнаружить, что и в случае нелинейности $\gamma^1$ возникает функтор связности: вдоль каждой кривой $x(t) \in X_n$ однозначно определяется изоморфизм слоёв над этой кривой. Но мы максимально расширим круг возможностей построения функторов связности в расслоениях $H(X_n, G)$, если воспользуемся последовательностью расслоений $p$-скоростей любого порядка

$$T^p(X_n) \to T^{p-1}(X_n) \to \ldots \to T(X_n) \to X_n.$$

Функтор связности в расслоении $H(X_n, G)$ будет реализован, если будет задано отображение, не сводимое, вообще говоря, к меньшему порядку и тождественное по $T(X_n)$:

$$\begin{tikzcd}
\gamma^p\colon\ T^p(X_n) \arrow[r] \arrow[d] & TH(X_n, G)/G \arrow[d] \\
T(X_n) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & T(X_n)
\end{tikzcd} .$$

Действительно, вдоль любой $p$-гладкой кривой $x(t) \in X_n$ (и её $p$-скорости $j^p x(t)$) $\gamma^p\big(j^p(t)\big)$ представляет собой векторное поле в подрасслоении $\pi^{-1}\big(x(t)\big) \subset$ $\subset H(X_n, G)$ (с кривой $x(t)$ в качестве одномерной базы), трансверсальное к слоям расслоения $\pi^{-1}\big(x(t)\big)$ и $G$-инвариантное в подрасслоении $\pi^{-1}\big(x(t)\big)$ (согласно определению расслоения $\Pi(X_n)$). Интегральные кривые этого векторного поля, пронизывающие слои подрасслоения $\pi^{-1}\big(x(t)\big)$, также будут в совокупности $G$-инвариантны и поэтому реализуют изоморфизм слоёв над кривой $x(t)\colon G_{x(t)}$. Таким образом, отображение $\gamma^p$ определяет в расслоении $H(X_n, G)$ функтор связности. Будем называть отображение $\gamma^p\colon T^p(X_n) \to \Pi(X_n)$ нелинейной связностью в главном расслоении $H(X_n, G)$ порядка $p$. Стандартное определение связности входит в этот ряд с порядком $p = 1$ и линейным $\gamma^1$. Как видим, понятие нелинейной связности $\gamma^p$ оказалось в категории геометрических структур высших порядков. Первое картановское продолжение структурных уравнений показало, что с нелинейной связностью инвариантным образом ассоциируется так называемая присоединённая линейная связность в главном расслоении

$$H(X_n, G) \times_{T(X_n)} T^p(X_n) \to X_n,$$

находящаяся в весьма тесном геометрическом контакте с нелинейной связностью. Но ещё более плодотворным оказалось внедрение структуры нелинейной связности в категории естественных расслоений высших порядков. Речь идёт о категории расслоений, ассоциированных с главными расслоениями $p$-реперов $H^p(X_n)$ на гладком многообразии $X_n$. Одним из важнейших ассоциированных с $H^p(X_n)$ расслоений является расслоение $T^p(X_n)$ $p$-скоростей. Итак, мы переходим к нелинейным связностям в расслоениях $p$-реперов и их приложению к дифференциальным системам на $X_n$.

В общем случае в определении нелинейной связности для расслоения $H^p(X_n)$ имеем

$$\gamma_p^q\colon T^q(X_n) \to TH^p(X_n)/L_n^p,$$

где $L_n^p$ — структурная группа расслоения $H^p(X_n)$. Порядки $p$ и $q$ могут быть различны, но нам важен случай их совпадения, $\gamma_p^p = \gamma^p$, и важна исключительная особенность расслоения $TH^p(X_n)/L_n^p$ объектов перенесения: именно в случае расслоений реперов обнаружилось удивительное совпадение двух казалось бы различных конструкций:

$$TH^p(X_n)/L_n^p = J^p\big(T(X_n)\big),$$

где $J^p\big(T(X_n)\big)$ — расслоение $p$-струй сечений касательного расслоения $T(X_n)$. Мы приходим к окончательному определению нелинейной связности в расслоении $H^p(X_n)$:

$$\begin{tikzcd} \gamma^p\colon & T^p(X_n) \arrow[r] \arrow[d] & J^p\big(T(X_n)\big) \arrow[d] \\ & T(X_n) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & T(X_n) \end{tikzcd} .$$

