4-ткани на гиперповерхностях 4-аксиального пространства

В. В. ЗАБРОДИН
Тверской государственный университет
e-mail: ZabrodinVV@mail.ru

УДК 514.763.7

Ключевые слова: 4-ткань, 4-аксиальное пространство, форма связности, кручение, кривизна.

Аннотация

В. Б. Лазарева исследовала 3-ткань, образованную на поверхности проективного пространства линиями тени, причём предполагалось, что источники освещения находятся на трёх фиксированных прямых. Полученные результаты были использованы, в частности, для решения проблемы Бляшке о классификации регулярных 3-тканей, образованных пучками окружностей. В настоящей работе на тангенциально невырожденной гиперповерхности V четырёхмерного проективного пространства рассматривается 4-ткань W, образованная поверхностями тени, причём источники освещения находятся на четырёх фиксированных прямых. Проективное пространство с четырьмя фиксированными прямыми названо 4-аксиальным. Для него построено семейство адаптированных реперов и найдены уравнения структуры. Далее семейство реперов адаптировано к гиперповерхности V, несущей 4-ткань W. Найдены структурные уравнения гиперповерхности V, её асимптотический тензор в адаптированном репере, кручения и кривизны ткани W, форма инвариантной связности, присоединённой к 3-ткани W.

Abstract

V. V. Zabrodin, 4-webs on hypersurfaces of 4-axial space, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 65—79.

V. B. Lazareva investigated 3-webs formed by shadow lines on a surface embedded in 3-dimensional projective space is assuming that the lighting sources are situated on 3 straight lines. The results were used, in particular, for the solution of Blaschke problem of classification of regular 3-webs formed by pencils of circles in a plane. In the present paper, we consider a 4-web W formed by shadow surfaces on a hypersurface V embedded in 4-dimensional projective space assuming that the lighting sources are situated on 4 straight lines. We call the projective 4-space with 4 fixed straight lines a 4-axial space. Structure equations of 4-axial space and of the surface V, asymptotic tensor of V, torsions and curvatures of 4-web W, and connection form of invariant affine connection associated with 4-web W are found.

1. Рассмотрим в четырёхмерном проективном пространстве P^4 подвижной репер, состоящий из пяти линейно независимых точек $\{A_\xi\}$, $\xi, \eta, \zeta, \ldots = 0, 1, \ldots, 4$. Инфинитезимальные перемещения репера $\{A_\xi\}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$dA_\xi = \omega_\xi^\eta A_\eta, \tag{1}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 65—79.

где ω_ξ^η — формы Пфаффа, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$d\omega_\xi^\eta = \omega_\xi^\zeta \wedge \omega_\zeta^\eta. \tag{2}$$

Нормируем координаты точек A_ξ так, чтобы их внешнее произведение было равно единице. Тогда

$$\sum_\xi \omega_\xi^\xi = 0. \tag{3}$$

Фиксируем в P^4 четыре различные прямые l_i, $i, j, k, \ldots = \overline{1,4}$. Такое пространство назовём 4-*аксиальным* и обозначим через T^4, а прямые l_i назовём *абсолютными прямыми* этого пространства [5, 6].

Специализируем репер, поместив точку A_i на прямую l_i так, чтобы плоскость $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ не содержала ни одной из прямых l_i. Очевидно, такой выбор репера невозможен, если прямые l_i лежат в одной двумерной или трёхмерной плоскости.

Так как точка A_i описывает прямую l_i, то из четырёх форм ω_i^0, ω_i^j, $j \neq i$, должна быть только одна независимая. Очевидно, что $\omega_i^0 \neq 0$, так как в противном случае прямая l_i принадлежит плоскости $[A_1, A_2, A_3, A_4]$. Поэтому можно положить

$$\omega_i^j = \lambda_i^j \omega_i^0, \quad j \neq i. \tag{4}$$

Тогда

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i^0 B_i, \tag{5}$$

где по индексу i суммирования нет и

$$B_i = A_0 + \sum_{j \neq i} \lambda_i^j A_j = A_0 + \bar{B}_i. \tag{6}$$

Дифференцируя соотношения (6), получим

$$dB_i = \Big(\omega_0^i + \sum_{j \neq i} \lambda_i^j \omega_j^i\Big) A_i + \Big(\omega_0^0 + \sum_{j \neq i} \lambda_i^j \omega_j^0\Big) B_i + \\ + \sum_{k \neq i} \Big(d\lambda_i^k + \omega_0^k - \lambda_i^k \omega_0^0 + \sum_{j \neq i} \lambda_i^j \omega_j^k - \sum_{j \neq i} \lambda_i^j \lambda_i^k \omega_j^0\Big) A_k. \tag{7}$$

Так как прямые l_i неподвижны, то $dB_i = p_i A_i + q_i B_i$. Поэтому, приравнивая в (7) коэффициенты при независимых точках A_k нулю, получаем

$$d\lambda_i^k + \omega_0^k - \lambda_i^k \omega_0^0 + \sum_{j \neq i} \lambda_i^j \omega_j^k - \sum_{j \neq i} \lambda_i^j \lambda_i^k \omega_j^0 = 0.$$

Учитывая (4), перепишем последние уравнения в виде

$$d\lambda_i^k + \omega_0^k - \lambda_i^k \omega_0^0 + \lambda_i^k \omega_k^k - (\lambda_i^k)^2 \omega_k^0 + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} \lambda_i^j (\lambda_j^k - \lambda_i^k) \omega_j^0 = 0, \tag{8}$$

причём здесь все индексы i, j, k различны. Непосредственным вычислением проверяется, что система уравнений (8) вполне интегрируема.

Таким образом, семейство адаптированных реперов пространства T^4 зависит от двенадцати параметров, дифференциалы которых содержатся в двенадцати линейно независимых формах ω_i^0, ω_i^i, ω_0^i. Из них четыре параметра определяют положение точек A_i на абсолютных прямых l_i. Эти параметры назовём *главными*.

Формы ω_i^0 являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов главных параметров. Если зафиксировать главные параметры, т. е. положить $\omega_i^0 = 0$, то трёхмерная плоскость, определяемая точками A_i, станет неподвижной. Таким образом, стационарная подгруппа этой плоскости зависит от восьми параметров, которые называются *вторичными*. Далее будем обозначать через δ символ дифференцирования по вторичным параметрам, а через π_ξ^η — значения форм ω_ξ^η при фиксированных главных параметрах.

Зафиксируем главные параметры. Тогда $\omega_i^0 = 0$, и из уравнений (4) следует, что $\pi_i^j = 0$, $j \neq i$, а уравнения (8) дают

$$\delta\lambda_i^j - \lambda_i^j(\pi_0^0 - \pi_j^j) + \pi_0^j = 0. \tag{9}$$

2. Рассмотрим в 4-аксиальном пространстве T^4 гладкую тангенциально невырожденную гиперповерхность V [2]. Пусть π — касательная плоскость гиперповерхности V в текущей точке M. Поместим точки A_i репера $\{A_\xi\}$ в точки пересечения плоскости π с абсолютными прямыми l_i. Тогда $M = x^i A_i$, и в силу (1)

$$dM = dx^i A_i + x^i(\omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j) = (dx^i + x^j\omega_j^i)A_i + x^i\omega_i^0 A_0.$$

Так как $dM \in [A_1, A_2, A_3, A_4]$, то

$$x^i\omega_i^0 = 0. \tag{10}$$

Нормируем репер $\{A_\xi\}$ условием

$$M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0 + \omega_4^0 = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) представляет собой дифференциальное уравнение гиперповерхности V. Так как три точки, принадлежащие различным абсолютным прямым, определяют однозначно касательную плоскость π, то любые три из четырёх форм ω_i^0 линейно независимы и их можно взять в качестве базисных.

