

Структуры r -кратных почти произведений

А. Г. КУШНЕР

*Астраханский государственный университет,
Институт проблем управления РАН
им. В. А. Трапезникова
e-mail: kushnera@mail.ru*

УДК 514.7+514.763.85

Ключевые слова: структуры почти произведений, почти комплексные структуры, тензорные инварианты, комплекс де Рама, уравнения Монжа—Ампера, уравнения Якоби.

Аннотация

Вводится понятие структуры r -кратного почти произведения на гладком многообразии, обобщающее такие дифференциально-геометрические структуры, как структуры почти произведений и почти комплексные структуры. При наличии структуры r -кратного почти произведения комплекс де Рама распадается в сумму подкомплексов, а дифференцирования в некоторых из подкомплексов даются тензорами. Эти тензоры являются дифференциальными инвариантами данной структуры r -кратного почти произведения. Указываются применения построенных инвариантов к проблеме классификации уравнений Монжа—Ампера и уравнений Якоби.

Abstract

A. G. Kushner, r -tuple almost product structures, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 81—93.

A generalization of an almost product structure and an almost complex structure on smooth manifolds is constructed. The set of tensor differential invariants of type $(2, 1)$ and the set of the differential 2-forms for such structures are constructed. We show how these tensor invariants can be used to solve the classification problem for Monge—Ampère equations and Jacobi equations.

Введение

Описанная ниже структура является естественным обобщением структуры почти прямого произведения и почти комплексной структуры на гладких многообразиях.

Пусть N — гладкое многообразие, и пусть $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ — упорядоченный набор действительных или комплексных распределений на N :

$$\mathcal{P}_i: N \ni a \mapsto \mathcal{P}_i(a) \subset T_a N$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 81—93.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

или

$$\mathcal{P}_i: N \ni a \mapsto \mathcal{P}_i(a) \subset T_a^{\mathbb{C}}N = T_aN \otimes \mathbb{C},$$

где $i = 1, \dots, r$.

Будем говорить, что на N задана структура r -кратного почти произведения $\mathcal{P}$, если в каждой точке $a \in N$ касательное пространство T_aN (для действительных распределений) или его комплексификация $T_a^{\mathbb{C}}N$ (для комплексных распределений) распадается в прямую сумму подпространств $\mathcal{P}_1(a), \dots, \mathcal{P}_r(a)$, т. е.

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{P}_i(a) = T_aN \quad \text{или} \quad \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{P}_i(a) = T_a^{\mathbb{C}}N. \quad (1)$$

Построим тензорные инварианты структуры r -кратного почти произведения. С этой целью рассмотрим следующую алгебраическую конструкцию.

1. Дифференцирования в градуированных алгебрах

Пусть

$$A = \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r} A^{\mathbf{k}} \quad (2)$$

$\mathbb{N}^r$ -градуированная алгебра над полем нулевой характеристики, т. е.

$$A^{\mathbf{k}} \cdot A^{\mathbf{t}} \subset A^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{k}$ и $\mathbf{t}$ — мультииндексы длины r . Мы также будем рассматривать A как $\mathbb{Z}^r$ -градуированную алгебру, считая, что $A^{\mathbf{k}} = 0$, если хотя бы одна из компонент мультииндекса $\mathbf{k}$ отрицательна.

Пусть

$$A_s = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} A^{\mathbf{k}},$$

где

$$|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_r.$$

Тогда A является также $\mathbb{N}$ -градуированной алгеброй:

$$A = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} A_s. \quad (4)$$

Градуировки, определённые формулами (2) и (4), мы будем называть *тонкой* и *грубой* соответственно. Элементы $A^{\mathbf{k}}$ и A_s мы будем называть *однородными* в тонкой и грубой градуировке соответственно. Если $a \in A_s$, то число s мы будем называть *степенью* элемента a и обозначать её через $\deg a$.