В связи с этим приобретает исключительное значение и то обстоятельство, что расслоение $J^p\big(T(X_n)\big)$ имеет естественную проекцию на расслоение $(p+1)$-скоростей:

$$\varphi\colon J^p\big(T(X_n)\big) \to T^{p+1}(X_n) \to T^p(X_n) \to \ldots \to X_n,$$

так как в таком случае среди нелинейных связностей $\gamma^p$ выделяется класс, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \gamma^p\colon & T^p(X_n) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & J^p\big(T(X_n)\big) \arrow[d] \\ & & T^p(X_n) \end{tikzcd} . \tag{1}$$

Такие связности мы называем стабильными и сразу же констатируем замечательный факт: каждая стабильная связность в силу (1) порождает на многообразии $X_n$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $p+1$

(сечение $T^{p+1}(X_n)$ над $T^p(X_n)$)

$$T^p(X_n) \xrightarrow{\gamma^p} J^p\big(T(X_n)\big) \xrightarrow{\varphi} T^{p+1}(X_n),$$

интегральные кривые которой (и только они) являются автопараллельными линиями для связности $\gamma^p$. Заметим сразу же, что одной и той же системе $\varphi \circ \gamma^p$ отвечает с большим функциональным произволом целый массив связностей её порождающих. Поэтому для геометрии обыкновенных дифференциальных систем является решающим поиск в указанном массиве связностей единственной инвариантно присоединяемой к данной системе в рамках инвариантного метода Картана—Лаптева. Мы покажем, что уже для систем четвёртого порядка эта задача нетривиальна и помогает в её решении опыт, относящийся к системам третьего порядка [1].

## 2.

Переходя к описанию геометрии приводимых систем четвёртого порядка, можно с уверенностью ожидать результата, аналогичного полученному для приводимых систем третьего порядка. Наша цель — построение нелинейной стабильной связности, инвариантно связанной с приводимой системой четвёртого порядка

$$f^4 \colon T^3(V_n) \to T^4(V_n),$$

интегральные кривые которой играли бы роль обобщённых геодезических линий искомой связности. Теперь это связность третьего порядка

$$\gamma^3 \colon T^3(V_n) \to J^3\big(V_n, T(V_n)\big),$$

компоненты $\Gamma^i_k$, $\Gamma^i_{kl}$, $\Gamma^i_{klm}$ объекта которой должны подчиняться структурным уравнениям

$$\begin{aligned}
&\Delta\Gamma^i_k = d\Gamma^i_k + \Gamma^l_k\omega^i_l - \Gamma^i_l\omega^l_k + V^l_1\omega^i_{kl} = \Gamma^i_{kl}{}^s\Delta V^l_s,\\
&\Delta\Gamma^i_{kl} = d\Gamma^i_{kl} + \Gamma^m_{kl}\omega^i_m - 2\Gamma^i_{m(k}\omega^m_{l)} + 2\Gamma^m_{(k}\omega^i_{l)m} - \Gamma^i_m\omega^m_{kl} + V^m_1\omega^i_{klm} = \Gamma^i_{klm}{}^s\Delta V^m_s,\\
&\Delta\Gamma^i_{klm} = d\Gamma^i_{klm} + \Gamma^j_{klm}\omega^i_j - 3\Gamma^i_{j(kl}\omega^j_{m)} + 3\Gamma^j_{(kl}\omega^i_{m)j} - 3\Gamma^i_{j(k}\omega^j_{lm)} + 3\Gamma^j_{(k}\omega^i_{lm)j} -\\
&\quad - \Gamma^i_j\omega^j_{klm} + V^j_1\omega^i_{klmj} = \Gamma^i_{klmj}{}^s\Delta V^j_s, \quad s = 0, 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{2}$$