Дифференцируя внешним образом уравнение (12), получим

$$\tilde\omega^1 \wedge \omega_1^0 + \tilde\omega^2 \wedge \omega_2^0 + \tilde\omega^3 \wedge \omega_3^0 + \tilde\omega^4 \wedge \omega_4^0 = 0, \tag{13}$$

где обозначено

$$\tilde\omega^i = \omega_1^i + \omega_2^i + \omega_3^i + \omega_4^i. \tag{14}$$

В этих обозначениях имеем

$$dM = \tilde{\omega}^i A_i. \tag{15}$$

Выразим в (12) форму ω_4^0 через остальные три формы:

$$\omega_4^0 = -\omega_1^0 - \omega_2^0 - \omega_3^0,$$

и подставим это выражение в уравнение (13). После преобразований получим

$$(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^4) \wedge \omega_1^0 + (\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^4) \wedge \omega_2^0 + (\tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}^4) \wedge \omega_3^0 = 0.$$

По лемме Картана имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^4 &= a^{11}\omega_1^0 + a^{12}\omega_2^0 + a^{13}\omega_3^0, \\ \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^4 &= a^{21}\omega_1^0 + a^{22}\omega_2^0 + a^{23}\omega_3^0, \\ \tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}^4 &= a^{31}\omega_1^0 + a^{32}\omega_2^0 + a^{33}\omega_3^0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $a^{uv} = a^{vu}$, $u, v, w = \overline{1, 3}$. Следовательно, формы $\tilde{\omega}^v$ могут быть представлены в виде

$$\tilde{\omega}^v = \tilde{\omega}^4 + a^{vu}\omega_u^0. \tag{17}$$

Используя обозначения (14), перепишем последние уравнения в виде

$$\omega_1^v + \omega_2^v + \omega_3^v + \omega_4^v = \tilde{\omega}^4 + a^{vu}\omega_u^0.$$

Положим $v = 1$:

$$\omega_1^1 + \omega_2^1 + \omega_3^1 + \omega_4^1 = \tilde{\omega}^4 + a^{1u}\omega_u^0.$$

Используя формулу (4), запишем

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= \tilde{\omega}^4 - \lambda_2^1\omega_2^0 - \lambda_3^1\omega_3^0 - \lambda_4^1\omega_4^0 + a^{1u}\omega_u^0 = \\ &= \tilde{\omega}^4 + (a^{11} + \lambda_4^1)\omega_1^0 + (a^{12} + \lambda_4^1 - \lambda_2^1)\omega_2^0 + (a^{13} + \lambda_4^1 - \lambda_3^1)\omega_3^0. \end{aligned}$$

Используя соотношения (14) и (4), найдём форму ω_4^4:

$$\omega_4^4 = \tilde{\omega}^4 - \lambda_1^4\omega_1^0 - \lambda_2^4\omega_2^0 - \lambda_3^4\omega_3^0.$$

Формулы для ω_2^2 и ω_3^3 выводим аналогично. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= \tilde{\omega}^4 - \omega_2^1 - \omega_3^1 - \omega_4^1 + a^{11}\omega_1^0 + a^{12}\omega_2^0 + a^{13}\omega_3^0, \\ \omega_2^2 &= \tilde{\omega}^4 - \omega_1^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2 + a^{12}\omega_1^0 + a^{22}\omega_2^0 + a^{23}\omega_3^0, \\ \omega_3^3 &= \tilde{\omega}^4 - \omega_1^3 - \omega_2^3 - \omega_4^3 + a^{13}\omega_1^0 + a^{23}\omega_2^0 + a^{33}\omega_3^0, \\ \omega_4^4 &= \tilde{\omega}^4 - \omega_1^4 - \omega_2^4 - \omega_3^4, \end{aligned} \tag{18}$$

или

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= \tilde{\omega}^4 + (a^{11} + \lambda_4^1)\omega_1^0 + (a^{12} + \lambda_4^1 - \lambda_2^1)\omega_2^0 + (a^{13} + \lambda_4^1 - \lambda_3^1)\omega_3^0, \\ \omega_2^2 &= \tilde{\omega}^4 + (a^{12} + \lambda_4^2 - \lambda_1^2)\omega_1^0 + (a^{22} + \lambda_4^2)\omega_2^0 + (a^{23} + \lambda_4^2 - \lambda_3^2)\omega_3^0, \\ \omega_3^3 &= \tilde{\omega}^4 + (a^{13} + \lambda_4^3 - \lambda_1^3)\omega_1^0 + (a^{23} + \lambda_4^3 - \lambda_2^3)\omega_2^0 + (a^{33} + \lambda_4^3)\omega_3^0, \\ \omega_4^4 &= \tilde{\omega}^4 - \lambda_1^4\omega_1^0 - \lambda_2^4\omega_2^0 - \lambda_3^4\omega_3^0. \end{aligned} \tag{19}$$

Перепишем формулы (19) также в форме

$$\begin{aligned} \omega_u^u &= \tilde{\omega}^4 - \sum_{\substack{w=1\\ w\neq u}}^{3} \lambda_w^u \omega_w^0 + \sum_{w=1}^{3} (a^{uw} + \lambda_4^u)\omega_w^0, \\ \omega_4^4 &= \tilde{\omega}^4 - \sum_{w=1}^{3} \lambda_w^4 \omega_w^0. \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения (19) показывают, что после проведённой канонизации семейство адаптированных реперов зависит от одного вторичного параметра, дифференциал которого содержится в форме $\tilde{\omega}^4$.

3. Найдём асимптотическую квадратичную форму гиперповерхности V. Для этого вычислим второй дифференциал точки $M \in V$. Используя уравнение (15), запишем

$$d^2M = d\tilde{\omega}^i A_i + \tilde{\omega}^i(\omega_i^\zeta A_\zeta),$$

или

$$d^2M = d\tilde{\omega}^i A_i + \tilde{\omega}^i(\omega_i^j A_j + \omega_i^0 A_0). \tag{21}$$

Отсюда следует, что асимптотическая квадратичная форма гиперповерхности V имеет вид

$$\varphi = \tilde{\omega}^i \omega_i^0 = \tilde{\omega}^u \omega_u^0 + \tilde{\omega}^4 \omega_4^0 = (\tilde{\omega}^4 + a^{uv}\omega_v^0)\omega_u^0 + \tilde{\omega}^4 \omega_4^0 = a^{uv}\omega_u^0 \omega_v^0. \tag{22}$$

Так как формы ω_1^0, ω_2^0, ω_3^0 являются независимыми, то асимптотический тензор гиперповерхности V есть a^{uv}.

Дискриминант a асимптотической формы φ запишется следующим образом:

$$a = a^{11}a^{22}a^{33} + 2a^{12}a^{13}a^{23} - a^{11}(a^{23})^2 - a^{22}(a^{13})^2 - a^{33}(a^{12})^2.$$

В дальнейшем будем предполагать, что гиперповерхность V тангенциально невырожденная. Вследствие этого предположения дискриминант a должен быть отличен от нуля [2].