Мы будем также предполагать, что алгебра A , рассматриваемая как A_0 -алгебра, порождена A_0 -модулем A_1 .

Пусть на алгебре A задан дифференциал d , имеющий в грубой градуировке степень 1, т. е.

$$dA_s \subset A_{s+1},$$

для которого выполняется правило Лейбница

$$d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot db \quad (5)$$

на однородных в грубой градуировке элементах a и b .

Введём мультииндексы длины r

$$\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$$

и

$$\mathbf{1}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где единица стоит на i -м месте.

Относительно тонкой градуировки дифференциал d раскладывается в прямую сумму

$$d = \bigoplus_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^r} d_{\mathbf{t}}, \quad (6)$$

где

$$d_{\mathbf{t}}: A^{\mathbf{k}} \rightarrow A^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}. \quad (7)$$

Легко убедиться, что нетривиальные операторы $d_{\mathbf{t}}$ возникают только при $|\mathbf{t}| = 1$.

Теорема 1.

1. Операторы $d_{\mathbf{t}}$ в разложении (6) являются дифференцированиями, т. е. для них выполняется правило Лейбница

$$d_{\mathbf{t}}(a \cdot b) = d_{\mathbf{t}}a \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot d_{\mathbf{t}}b, \quad (8)$$

где a и b — однородные в тонкой градуировке элементы.

2. Если в мультииндексе $\mathbf{t}$ сумма отрицательных компонент меньше, чем -1 , то $d_{\mathbf{t}} = 0$.
3. Если мультииндекс $\mathbf{t}$ содержит одну отрицательную компоненту, равную -1 , то оператор $d_{\mathbf{t}}$ является A_0 -гомоморфизмом, т. е.

$$d_{\mathbf{t}}(a_0 \cdot b) = a_0 \cdot d_{\mathbf{t}}b \quad (9)$$

для любого $a_0 \in A_0$ и любого однородного в тонкой градуировке элемента b .

Доказательство.

1. Пусть $a \in A^{\mathbf{k}}$ и $b \in A^{\mathbf{l}}$ — однородные элементы алгебры A . Тогда согласно (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} d(a \cdot b) &= da \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot db = \\ &= \sum_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}}a \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot \sum_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}}b = \sum_{|\mathbf{t}|=1} (d_{\mathbf{t}}a \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot d_{\mathbf{t}}b). \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, согласно (6) имеем

$$d(a \cdot b) = \sum_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}}(a \cdot b). \quad (11)$$

Теперь заметим, что согласно (7) и (3)

$$d_{\mathbf{t}}a \in A^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}, \quad d_{\mathbf{t}}b \in A^{1+\mathbf{t}}, \quad d_{\mathbf{t}}(a \cdot b) \in A^{\mathbf{k}+1+\mathbf{t}}.$$

Сравнивая в правых частях формул (10) и (11) члены, принадлежащие $A^{\mathbf{k}+1+\mathbf{t}}$ для всевозможных значений мультииндексов $\mathbf{t}$, мы получаем равенство (8).

2. Поскольку алгебра A порождается элементами $A^{\mathbf{k}}$, где $|\mathbf{k}| = 1$, то достаточно вычислить значение $d_{\mathbf{t}}a$ для $a \in A^{\mathbf{k}}$, $|\mathbf{k}| = 1$, при условии, что сумма отрицательных компонент в мультииндексе $\mathbf{t}$ меньше, чем -1 .

Пусть $a \in A^{\mathbf{k}}$, где $|\mathbf{k}| = 1$. Тогда $d_{\mathbf{t}}a \in A^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}$, где мультииндекс $\mathbf{k} + \mathbf{t}$ содержит отрицательные компоненты. Поэтому согласно условию на градуировку (2) $A^{\mathbf{k}+\mathbf{t}} = 0$. Таким образом, $d_{\mathbf{t}} = 0$.