и условиям стабильности

$$\begin{aligned}
&\nabla_\gamma V^i_1 = V^i_2 - \Gamma^i_k V^k_1 \equiv 0,\\
&\nabla_\gamma V^i_2 = V^i_3 - \Gamma^i_k V^k_2 - \Gamma^i_{kl}V^k_1V^l_1 \equiv 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Исходным материалом для построения такой связности должны быть структурные уравнения сечения $f^4$, задающего приводимую систему четвёртого порядка

$$\begin{aligned}\Delta V_4^i &= dV_4^i + V_4^k\omega_k^i + (4V_3^kV_1^l + 3V_2^kV_2^l)\omega_{kl}^i + \\ &+ 6V_2^kV_1^lV_1^m\omega_{klm}^i + V_1^kV_1^lV_1^mV_1^j\omega_{klmj}^i = \\ &= V_{4k}^{i\,0}\omega^k + V_{4k}^{i\,1}(dV_1^k + V_1^l\omega_l^k) + V_{4k}^{i\,2}(dV_2^k + V_2^l\omega_l^k + V_1^lV_1^m\omega_{lm}^k) + \\ &+ V_{4k}^{i\,3}(dV_3^k + V_3^l\omega_l^k + 3V_2^lV_1^m\omega_{lm}^k + V_1^lV_1^mV_1^j\omega_{lmj}^k);\end{aligned}$$

их трёхкратное дифференциальное продолжение — структурные уравнения струи $j^3f^4$ для её компонент $V_{4k}^{i\hat{s}}$, $V_{4kl}^{i\hat{s}r}$, $V_{4klm}^{i3sr}$, $(\hat{s} = 1,2,3,\ s,r = 0,1,2,3)$:

$$\Delta V_{4k}^{i\hat{s}} = V_{4kl}^{i\hat{s}r}\Delta V_r^l, \quad \Delta V_{4kl}^{i\hat{s}r} = V_{4klm}^{i\hat{s}rq}\Delta V_q^m, \quad \Delta V_{4klm}^{i3sr} = V_{4klmj}^{i3srq}\Delta V_q^j, \tag{4}$$

явная запись которых здесь не приводится ввиду их громоздкости. Роль этих уравнений в построении всех необходимых объектов и в выполнении критерия охвата соответствующего объекта сводится к минимуму, так как основная нагрузка в конструировании связности ложится на оператор базисного дифференцирования третьего порядка $\delta^3$, определяемый самой системой $f^4$.

Первым шагом в уже известной схеме является запись трёх групп условий приводимости системы $f^4$ в исходной и выраженной через оператор

$$\delta^3\colon \delta_k^3 = ()_k^0 + ()_l^1\Gamma_{1k}^l + ()_l^2\Gamma_{2k}^l + ()_l^3\Gamma_{3k}^l$$

форме:

$$\begin{aligned}V_2^i &\equiv \frac{1}{4}V_{4k}^{i\,3}V_1^k = \Gamma_{1k}^iV_1^k, \\ V_3^i &\equiv \frac{1}{2}V_{4k}^{i\,3}V_2^k + \frac{1}{6}V_{4k}^{i\,2}V_1^k = \left(\frac{1}{6}V_{4k}^{i\,2} + \frac{1}{8}V_{4l}^{i\,3}V_{4k}^{l\,3}\right)V_1^k = \Gamma_{2k}^iV_1^k, \\ V_4^i &\equiv \frac{3}{4}V_{4k}^{i\,3}V_3^k + \frac{1}{2}V_{4k}^{i\,2}V_2^k + \frac{1}{4}V_{4k}^{i\,1}V_1^k = \\ &= \left(\frac{1}{4}V_{4k}^{i\,1} + \frac{1}{8}V_{4l}^{i\,2}V_{4k}^{l\,3} + \frac{1}{8}V_{4l}^{i\,3}V_{4k}^{l\,2} + \frac{3}{32}V_{4l}^{i\,3}V_{4m}^{l\,3}V_{4\ k}^{m3}\right)V_1^k = \Gamma_{3k}^iV_1^k.\end{aligned} \tag{5}$$