Обозначим обратную матрицу к матрице A через $\tilde{A} = (\tilde{a}_{uv})$. Тогда

$$\tilde{A} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a^{22}a^{33} - (a^{23})^2 & a^{13}a^{23} - a^{33}a^{12} & a^{12}a^{23} - a^{22}a^{13} \\ a^{13}a^{23} - a^{33}a^{12} & a^{11}a^{33} - (a^{13})^2 & a^{12}a^{13} - a^{11}a^{23} \\ a^{12}a^{23} - a^{22}a^{13} & a^{12}a^{13} - a^{11}a^{23} & a^{11}a^{22} - (a^{12})^2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

4. Абсолютная прямая l_i определяет на гладкой тангенциально невырожденной гиперповерхности V сеть Кёнигса. Одно семейство сети (обозначим его s_i) образовано поверхностями тени. Они получаются следующим образом. Фиксируем точку A на прямой l_i, через неё проходит двупараметрическое семейство касательных плоскостей к гиперповерхности V. Множество точек касания и образует поверхность тени. Перемещая точку A по l_i, получим расслоение гиперповерхности V на ∞^1-двумерных поверхностей из семейства s_i (предполагается, что расслоение всегда локальное).

Второе семейство линий, образующих сеть Кёнигса (обозначим его s_i^*), состоит из плоских кривых, полученных пересечением гиперповерхности V с двумерными плоскостями, содержащими прямую l_i.

Семейства s_i, $i=\overline{1,4}$, двумерных поверхностей образуют на V 4-ткань [11], которую мы обозначим через W.

Двумерных плоскостей, содержащих прямую l_i, двупараметрическое семейство. Поэтому четыре семейства кривых s_i^* образуют 4-ткань в смысле Бляшке [4]. Обозначим её W^*.

Как известно [3], для каждого i семейства s_i и s_i^* являются сопряжёнными, т. е. в каждой точке гиперповерхности направления, касательные к двумерной поверхности s_i и к кривой s_i^*, сопряжены относительно асимптотического тензора гиперповерхности V. Поэтому ткани W и W^* будем называть сопряжёнными.

Гиперповерхность V устанавливает точечное соответствие [9] между прямыми l_i следующим образом. Пусть M_0 — произвольная точка гиперповерхности V, A_i^0 — точки пересечения касательной плоскости к V в точке M_0 с прямыми l_i и U_i — достаточно малые окрестности этих точек на прямых l_i. Тогда для любых точек $A_1\in U_1$, $A_2\in U_2$ и $A_3\in U_3$ существует единственная плоскость π, касательная к V, проходящая через A_1, A_2, A_3. Положим $A_4=l_4\cap\pi$. Устанавливаемое таким образом соответствие $A_4=q(A_1,A_2,A_3)$ является локальной дифференцируемой тернарной квазигруппой [11]. Квазигруппа q является координатной квазигруппой ткани W.

Заметим, что для сопряжённой 4-ткани W^* понятия квазигруппы не существует.

5. Как известно из [11], к произвольной $(n+1)$-ткани может быть присоединена инвариантным образом некоторая аффинная связность Г. Следуя [11], найдём форму γ этой связности. Вычислим сначала внешние дифференциалы форм ω_i^0. Используя соотношения (2), (4) и (19), находим, что

$$\begin{aligned}
d\omega_1^0 &= \omega_1^\zeta\wedge\omega_\zeta^0=\omega_1^0\wedge\omega_0^0+\omega_1^1\wedge\omega_1^0+\omega_1^2\wedge\omega_2^0+\omega_1^3\wedge\omega_3^0+\omega_1^4\wedge\omega_4^0=\\
&=\omega_1^0\wedge(\omega_0^0-\omega_1^1+\lambda_1^2\omega_2^0+\lambda_1^3\omega_3^0+\lambda_1^4\omega_4^0)=\\
&=\omega_1^0\wedge(\omega_0^0-\omega_1^1+(\lambda_1^2-\lambda_1^4)\omega_2^0+(\lambda_1^3-\lambda_1^4)\omega_3^0)=\\
&=\omega_1^0\wedge(\omega_0^0-\tilde\omega^4+(-a^{12}+\lambda_2^1+\lambda_1^2-\lambda_4^1-\lambda_1^4)\omega_2^0+\\
&\quad+(-a^{13}+\lambda_3^1+\lambda_1^3-\lambda_4^1-\lambda_1^4)\omega_3^0).
\end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}
d\omega_2^0 &= \omega_2^0\wedge(\omega_0^0-\tilde\omega^4+(-a^{12}+\lambda_2^1+\lambda_1^2-\lambda_4^2-\lambda_2^4)\omega_1^0+\\
&\quad+(-a^{23}+\lambda_3^2+\lambda_2^3-\lambda_4^2-\lambda_2^4)\omega_3^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_3^0 &= \omega_3^0\wedge(\omega_0^0-\tilde\omega^4+(-a^{13}+\lambda_3^1+\lambda_1^3-\lambda_4^3-\lambda_3^4)\omega_1^0+\\
&\quad+(-a^{23}+\lambda_3^2+\lambda_2^3-\lambda_4^3-\lambda_3^4)\omega_3^0),
\end{aligned}$$

$$d\omega_4^0=\omega_4^0\wedge(\omega_0^0-\tilde\omega^4+(\lambda_4^1+\lambda_1^4)\omega_1^0+(\lambda_4^2+\lambda_2^4)\omega_2^0+(\lambda_4^3+\lambda_3^4)\omega_3^0).$$

Таким образом, найденные соотношения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} d\omega_1^0 &= \omega_1^0 \wedge \gamma + \alpha^{12}\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \alpha^{13}\omega_1^0 \wedge \omega_3^0, \\ d\omega_2^0 &= \omega_2^0 \wedge \gamma + \alpha^{21}\omega_2^0 \wedge \omega_1^0 + \alpha^{23}\omega_2^0 \wedge \omega_3^0, \\ d\omega_3^0 &= \omega_3^0 \wedge \gamma + \alpha^{31}\omega_3^0 \wedge \omega_1^0 + \alpha^{32}\omega_3^0 \wedge \omega_2^0, \\ d\omega_4^0 &= \omega_4^0 \wedge \gamma, \end{aligned} \tag{24}$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\gamma = \omega_0^0 - \tilde{\omega}^4 + (\lambda_4^1 + \lambda_1^4)\omega_1^0 + (\lambda_4^2 + \lambda_2^4)\omega_2^0 + (\lambda_4^3 + \lambda_3^4)\omega_3^0, \\ &\alpha^{12} = \alpha^{21} = -a^{12} + \lambda_2^1 - \lambda_4^1 + \lambda_1^2 - \lambda_4^2 + \lambda_3^4, \\ &\alpha^{13} = \alpha^{31} = -a^{13} + \lambda_3^1 - \lambda_4^1 + \lambda_1^3 - \lambda_4^3 + \lambda_2^4, \\ &\alpha^{23} = \alpha^{32} = -a^{23} + \lambda_3^2 - \lambda_4^2 + \lambda_2^3 - \lambda_4^3 + \lambda_1^4. \end{aligned} \tag{25}$$

Согласно [11] форма Пфаффа γ представляет собой *форму связности* ткани W, а величины α^{uv} являются *кручениями* этой ткани.