3. Пусть $a_0 \in A_0$ и мультииндекс $\mathbf{t}$ содержит компоненту -1 . Тогда согласно (8) для любого однородного элемента b получаем

$$d_{\mathbf{t}}(a_0 \cdot b) = d_{\mathbf{t}}a_0 \cdot b + a_0 \cdot d_{\mathbf{t}}b.$$

В силу (2) $d_{\mathbf{t}}a_0 = 0$, откуда следует равенство (9). $\square$

Замечание. Если мультииндекс $\mathbf{t}$, для которого $|\mathbf{t}| = 1$, содержит одну отрицательную компоненту и она равна -1 , то

$$\mathbf{t} = \mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s,$$

где $s \neq j, k$. Только для таких мультииндексов операторы $d_{\mathbf{t}}$ являются A_0 -гомоморфизмами.

2. Тензорные инварианты структуры r -кратного почти произведения

Мы применим теорему 1 для вычисления дифференциальных тензорных инвариантов структуры r -кратного почти произведения.

Пусть $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ — упорядоченный набор вещественных распределений на гладком многообразии N , образующих структуру r -кратного почти произведения. Пусть $D_i = D(\mathcal{P}_i)$ — модули векторных полей, лежащих в распределениях $\mathcal{P}_i$ ($i = 1, \dots, r$).

Пусть $a \in N$ — некоторая точка. Пространство внешних s -форм на $T_a N$ распадается в прямую сумму

$$\Lambda^s(T_a^* N) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Lambda^{\mathbf{k}}(T_a^* N). \quad (12)$$

Здесь

$$\Lambda^{\mathbf{k}}(T_a^* N) = \left\{ \sum_{j_1 + \dots + j_r = |\mathbf{k}|} \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_r}, \text{ где } \theta_{j_i} \in \Lambda^{k_i}(\mathcal{P}_i(a)^*) \right\}$$

$\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$ — мультииндекс, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$.

Элементы подпространства $\mathcal{P}_i(a)^*$ мы отождествим с ковекторами, которые вырождаются вдоль $\bigoplus_{j \neq i} \mathcal{P}_j(a)$.

Переходя к дифференциальным формам, мы получаем разложение в прямую сумму модуля дифференциальных s -форм на N :

$$\Omega^s(N) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Omega^{\mathbf{k}}, \quad (13)$$

где

$$\Omega^{\mathbf{k}} = \left\{ \sum_{j_1 + \dots + j_r = |\mathbf{k}|} \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_r}, \text{ где } \alpha_{j_i} \in \Omega_i^{k_i} \right\} \subset \bigotimes_{i=1}^r \Omega_i^{k_i}, \quad (14)$$

а модули

$$\Omega_i^s = \{ \alpha \in \Omega^s(N) \mid X \lrcorner \alpha = 0 \text{ для всех } X \in D_j, j \neq i \} \subset \Omega^s(N)$$

состоят из внешних дифференциальных s -форм, вырождающихся на векторных полях $D_j, j \neq i$.

Внешняя алгебра, тем самым, является $\mathbb{N}^r$ -градуированной алгеброй, удовлетворяющей условиям теоремы 1, где $A^{\mathbf{k}} = \Omega^{\mathbf{k}}$, умножение $\cdot$ — это внешнее умножение, а d — внешний дифференциал.

Таким образом, внешний дифференциал распадается в прямую сумму

$$d = \bigoplus_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}}, \quad (15)$$

где

$$d_{\mathbf{t}}: \Omega^{\mathbf{k}} \rightarrow \Omega^{\mathbf{k}+\mathbf{t}},$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 2.

1. Операторы $d_{\mathbf{t}}$ в разложении (15) являются дифференцированиями:

$$d_{\mathbf{t}}(\alpha \wedge \beta) = d_{\mathbf{t}}\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d_{\mathbf{t}}\beta,$$

где $\alpha \in \Omega^{\mathbf{k}}$ и $\beta \in \Omega^{\mathbf{i}}$.