Из этой записи усматривается явное выражение для компонент $\Gamma_{1k}^i$, $\Gamma_{2k}^i$, $\Gamma_{3k}^i$ оператора $\delta^3$, причём последняя группа условий даёт специальную форму записи системы $f^4$ в координатах $jf^4$. Снова обращаем внимание на то, что

$$\Gamma_{1k}^i = \frac{1}{4}V_{4\,k}^{i3} = \Gamma_k^i$$

являются компонентами нелинейной связности

$$\gamma_3^1 = \delta^3(\tau)\colon T^3(V_n) \to J\big(V_n, T(V_n)\big),$$

а первая группа соотношений (5) получает геометрический смысл:

$$\nabla_\gamma V_1^i = V_2^i - \Gamma_k^iV_1^k \equiv 0, \tag{6}$$

что составляет первую группу условий стабильности искомой связности (3)

$$\gamma^3\colon T^3(V_n) \to J^3\big(V_n, T(V_n)\big),$$

проекция которой $\gamma^1_3 = \delta^3(\tau)$ тем самым определена.

Второй шаг — взятие полной производной от тождеств (6). Как и в случае систем $f^3$, получаем

$$\nabla_\gamma V^i_2 = V^i_3 - \Gamma^i_k V^k_2 - \Gamma^i_{kl} V^k_1 V^l_1 \equiv 0, \tag{7}$$

где система величин

$$\begin{aligned} \Gamma^i_k &= \frac{1}{4} V^{i\,3}_{4k}, \\ \Gamma^i_{kl} &= \delta^3_{(l}\Gamma^i_{k)} = \left(\frac{1}{4} V^{i\,3\;0}_{4(kl)} + V^{i\,3\;3}_{4m(k}\Gamma^m_{1l)} + V^{i\,2\;3}_{4m(k}\Gamma^m_{2l)} + V^{i\,3\;3}_{4m(k}\Gamma^m_{3l)}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

образует относительные компоненты объекта перенесения второго порядка. Только на этот раз тождества (7) совместно с (6) составляют полную систему условий стабильности искомой связности $\gamma^3(\Gamma^i_k, \Gamma^i_{kl}, \Gamma^i_{klm})$ с уже определившейся проекцией $\gamma^2_3(\Gamma^i_k, \Gamma^i_{kl})$, имеющей идентичное случаю $f^3$ происхождение: $\gamma^2_3 = \delta^{(3}\delta^{3)}(\tau)$. В системе $f^3$ соотношения (7) составляли финальную форму записи этой системы, тогда как для $f^4$ они образуют завершающую группу условий стабильности связности $\gamma^3(\Gamma^i_k, \Gamma^i_{kl}, \Gamma^i_{klm})$ с неизвестными пока старшими компонентами $\Gamma^i_{klm}$, которые надо так определить через координаты струи $j^3 f^4$, чтобы выполнялись структурные уравнения (2) для компоненты $\Gamma^i_{klm}$. О величинах $\Gamma^i_k$, $\Gamma^i_{kl}$ можно уже не беспокоиться: структурные уравнения (2) для них будут заведомо выполнены, так как связность $\gamma^2_3(\Gamma^i_k, \Gamma^i_{kl})$ получена в бескоординатной форме: $\gamma^2_3 = \delta^{(3}\delta^{3)}(\tau)$.

Третий, заключительный и более трудный шаг с целью определения $\Gamma^i_{klm}$ состоит в использовании уже третьей степени $(\delta^3)^3(\tau)$ действия оператора $\delta^3$. Как отмечалось выше, отображение

$$(\delta^3)^3(\tau)\colon T^3(V_n) \to \tilde{J}^3\big(V_n, t(V_n)\big)$$

действует в пространстве полуголономных струй. Образ $(\delta^3)^3(\tau)(t^3)$ задаётся объектом перенесения $\Gamma^i_k$ и его первой и второй базисными производными:

$$\delta^3_l \Gamma^i_k = \Gamma^i_{k|l} = \Gamma^{i\,0}_{kl} + \Gamma^{i\,1}_{km}\Gamma^m_{1l} + \Gamma^{i\,2}_{km}\Gamma^m_{2l} + \Gamma^{i\,3}_{km}\Gamma^m_{3l}, \tag{9}$$

$$\delta^3_m \Gamma^i_{k|l} = \Gamma^i_{k|l|m} = \Gamma^{i\;\;0}_{k|lm} + \Gamma^{i\;\;1}_{k|lj}\Gamma^j_{1m} + \Gamma^{i\;\;2}_{k|lm}\Gamma^j_{2m} + \Gamma^{i\;\;3}_{k|lj}\Gamma^j_{3m}. \tag{10}$$

Если симметризация $\Gamma^i_{k|l}$ даёт объект $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{(k|l)}$, $\Gamma^i_k$, т. е. объект перенесения второго порядка, то с величинами $\Gamma^i_{k|l|m}$ дело обстоит значительно сложнее.