Вычислим форму ω_0^0. Пользуясь формулами (3) и (19), находим, что

$$\begin{aligned} \omega_0^0 &= -\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 = \\ &= -4\tilde{\omega}^4 - (a^{11} + a^{12} + a^{13} + \lambda_4^1 + \lambda_4^2 + \lambda_4^3 - \lambda_1^2 - \lambda_1^3 - \lambda_1^4)\omega_1^0 - \\ &- (a^{12} + a^{22} + a^{23} + \lambda_4^1 + \lambda_4^2 + \lambda_4^3 - \lambda_2^1 - \lambda_2^3 - \lambda_2^4)\omega_2^0 - \\ &- (a^{13} + a^{23} + a^{33} + \lambda_4^1 + \lambda_4^2 + \lambda_4^3 - \lambda_3^1 - \lambda_3^2 - \lambda_3^4)\omega_3^0. \end{aligned} \tag{26}$$

Используя полученное выражение, перепишем форму γ в обозначениях (25) в виде

$$\gamma = -5\tilde{\omega}^4 + A^u\omega_u^0, \tag{27}$$

где

$$A^u = -a^{u1} - a^{u2} - a^{u3} + \lambda_u^v - \lambda_4^v + \lambda_u^w - \lambda_4^w + 2\lambda_u^4 \tag{28}$$

и u, v, w различны.

Учитывая обозначения (28), перепишем (26) следующим образом:

$$\omega_0^0 = -4\tilde{\omega}^4 + \sum_{w=1}^{3}(A^w - \lambda_4^w - \lambda_w^4)\omega_w^0, \tag{29}$$

или

$$\omega_0^0 = \gamma + \tilde{\omega}^4 - \sum_{w=1}^{3}(\lambda_4^w + \lambda_w^4)\omega_w^0. \tag{30}$$

6. Проведём некоторые вспомогательные выкладки, которые помогут вычислить относительные инварианты ткани W. Используя (2) и (12), продифференцируем внешним образом уравнения (14). В результате получим

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^i = d\omega_1^i + d\omega_2^i + d\omega_3^i + d\omega_4^i = \omega_1^\zeta \wedge \omega_\zeta^i + \omega_2^\zeta \wedge \omega_\zeta^i + \omega_3^\zeta \wedge \omega_\zeta^i + \omega_4^\zeta \wedge \omega_\zeta^i = \\ = (\omega_1^\zeta + \omega_2^\zeta + \omega_3^\zeta + \omega_4^\zeta) \wedge \omega_\zeta^i = (\omega_1^j + \omega_2^j + \omega_3^j + \omega_4^j) \wedge \omega_j^i, \end{aligned}$$

или

$$d\tilde{\omega}^i = (\omega_1^u + \omega_2^u + \omega_3^u + \omega_4^u) \wedge \omega_u^i + \tilde{\omega}^4 \wedge \omega_4^i. \tag{31}$$

Пусть в (31) $i = 1$. Тогда

$$d\tilde{\omega}^1 = (\omega_2^1 + \omega_3^1 + \omega_4^1) \wedge \omega_1^1 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \wedge \omega_2^1 + \\ + (\omega_1^3 + \omega_2^3 + \omega_3^3 + \omega_4^3) \wedge \omega_3^1 + \tilde{\omega}^4 \wedge \omega_4^1.$$

Используя формулы (18), находим, что

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^1 &= (\omega_2^1 + \omega_3^1 + \omega_4^1) \wedge (\tilde{\omega}^4 + a^{11}\omega_1^0 + a^{12}\omega_2^0 + a^{13}\omega_3^0) + \tilde{\omega}^4 \wedge \omega_4^1 + \\ &+ (\tilde{\omega}^4 + a^{12}\omega_1^0 + a^{22}\omega_2^0 + a^{23}\omega_3^0) \wedge \omega_2^1 + \\ &+ (\tilde{\omega}^4 + a^{13}\omega_1^0 + a^{23}\omega_2^0 + a^{33}\omega_3^0) \wedge \omega_3^1 = \\ &= (\omega_2^1 + \omega_3^1 + \omega_4^1) \wedge (a^{11}\omega_1^0 + a^{12}\omega_2^0 + a^{13}\omega_3^0) + \\ &+ (a^{12}\omega_1^0 + a^{22}\omega_2^0 + a^{23}\omega_3^0) \wedge \omega_2^1 + (a^{13}\omega_1^0 + a^{23}\omega_2^0 + a^{33}\omega_3^0) \wedge \omega_3^1 = \\ &= \lambda_4^1(a^{11}\omega_1^0 + a^{12}\omega_2^0 + a^{13}\omega_3^0) \wedge (\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0) + \\ &+ \big((a^{12} - a^{11})\omega_1^0 + (a^{23} - a^{13})\omega_3^0\big) \wedge \omega_2^1 + \\ &+ \big((a^{13} - a^{11})\omega_1^0 + (a^{23} - a^{12})\omega_2^0\big) \wedge \omega_3^1 = \\ &= (\lambda_4^1 a^{11} - \lambda_4^1 a^{12} + \lambda_2^1 a^{12} - \lambda_2^1 a^{11})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \\ &+ (\lambda_4^1 a^{11} - \lambda_4^1 a^{13} + \lambda_3^1 a^{13} - \lambda_3^1 a^{11})\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ (\lambda_4^1 a^{12} - \lambda_4^1 a^{13} - \lambda_2^1 a^{23} + \lambda_2^1 a^{13} + \lambda_3^1 a^{23} - \lambda_3^1 a^{12})\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = \\ &= (a^{11} - a^{12})(\lambda_4^1 - \lambda_2^1)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + (a^{11} - a^{13})(\lambda_4^1 - \lambda_3^1)\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \big(a^{12}(\lambda_4^1 - \lambda_3^1) + a^{13}(\lambda_2^1 - \lambda_4^1) + a^{23}(\lambda_3^1 - \lambda_2^1)\big)\omega_2^0 \wedge \omega_3^0. \end{aligned}$$

Полагая в (31) $i = 2$, $i = 3$ и $i = 4$, аналогично находим $d\tilde{\omega}^2$, $d\tilde{\omega}^3$ и $d\tilde{\omega}^4$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^1 &= (a^{11} - a^{12})(\lambda_4^1 - \lambda_2^1)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + (a^{11} - a^{13})(\lambda_4^1 - \lambda_3^1)\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \big(a^{12}(\lambda_4^1 - \lambda_3^1) + a^{13}(\lambda_2^1 - \lambda_4^1) + a^{23}(\lambda_3^1 - \lambda_2^1)\big)\omega_2^0 \wedge \omega_3^0, \\ d\tilde{\omega}^2 &= (a^{22} - a^{12})(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + (a^{22} - a^{23})(\lambda_4^2 - \lambda_3^2)\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \big(a^{12}(\lambda_4^2 - \lambda_3^2) + a^{13}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + a^{23}(\lambda_1^2 - \lambda_4^2)\big)\omega_1^0 \wedge \omega_3^0, \\ d\tilde{\omega}^3 &= (a^{33} - a^{13})(\lambda_1^3 - \lambda_4^3)\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + (a^{33} - a^{23})(\lambda_2^3 - \lambda_4^3)\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \big(a^{12}(\lambda_2^3 - \lambda_1^3) + a^{13}(\lambda_4^3 - \lambda_2^3) + a^{23}(\lambda_1^3 - \lambda_4^3)\big)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0, \\ d\tilde{\omega}^4 &= a^{12}(\lambda_2^4 - \lambda_1^4)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + a^{13}(\lambda_3^4 - \lambda_1^4)\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + a^{23}(\lambda_3^4 - \lambda_2^4)\omega_2^0 \wedge \omega_3^0. \end{aligned} \tag{32}$$