2. Если в мультииндексе $\mathbf{t}$ сумма отрицательных компонент меньше, чем -1 , то $d_{\mathbf{t}} = 0$.
3. Если мультииндекс $\mathbf{t}$ содержит одну отрицательную компоненту и она равна -1 , то оператор $d_{\mathbf{t}}$ является $C^\infty(N)$ -гомоморфизмом, т. е.

$$d_{\mathbf{t}}(f\alpha) = f d_{\mathbf{t}}\alpha$$

для любой функции f и любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^{\mathbf{k}}$.

Рассмотрим отдельно случай, когда

$$\mathbf{t} = \mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s.$$

Тогда дифференциал d_t является $C^\infty(N)$ -гомоморфизмом. Формула Лейбница показывает, что этот дифференциал полностью определяется своими значениями на модуле $\Omega^1(N)$.

Заметим, что

$$d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : \Omega^{1_q} \rightarrow 0,$$

если $q \neq s$. Таким образом, единственная нетривиальная компонента этого дифференциала — это его ограничение на модуль Ω^{1_s} , причём

$$d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : \Omega^{1_s} \rightarrow \Omega^{1_j} \wedge \Omega^{1_k}.$$

Поэтому дифференциал $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ определяет на N тензорное поле типа $(2, 1)$, которое мы будем обозначать $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$:

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} \in \Omega^{1_j} \wedge \Omega^{1_k} \otimes D_s.$$

Единственная нетривиальная компонента этого тензорного поля — его ограничение на модуль Ω^{1_s} , причём

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : \Omega^{1_s} \rightarrow \Omega^{1_j} \wedge \Omega^{1_k}$$

совпадает с $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$.

По построению тензорные поля $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ являются дифференциальными инвариантами структуры r -кратного почти произведения. Укажем, как эти тензорные поля действуют на дифференциальные 1-формы. Пусть

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} = \sum \alpha \wedge \beta \otimes Z,$$

где $\alpha \in \Omega^{1_j}$, $\beta \in \Omega^{1_k}$ и $Z \in D_s$, и пусть $\gamma \in \Omega^1(N)$. Тогда

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(\gamma) = \sum \gamma(Z) \alpha \wedge \beta.$$

Обозначим через

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}^* : D_j \wedge D_k \rightarrow D_s$$

тензорное поле, двойственное к $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$:

$$\langle \alpha, \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}^*(X \wedge Y) \rangle = \langle \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(\alpha), X \wedge Y \rangle. \quad (16)$$

Здесь $\alpha \in \Omega^{1_s}$, $X \in D_j$, $Y \in D_k$, а скобка $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает естественное спаривание.

Предложение. Пусть $\alpha \in \Omega^{1_s}$ — дифференциальная 1-форма и $X \in D_j$, $Y \in D_k$ — векторные поля. Тогда

$$\langle \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(\alpha), X \wedge Y \rangle = -\langle \alpha, [X, Y] \rangle \quad (17)$$

и

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}^*(X \wedge Y) = -\mathbf{P}_s[X, Y], \quad (18)$$

где $\mathbf{P}_s$ — проектор на модуль D_s .

Доказательство. Докажем сначала формулу (17). Так как

$$\langle \alpha, X \rangle = \langle \alpha, Y \rangle = 0,$$

то

$$\langle \tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}(\alpha), X \wedge Y \rangle = \langle d_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s} \alpha, X \wedge Y \rangle = \langle d\alpha, X \wedge Y \rangle = -\langle \alpha, [X, Y] \rangle.$$

Докажем теперь формулу (18). По формулам (16) и (17) получаем

$$\langle \alpha, \tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}^*(X \wedge Y) + \mathbf{P}_s[X, Y] \rangle = \langle \tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}(\alpha), X \wedge Y \rangle + \langle \alpha, [X, Y] \rangle = 0.$$

Так как последнее равенство выполняется для любой дифференциальной 1-формы $\alpha \in \Omega^1_s$, равенство (18) справедливо. $\square$