Вторая группа условий стабильности (7) была получена из первой группы условий стабильности (6) применением оператора полной производной. Для систем $f^4$ четвёртого порядка оператор полной производной следует применить к тождествам (7) и учесть, что $\Gamma^i_{kl} V^k_1 V^l_1 = \Gamma^i_{k|l} V^k_1 V^l_1$:

$$\delta_t^3(V_3^i - \Gamma_k^i V_2^k - \Gamma_{k|l}^i V_1^k V_1^l) =$$
$$= V_4^i - \Gamma_k^i V_3^k - 3\Gamma_{kl}^i V_2^k V_1^l - (\Gamma_{[k|l]}^i V_2^k V_1^l + \Gamma_{k|l|m}^i V_1^k V_1^l V_1^m) = 0. \quad (11)$$

Полученная таким способом форма записи системы $f^4$ будет преобразована следующим образом. Найдём дифференциальное продолжение второй группы тождеств в (5) по $V_3^k$ (в натуральном поле реперов это означает дифференцирование этих тождеств по аргументам $\dddot{x}^k$):

$$V_{4k}^{i\,3} \equiv V_{4kl}^{i\,31} \cdot V_1^l + 2V_{4kl}^{i\,32} \cdot V_2^l + 3V_{4kl}^{i\,33} \cdot V_3^l.$$

Тогда

$$V_{4k}^{i\,3} \equiv (V_{4kl}^{i\,31} + 2V_{4km}^{i\,32}\Gamma_{1l}^m + 3V_{4km}^{i\,33}\Gamma_{2l}^m)V_1^l.$$

Учитывая это, проведём в (11) замену

$$V_2^i = \Gamma_{1m}^i V_1^m = \frac{1}{4}V_{4m}^{i\,3}V_1^m = \frac{1}{4}(V_{4kl}^{i\,31} + 2V_{4km}^{i\,32}\Gamma_{1l}^m + 3V_{4km}^{i\,33}\Gamma_{2l}^m)V_1^k V_1^l = \gamma_{kl}^i V_1^k V_1^l,$$

где

$$\gamma_{kl}^i = \frac{1}{4}(V_{4kl}^{i\,31} + 2V_{4km}^{i\,32}\Gamma_{1l}^m + 3V_{4km}^{i\,33}\Gamma_{2l}^m). \quad (12)$$

Как можно проверить по структурным уравнениям $j^2 f^4$, $\gamma_{kl}^i$ образуют компоненты обычного объекта аффинной связности, зависящего от элементов расслоения $T^3(V_n)$. Таким образом, запись (11) системы $f^4$ приобретает окончательную форму

$$V_4^i - \Gamma_k^i V_3^k - 3\Gamma_{kl}^i V_2^k V_1^l - \Gamma_{klm}^i V_1^k V_1^l V_1^m = 0,$$

где

$$\Gamma_{klm}^i = \Gamma_{[j|(k]}^i \gamma_{lm)}^j + \Gamma_{(k|l|m)}^i, \quad (13)$$

выражаясь в конечном счёте через координаты $j^3 f^4$, составляют совместно с $\Gamma_{kl}^i$, $\Gamma_k^i$, $V_1^i$ компоненты объекта нелинейной стабильной в силу (6), (7) связности $\gamma^3$ в расслоении $H^3(V_n)$ реперов третьего порядка. Для проверки этого утверждения следует установить, что выражения (13) через координаты струи $j^3 f^4$ в силу структурных уравнений (4) для них, записанных в развёрнутой форме, подчиняются уравнениям структуры (2). Доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Существует естественный морфизм*