Продифференцируем внешним образом уравнения (16):

$$d\tilde{\omega}^1 - d\tilde{\omega}^4 = da^{11} \wedge \omega_1^0 + da^{12} \wedge \omega_2^0 + da^{13} \wedge \omega_3^0 + a^{11} d\omega_1^0 + a^{12} d\omega_2^0 + a^{13} d\omega_3^0,$$

$$d\tilde{\omega}^2 - d\tilde{\omega}^4 = da^{12} \wedge \omega_1^0 + da^{22} \wedge \omega_2^0 + da^{23} \wedge \omega_3^0 + a^{12} d\omega_1^0 + a^{22} d\omega_2^0 + a^{23} d\omega_3^0,$$

$$d\tilde{\omega}^3 - d\tilde{\omega}^4 = da^{13} \wedge \omega_1^0 + da^{23} \wedge \omega_2^0 + da^{33} \wedge \omega_3^0 + a^{13} d\omega_1^0 + a^{23} d\omega_2^0 + a^{33} d\omega_3^0.$$

Преобразуем эти формулы, используя (24). Получим

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^1 - d\tilde{\omega}^4 &= (da^{11} - a^{11}\gamma) \wedge \omega_1^0 + (da^{12} - a^{12}\gamma) \wedge \omega_2^0 + (da^{13} - a^{13}\gamma) \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \alpha^{12}(a^{11} - a^{12})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \alpha^{13}(a^{11} - a^{13})\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \alpha^{23}(a^{12} - a^{13})\omega_2^0 \wedge \omega_3^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^2 - d\tilde{\omega}^4 &= (da^{12} - a^{12}\gamma) \wedge \omega_1^0 + (da^{22} - a^{22}\gamma) \wedge \omega_2^0 + (da^{23} - a^{23}\gamma) \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \alpha^{12}(a^{12} - a^{22})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \alpha^{13}(a^{12} - a^{23})\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \alpha^{23}(a^{22} - a^{23})\omega_2^0 \wedge \omega_3^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^3 - d\tilde{\omega}^4 &= (da^{13} - a^{13}\gamma) \wedge \omega_1^0 + (da^{23} - a^{23}\gamma) \wedge \omega_2^0 + (da^{33} - a^{33}\gamma) \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \alpha^{12}(a^{13} - a^{23})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \alpha^{13}(a^{13} - a^{33})\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \alpha^{23}(a^{23} - a^{33})\omega_2^0 \wedge \omega_3^0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^1 - d\tilde{\omega}^4 &= \alpha^{12}(a^{11} - a^{12})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \alpha^{13}(a^{11} - a^{13})\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \alpha^{23}(a^{12} - a^{13})\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + \nabla a^{11} \wedge \omega_1^0 + \nabla a^{12} \wedge \omega_2^0 + \nabla a^{13} \wedge \omega_3^0, \\ d\tilde{\omega}^2 - d\tilde{\omega}^4 &= \alpha^{12}(a^{12} - a^{22})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \alpha^{13}(a^{12} - a^{23})\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \alpha^{23}(a^{22} - a^{23})\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + \nabla a^{12} \wedge \omega_1^0 + \nabla a^{22} \wedge \omega_2^0 + \nabla a^{23} \wedge \omega_3^0, \\ d\tilde{\omega}^3 - d\tilde{\omega}^4 &= \alpha^{12}(a^{13} - a^{23})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \alpha^{13}(a^{13} - a^{33})\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &+ \alpha^{23}(a^{23} - a^{33})\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + \nabla a^{13} \wedge \omega_1^0 + \nabla a^{23} \wedge \omega_2^0 + \nabla a^{33} \wedge \omega_3^0. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь

$$\nabla a^{uv} = da^{uv} - a^{uv}\gamma. \tag{34}$$

Подставляя выражения (32) в (33), придём к уравнениям

$$\begin{aligned} &\nabla a^{11} \wedge \omega_1^0 + \nabla a^{12} \wedge \omega_2^0 + \nabla a^{13} \wedge \omega_3^0 + \\ &\quad + \big(a^{11}(\alpha^{12} + \lambda_2^1 - \lambda_4^1) - a^{12}(\alpha^{12} + \lambda_2^1 - \lambda_4^1 + \lambda_1^4 - \lambda_2^4)\big)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \\ &\quad + \big(a^{11}(\alpha^{13} + \lambda_3^1 - \lambda_4^1) - a^{13}(\alpha^{13} + \lambda_3^1 - \lambda_4^1 + \lambda_1^4 - \lambda_3^4)\big)\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &\quad + \big(a^{12}(\alpha^{23} + \lambda_3^1 - \lambda_4^1) - a^{13}(\alpha^{23} + \lambda_2^1 - \lambda_4^1) + \\ &\quad + a^{23}(\lambda_3^4 - \lambda_2^4 + \lambda_2^1 - \lambda_3^1)\big)\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\nabla a^{12} \wedge \omega_1^0 + \nabla a^{22} \wedge \omega_2^0 + \nabla a^{23} \wedge \omega_3^0 + \\ &\quad + \big(a^{12}(\alpha^{12} + \lambda_1^2 - \lambda_4^2 + \lambda_2^4 - \lambda_1^4) - a^{22}(\alpha^{12} + \lambda_1^2 - \lambda_4^2)\big)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \\ &\quad + \big(a^{12}(\alpha^{13} + \lambda_3^2 - \lambda_4^2) - a^{23}(\alpha^{13} + \lambda_1^2 - \lambda_4^2) + \\ &\quad + a^{13}(\lambda_3^4 - \lambda_1^4 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\big)\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \\ &\quad + \big(a^{22}(\alpha^{23} + \lambda_3^2 - \lambda_4^2) - a^{23}(\alpha^{23} + \lambda_3^2 - \lambda_4^2 + \lambda_2^4 - \lambda_3^4)\big)\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla a^{13}\wedge\omega_1^0+\nabla a^{23}\wedge\omega_2^0+\nabla a^{33}\wedge\omega_3^0+\\
&\quad+\big(a^{13}(\alpha^{12}+\lambda_2^3-\lambda_4^3)-a^{23}(\alpha^{12}+\lambda_1^3-\lambda_4^3)+\\
&\quad+a^{12}(\lambda_2^4-\lambda_1^4+\lambda_1^3-\lambda_2^3)\big)\omega_1^0\wedge\omega_2^0+\\
&\quad+\big(a^{13}(\alpha^{13}+\lambda_1^3-\lambda_4^3+\lambda_3^4-\lambda_1^4)-a^{33}(\alpha^{13}+\lambda_1^3-\lambda_4^3)\big)\omega_1^0\wedge\omega_3^0+\\
&\quad+\big(a^{23}(\alpha^{23}+\lambda_2^3-\lambda_4^3+\lambda_3^4-\lambda_2^4)-a^{33}(\alpha^{23}+\lambda_2^3-\lambda_4^3)\big)\omega_2^0\wedge\omega_3^0=0.
\end{aligned}$$