$$\Phi\colon J^3\big(T^3(V_n), T^4(V_n)\big) \to J^3\big(V_n, T(V_n)\big),$$

*определяемый в инвариантной форме* (см. (8)—(10), (12), (13)), *который ставит в соответствие дифференциальной системе*

$$f^4\colon T^3(V_n) \to T^4(V_n)$$

*нелинейную связность*

$$\gamma^3 = \Phi \circ j^3 f^4\colon T^3(V_n) \to J^3\big(V_n, T(V_n)\big).$$

*Если система $f^4$ сильно приводима, то связность $\gamma^3$ стабильна и определяемая ею система*

$$\varphi_2 \circ \gamma^3\colon T^3(V_n) \to T^4(V_n)$$

*совпадает с $f^4$, интегральные кривые $x(t) \in V_n$ которой (и только они) имеют автопараллельную относительно $\gamma^3$ скорость третьего порядка $\nabla_\gamma j^3_t x(t) = 0$.*

Из полученного результата можно вывести признак правильных систем $f^4$:

$$\Gamma^i_{[k|l]} \equiv 0, \quad \Gamma^i_{(k|l|m)} \equiv \Gamma^i_{k|l|m}.$$

Успешно решается центральная задача построения морфизма $\Phi$, сводящего всю геометрию системы к геометрии нелинейной стабильной связности

$$\gamma^3 \colon \Gamma^i_k, \Gamma^i_{kl}, \Gamma^i_{klm},$$

что утверждает, например, последняя теорема для систем четвёртого порядка. Явные формулы морфизма $\Phi$ для систем третьего порядка приведены и вполне обозримы, чего нельзя сказать о явных формулах выражения компонент объекта связности $\Gamma^i_k$, $\Gamma^i_{kl}$, $\Gamma^i_{klm}$ системы $f^4$ через компоненты $j^3 f^4$, т. е. фактически через производные правой части системы до третьего порядка включительно. Впрочем, самую простую часть формул морфизма $\Phi$ для компонент $\Gamma^i_k$, $\Gamma^i_{kl}$, сравнимую с соответствующими формулами для $f^3$, мы выпишем:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^i_k = \frac{1}{4} V^{i\,3}_{4k}, \quad \Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{(k|l)},\\
&\Gamma^i_{k|l} = \left[\frac{1}{4} V^{i\,30}_{4kl} + \frac{1}{4} V^{i\,1\,\,3}_{4mk} V^{m3}_{4\,\,l} + \frac{1}{6} V^{i\,2\,\,3}_{4mk} V^{m2}_{4\,\,l} + \frac{1}{4} V^{i\,3\,\,3}_{4mk} V^{m1}_{4\,\,l} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{8} V^{i\,2\,\,3}_{4mk} V^{m3}_{4\,\,j} V^{j3}_{4l} + \frac{1}{8} V^{i\,3\,\,3}_{4mk} (V^{m2}_{4\,\,j} V^{j3}_{4l} + V^{m2}_{4\,\,j} V^{j2}_{4l}) + \frac{3}{32} V^{i\,3\,\,3}_{4mk} V^{m3}_{4\,\,j} V^{j3}_{4r} V^{r3}_{4l}\right].
\end{aligned}$$

Однако формулы для $\Gamma^i_{klm}$ уже необозримы и содержат не 8, как в предыдущих формулах, а 224 члена. Значит ли это, что с таким объектом нельзя работать? Отнюдь нет, так как мы имеем простое выражение (13) $\Gamma^i_{klm}$ в терминах оператора $\delta^3$ и определяемой им операции. Как мы знаем, оператор $\delta$ по формулам изоморфизма $\psi$ вполне вычислим. Его действие на любой объект также легко вычислимо по известным универсальным формулам. Поскольку оператор $\delta$ сам определяет породившую его приводимую систему, все инвариантные свойства системы могут быть выражены в терминах $\delta$ и его повторных действий. Эти возможности оператора $\delta$ и проявились в полной мере в построении определяющей геометрической структуры — нелинейной стабильной связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант РНП 2.1.1.3704).

## Литература

[1] Евтушик Л. Е. Неевклидовы геометрии на основе обыкновенных дифференциальных систем высших порядков // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1994. — № 2. — С. 86—98.