Запишем эти уравнения в виде

$$\nabla a^{uv}\wedge\omega_v^0+A^{uvw}\omega_v^0\wedge\omega_w^0=0, \tag{35}$$

где $A^{uvw}=-A^{uwv}$ и используются следующие обозначения:

$$A^{112}=\frac{1}{2}\big(a^{11}(\alpha^{12}+\lambda_2^1-\lambda_4^1)-a^{12}(\alpha^{12}+\lambda_2^1-\lambda_4^1+\lambda_1^4-\lambda_2^4)\big),$$

$$A^{113}=\frac{1}{2}\big(a^{11}(\alpha^{13}+\lambda_3^1-\lambda_4^1)-a^{13}(\alpha^{13}+\lambda_3^1-\lambda_4^1+\lambda_1^4-\lambda_3^4)\big),$$

$$A^{123}=\frac{1}{2}\big(a^{12}(\alpha^{23}+\lambda_3^1-\lambda_4^1)-a^{13}(\alpha^{23}+\lambda_2^1-\lambda_4^1)+a^{23}(\lambda_3^4-\lambda_2^4+\lambda_2^1-\lambda_3^1)\big),$$

$$A^{212}=\frac{1}{2}\big(a^{12}(\alpha^{12}+\lambda_1^2-\lambda_4^2+\lambda_2^4-\lambda_1^4)-a^{22}(\alpha^{12}+\lambda_1^2-\lambda_4^2)\big),$$

$$A^{213}=\frac{1}{2}\big(a^{12}(\alpha^{13}+\lambda_3^2-\lambda_4^2)-a^{23}(\alpha^{13}+\lambda_1^2-\lambda_4^2)+a^{13}(\lambda_3^4-\lambda_1^4+\lambda_1^2-\lambda_3^2)\big),$$

$$A^{223}=\frac{1}{2}\big(a^{22}(\alpha^{23}+\lambda_3^2-\lambda_4^2)-a^{23}(\alpha^{23}+\lambda_3^2-\lambda_4^2+\lambda_2^4-\lambda_3^4)\big),$$

$$A^{312}=\frac{1}{2}\big(a^{13}(\alpha^{12}+\lambda_2^3-\lambda_4^3)-a^{23}(\alpha^{12}+\lambda_1^3-\lambda_4^3)+a^{12}(\lambda_2^4-\lambda_1^4+\lambda_1^3-\lambda_2^3)\big),$$

$$A^{313}=\frac{1}{2}\big(a^{13}(\alpha^{13}+\lambda_1^3-\lambda_4^3+\lambda_3^4-\lambda_1^4)-a^{33}(\alpha^{13}+\lambda_1^3-\lambda_4^3)\big),$$

$$A^{323}=\frac{1}{2}\big(a^{23}(\alpha^{23}+\lambda_2^3-\lambda_4^3+\lambda_3^4-\lambda_2^4)-a^{33}(\alpha^{23}+\lambda_2^3-\lambda_4^3)\big).$$

После замены (25) имеем

$$\begin{aligned}
A^{112}=\frac{1}{2}\big(&a^{12}(a^{12}-a^{11})+a^{11}(2\lambda_2^1+\lambda_1^2-2\lambda_4^1-\lambda_1^4-\lambda_4^2-\lambda_2^4)-\\
&-a^{12}(2\lambda_2^1+\lambda_1^2-2\lambda_4^1-\lambda_4^2-2\lambda_2^4)\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{113}=\frac{1}{2}\big(&a^{13}(a^{13}-a^{11})+a^{11}(2\lambda_3^1+\lambda_1^3-2\lambda_4^1-\lambda_1^4-\lambda_4^3-\lambda_3^4)-\\
&-a^{13}(2\lambda_3^1+\lambda_1^3-2\lambda_4^1-\lambda_4^3-2\lambda_3^4)\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{123}=\frac{1}{2}\big(&a^{23}(a^{13}-a^{12})+a^{12}(\lambda_3^2+\lambda_2^3-\lambda_4^2-\lambda_2^4-\lambda_4^3-\lambda_3^4+\lambda_3^1-\lambda_4^1)-\\
&-a^{13}(\lambda_3^2+\lambda_2^3-\lambda_4^2-\lambda_2^4-\lambda_4^3-\lambda_3^4+\lambda_2^1-\lambda_4^1)+a^{23}(\lambda_3^4-\lambda_2^4+\lambda_2^1-\lambda_3^1)\big),
\end{aligned}$$

$$A^{212} = \frac{1}{2}\big(a^{12}(a^{22} - a^{12}) + a^{12}(\lambda_2^1 + 2\lambda_1^2 - \lambda_4^1 - 2\lambda_1^4 - 2\lambda_4^2) - \\ - a^{22}(\lambda_2^1 + 2\lambda_1^2 - \lambda_4^1 - \lambda_1^4 - 2\lambda_4^2 - \lambda_2^4)\big),$$

$$A^{213} = \frac{1}{2}\big(a^{13}(a^{23} - a^{12}) + a^{12}(\lambda_3^1 + \lambda_1^3 - \lambda_4^1 - \lambda_1^4 - \lambda_4^3 - \lambda_3^4 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2) - \\ - a^{23}(\lambda_3^1 + \lambda_1^3 - \lambda_4^1 - \lambda_1^4 - \lambda_4^3 - \lambda_3^4 + \lambda_1^2 - \lambda_4^2) + a^{13}(\lambda_3^4 - \lambda_1^4 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\big),$$

$$A^{223} = \frac{1}{2}\big(a^{23}(a^{23} - a^{22}) + a^{22}(2\lambda_3^2 + \lambda_2^3 - 2\lambda_4^2 - \lambda_2^4 - \lambda_4^3 - \lambda_3^4) - \\ - a^{23}(2\lambda_3^2 + \lambda_2^3 - 2\lambda_4^2 - \lambda_4^3 - 2\lambda_3^4)\big),$$

$$A^{312} = \frac{1}{2}\big(a^{12}(a^{23} - a^{13}) + a^{13}(\lambda_2^1 + \lambda_1^2 - \lambda_4^1 - \lambda_1^4 - \lambda_4^2 - \lambda_2^4 + \lambda_2^3 - \lambda_4^3) - \\ - a^{23}(\lambda_2^1 + \lambda_1^2 - \lambda_4^1 - \lambda_1^4 - \lambda_4^2 - \lambda_2^4 + \lambda_1^3 - \lambda_4^3) + a^{12}(\lambda_2^4 - \lambda_1^4 + \lambda_1^3 - \lambda_2^3)\big),$$

$$A^{313} = \frac{1}{2}\big(a^{13}(a^{33} - a^{13}) + a^{13}(\lambda_3^1 + 2\lambda_1^3 - \lambda_4^1 - 2\lambda_1^4 - 2\lambda_4^3) - \\ - a^{33}(\lambda_3^1 + 2\lambda_1^3 - \lambda_4^1 - \lambda_1^4 - 2\lambda_4^3 - \lambda_3^4)\big),$$

$$A^{323} = \frac{1}{2}\big(a^{23}(a^{33} - a^{23}) + a^{23}(\lambda_3^2 + 2\lambda_2^3 - \lambda_4^2 - 2\lambda_2^4 - 3\lambda_4^3) - \\ - a^{33}(\lambda_3^2 + 2\lambda_2^3 - \lambda_4^2 - \lambda_2^4 - 2\lambda_4^3 - \lambda_3^4)\big).$$

Заметим, что

$$A^{123} + A^{312} + A^{231} = 0. \tag{36}$$

Как видно из (35), формы ∇a^{uv} выражаются только через главные формы. Положим

$$\nabla a^{uv} = a^{uvw}\omega_w^0, \tag{37}$$

где $a^{uvw} = a^{vuw}$. Подставляя выражения (37) в (35), получим соотношения

$$a^{uwv} - a^{uvw} + 2A^{uvw} = 0, \quad v \neq w.$$

Используя симметричность величин a^{uvw} по первым двум индексам, кососимметричность величин A^{uvw} по второму и третьему индексу и выражение (36), находим, что

$$a^{121} = a^{112} - 2A^{112}, \quad a^{122} = a^{221} - 2A^{221},$$
$$a^{131} = a^{113} - 2A^{113}, \quad a^{132} = a^{123} - 2A^{123}, \quad a^{133} = a^{331} - 2A^{331},$$
$$a^{231} = a^{123} - 2A^{213}, \quad a^{232} = a^{223} - 2A^{223}, \quad a^{233} = a^{332} - 2A^{332}.$$

С учётом полученных равенств выражения (37) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\nabla a^{11} = a^{111}\omega_1^0 + a^{112}\omega_2^0 + a^{113}\omega_3^0,\\
&\nabla a^{22} = a^{221}\omega_1^0 + a^{222}\omega_2^0 + a^{223}\omega_3^0,\\
&\nabla a^{33} = a^{331}\omega_1^0 + a^{332}\omega_2^0 + a^{333}\omega_3^0,\\
&\nabla a^{12} = (a^{112} - 2A^{112})\omega_1^0 + (a^{221} - 2A^{221})\omega_2^0 + a^{123}\omega_3^0,\\
&\nabla a^{13} = (a^{113} - 2A^{113})\omega_1^0 + (a^{123} - 2A^{123})\omega_2^0 + (a^{331} - 2A^{331})\omega_3^0,\\
&\nabla a^{23} = (a^{123} - 2A^{213})\omega_1^0 + (a^{223} - 2A^{223})\omega_2^0 + (a^{332} - 2A^{332})\omega_3^0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Формулы (34) и (37) дают

$$da^{uv} - a^{uv}\gamma = a^{uvw}\omega_w^0. \tag{39}$$

Обозначим значения символов d и γ при фиксированных главных параметрах через δ и γ_δ соответственно. Если зафиксировать главные параметры, то из уравнений (39) получим, что

$$\delta a^{uv} = a^{uv}\gamma_\delta. \tag{40}$$

Это означает, что величины a^{uv} являются относительными инвариантами.

7. Найдём кривизны ткани W. Для этого продифференцируем внешним образом первое уравнение (24). Получим

$$\begin{aligned}
&d\omega_1^0\wedge\gamma - \omega_1^0\wedge d\gamma + d\alpha^{12}\wedge\omega_1^0\wedge\omega_2^0 + d\alpha^{13}\wedge\omega_1^0\wedge\omega_3^0 + \alpha^{12}(d\omega_1^0\wedge\omega_2^0 - \omega_1^0\wedge d\omega_2^0) +\\
&\quad + \alpha^{13}(d\omega_1^0\wedge\omega_3^0 - \omega_1^0\wedge d\omega_3^0) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\omega_1^0\wedge d\gamma + \alpha^{12}\omega_1^0\wedge\omega_2^0\wedge\gamma + \alpha^{13}\omega_1^0\wedge\omega_3^0\wedge\gamma + d\alpha^{12}\wedge\omega_1^0\wedge\omega_2^0 + d\alpha^{13}\wedge\omega_1^0\wedge\omega_3^0 +\\
&\quad + \alpha^{12}(d\omega_1^0\wedge\omega_2^0 - \omega_1^0\wedge d\omega_2^0) + \alpha^{13}(d\omega_1^0\wedge\omega_3^0 - \omega_1^0\wedge d\omega_3^0) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\omega_1^0\wedge d\gamma + \alpha^{12}\omega_1^0\wedge\omega_2^0\wedge\gamma + \alpha^{13}\omega_1^0\wedge\omega_3^0\wedge\gamma + d\alpha^{12}\wedge\omega_1^0\wedge\omega_2^0 + d\alpha^{13}\wedge\omega_1^0\wedge\omega_3^0 +\\
&\quad + \alpha^{12}(\omega_1^0\wedge\gamma\wedge\omega_2^0 + \alpha^{13}\omega_1^0\wedge\omega_3^0\wedge\omega_2^0 - \omega_1^0\wedge\omega_2^0\wedge\gamma - \alpha^{23}\omega_1^0\wedge\omega_2^0\wedge\omega_3^0) +\\
&\quad + \alpha^{13}(\omega_1^0\wedge\gamma\wedge\omega_3^0 + \alpha^{12}\omega_1^0\wedge\omega_2^0\wedge\omega_3^0 - \omega_1^0\wedge\omega_3^0\wedge\gamma - \alpha^{23}\omega_1^0\wedge\omega_3^0\wedge\omega_2^0) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&-\omega_1^0\wedge d\gamma + (d\alpha^{12} - \alpha^{12}\gamma - \alpha^{12}(\alpha^{13} + \alpha^{23})\omega_3^0)\wedge\omega_1^0\wedge\omega_2^0 +\\
&\qquad + (d\alpha^{13} - \alpha^{13}\gamma - \alpha^{13}(\alpha^{12} + \alpha^{23})\omega_2^0)\wedge\omega_1^0\wedge\omega_3^0 = 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

Для второго и третьего уравнений (24) аналогично находим, что

$$\begin{aligned}
&-\omega_2^0\wedge d\gamma + (d\alpha^{12} - \alpha^{12}\gamma - \alpha^{12}(\alpha^{13} + \alpha^{23})\omega_3^0)\wedge\omega_2^0\wedge\omega_1^0 +\\
&\quad + (d\alpha^{23} - \alpha^{23}\gamma - \alpha^{23}(\alpha^{12} + \alpha^{13})\omega_1^0)\wedge\omega_2^0\wedge\omega_3^0 = 0,\\
&-\omega_3^0\wedge d\gamma + (d\alpha^{13} - \alpha^{13}\gamma - \alpha^{13}(\alpha^{12} + \alpha^{23})\omega_2^0)\wedge\omega_3^0\wedge\omega_1^0 +\\
&\quad + (d\alpha^{23} - \alpha^{23}\gamma - \alpha^{23}(\alpha^{12} + \alpha^{13})\omega_1^0)\wedge\omega_3^0\wedge\omega_2^0 = 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Положим

$$
\begin{aligned}
&\Omega = d\gamma, \\
&\Delta\alpha^{12} = \nabla\alpha^{12} - (\alpha^{12}\alpha^{13} + \alpha^{12}\alpha^{23})\omega_3^0, \qquad \nabla\alpha^{12} = d\alpha^{12} - \alpha^{12}\gamma, \\
&\Delta\alpha^{13} = \nabla\alpha^{13} - (\alpha^{13}\alpha^{12} + \alpha^{13}\alpha^{23})\omega_2^0, \qquad \nabla\alpha^{13} = d\alpha^{13} - \alpha^{13}\gamma, \\
&\Delta\alpha^{23} = \nabla\alpha^{23} - (\alpha^{23}\alpha^{12} + \alpha^{23}\alpha^{13})\omega_1^0, \qquad \nabla\alpha^{23} = d\alpha^{23} - \alpha^{23}\gamma.
\end{aligned} \tag{43}
$$

Тогда уравнения (41) и (42) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&-\omega_1^0 \wedge \Omega + \Delta\alpha^{12} \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \Delta\alpha^{13} \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_3^0 = 0, \\
&-\omega_2^0 \wedge \Omega + \Delta\alpha^{12} \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_1^0 + \Delta\alpha^{23} \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = 0, \\
&-\omega_3^0 \wedge \Omega + \Delta\alpha^{13} \wedge \omega_3^0 \wedge \omega_1^0 + \Delta\alpha^{23} \wedge \omega_3^0 \wedge \omega_2^0 = 0.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Разрешим кубические внешние уравнения (44) относительно Ω и $\Delta\alpha^{uv}$. Из этих уравнений следует, что формы Ω и $\Delta\alpha^{uv}$ зависят от базисных форм следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\Omega = \beta^{uv}\omega_u^0 \wedge \omega_v^0 + \theta^u \wedge \omega_u^0 + \Theta, \\
&\Delta\alpha^{uv} = \alpha^{uvw}\omega_w^0 + \sigma^{uv},
\end{aligned} \tag{45}
$$

причём формы θ^u, Θ и σ^{uv} не зависят от базисных форм ω_u^0, $\beta^{uv} = -\beta^{vu}$ и $\alpha^{uvw} = \alpha^{vuw}$. Подставляя (45) в (44), мы получим

$$
\begin{aligned}
&-\omega_1^0 \wedge (2\beta^{23}\omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + \theta^2 \wedge \omega_2^0 + \theta^3 \wedge \omega_3^0 + \Theta) + \\
&\quad + (\alpha^{123}\omega_3^0 + \sigma^{12}) \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + (\alpha^{132}\omega_2^0 + \sigma^{13}) \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_3^0 = 0, \\
&-\omega_2^0 \wedge (2\beta^{13}\omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \theta^1 \wedge \omega_1^0 + \theta^3 \wedge \omega_3^0 + \Theta) + \\
&\quad + (\alpha^{123}\omega_3^0 + \sigma^{12}) \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_1^0 + (\alpha^{231}\omega_1^0 + \sigma^{23}) \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = 0, \\
&-\omega_3^0 \wedge (2\beta^{12}\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \theta^1 \wedge \omega_1^0 + \theta^2 \wedge \omega_2^0 + \Theta) + \\
&\quad + (\alpha^{132}\omega_2^0 + \sigma^{13}) \wedge \omega_3^0 \wedge \omega_1^0 + (\alpha^{231}\omega_1^0 + \sigma^{23}) \wedge \omega_3^0 \wedge \omega_2^0 = 0,
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^{123} - \alpha^{132} - 2\beta^{23})\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + (\theta^2 + \sigma^{12}) \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \\
&\quad + (\theta^3 + \sigma^{13}) \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + \Theta \wedge \omega_1^0 = 0, \\
&(\alpha^{123} - \alpha^{231} - 2\beta^{13})\omega_2^0 \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_3^0 + (\theta^1 + \sigma^{12}) \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_1^0 + \\
&\quad + (\theta^3 + \sigma^{23}) \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_3^0 + \Theta \wedge \omega_2^0 = 0, \\
&(\alpha^{132} - \alpha^{231} - 2\beta^{12})\omega_3^0 \wedge \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + (\theta^1 + \sigma^{13}) \wedge \omega_3^0 \wedge \omega_1^0 + \\
&\quad + (\theta^2 + \sigma^{23}) \wedge \omega_3^0 \wedge \omega_2^0 + \Theta \wedge \omega_3^0 = 0.
\end{aligned}
$$

В силу независимости всех форм в полученных уравнениях все коэффициенты в этих уравнениях равны нулю. Таким образом, имеем

$$\beta^{12}=\frac{1}{2}(\alpha^{132}-\alpha^{231}),\qquad \sigma^{12}=\sigma^{13}=\sigma^{23}=\sigma,$$
$$\beta^{13}=\frac{1}{2}(\alpha^{123}-\alpha^{231}),\qquad \theta^{1}=\theta^{2}=\theta^{3}=-\sigma, \tag{46}$$
$$\beta^{23}=\frac{1}{2}(\alpha^{123}-\alpha^{132}),\qquad \Theta=0.$$

В [11] доказано, что $\sigma=0$. Поэтому уравнения (45) перепишутся в виде

$$\Omega=\beta^{uv}\omega_u^0\wedge\omega_v^0,\quad \Delta\alpha^{uv}=\alpha^{uvw}\omega_w^0, \tag{47}$$

причём в силу (46) β^{uv} и α^{uvw} удовлетворяют соотношениям

$$\beta^{12}+\beta^{23}+\beta^{31}=0,\quad \beta^{uv}=-\beta^{vu}=\alpha^{w[uv]}. \tag{48}$$

Подставляя выражения (47) в (43), получим окончательные соотношения:

$$d\gamma=\beta^{uv}\omega_u^0\wedge\omega_v^0 \tag{49}$$

и

$$\nabla\alpha^{12}=(\alpha^{123}+\alpha^{12}\alpha^{13}+\alpha^{12}\alpha^{23})\omega_3^0,$$
$$\nabla\alpha^{13}=(\alpha^{132}+\alpha^{13}\alpha^{12}+\alpha^{13}\alpha^{23})\omega_2^0, \tag{50}$$
$$\nabla\alpha^{23}=(\alpha^{231}+\alpha^{23}\alpha^{12}+\alpha^{23}\alpha^{13})\omega_1^0.$$

Сравнивая (49) и (50) с уравнениями (1.2.29) и (1.2.30) из [11], получаем, что β^{uv} — кривизны ткани W.

Теорема. *Структурные уравнения 4-ткани W могут быть записаны в виде (24) и (49), где величины α^{uv} и β^{uv} являются соответственно кручениями и кривизнами этой ткани.*

Литература

[1] Акивис М. А. Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей // Исследования по теории квазигрупп и луп. — Кишинёв, 1973. — С. 3—12.

[2] Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин, 1977.

[3] Акивис М. А. О многомерном обобщении сети Кёнигса // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1981. — № 9. — С. 232—233.

[4] Бляшке В. Введение в геометрию тканей. — М., 1959.

[5] Забродин В. В. Структурные уравнения 4-аксиального пространства. — В печати.

[6] Лазарева В. Б. Три-ткани на поверхностях в триаксиальном пространстве. — Калинин, 1984.

[7] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—382.

[8] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М., 1976.

[9] Рыжков В. В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Геометрия. — 1965. — С. 65—107.

[10] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии // М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.

[11] Goldberg V. V. Theory of Multicodimensional $(n+1)$-Webs. — Kluwer Academic, 1988.