Согласно (18) значение тензорного поля $\tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}^*$ на бивекторном поле $X \wedge Y \in D(N) \wedge D(N)$ вычисляется по формуле

$$\tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}^*(X \wedge Y) = -\mathbf{P}_s[\mathbf{P}_j X, \mathbf{P}_k Y]. \quad (19)$$

Укажем, как тензорное поле

$$\tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}^* = \sum \alpha \wedge \beta \otimes Z$$

действует на бивекторные поля. Здесь $\alpha \in \Omega^1_j$, $\beta \in \Omega^1_k$ и $Z \in D_s$. Пусть $X \wedge Y \in D_j \wedge D_k$. Тогда

$$\tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}^*(X \wedge Y) = \sum (\alpha \wedge \beta)(X \wedge Y)Z. \quad (20)$$

3. Дифференциальные 2-формы, ассоциированные со структурой r -кратного почти произведения

Тензорные поля $\tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}$ позволяют определить дифференциальные 2-формы, ассоциированные со структурой r -кратного почти произведения.

Пусть $A, B \in \Omega^2 \otimes D$ — тензорные поля на N . Здесь $\Omega^2 = \Omega^2(N)$ и $D = D(N)$.

В силу естественного вложения

$$\Omega^2 \otimes D \otimes \Omega^2 \otimes D \xhookrightarrow{\iota} \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D$$

тензорное произведение $A \otimes B$ можно рассматривать как элемент пространства

$$T = \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D.$$

Пусть C_j^i — операция свёртки элемента пространства T по индексам i и j ($i = 3, 6$, $j = 1, 2, 4, 5$). Тогда композиция $C_1^6 \circ C_4^3$ действует в пространство тензоров $\Omega^1 \otimes \Omega^1$:

$$C_1^6 \circ C_4^3: T \rightarrow \Omega^1 \otimes \Omega^1.$$

Теорема 3. Пусть $A, B \in \Omega^2 \otimes D$. Тогда

$$\langle A, B \rangle_W = 2C_1^6 \circ C_4^3 (\iota(A \otimes B) - \iota(B \otimes A)) - \quad (21)$$

внешняя дифференциальная 2-форма на N .

Доказательство достаточно провести на разложимых тензорных полях.

Пусть

$$A = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \otimes X, \quad B = \beta_1 \wedge \beta_2 \otimes Y.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \iota(A \otimes B) &= \frac{1}{4} [\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes X \otimes \beta_1 \otimes \beta_2 \otimes Y - \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes X \otimes \beta_2 \otimes \beta_1 \otimes Y - \\ &\quad - \alpha_2 \otimes \alpha_1 \otimes X \otimes \beta_1 \otimes \beta_2 \otimes Y + \alpha_2 \otimes \alpha_1 \otimes X \otimes \beta_2 \otimes \beta_1 \otimes Y], \\ \iota(B \otimes A) &= \frac{1}{4} [\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes Y \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes X - \beta_1 \otimes \beta_2 \otimes Y \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_1 \otimes X - \\ &\quad - \beta_2 \otimes \beta_1 \otimes Y \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes X + \beta_2 \otimes \beta_1 \otimes Y \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_1 \otimes X] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_W &= \\ &= \frac{1}{2} [\alpha_1(Y)\beta_1(X)(\alpha_2 \otimes \beta_2 - \beta_2 \otimes \alpha_2) + \alpha_2(Y)\beta_2(X)(\alpha_1 \otimes \beta_1 - \beta_1 \otimes \alpha_1) - \\ &\quad - \alpha_1(Y)\beta_2(X)(\alpha_2 \otimes \beta_1 - \beta_1 \otimes \alpha_2) - \alpha_2(Y)\beta_1(X)(\alpha_1 \otimes \beta_2 - \beta_2 \otimes \alpha_1)] = \\ &= \alpha_1(Y)\beta_1(X)\alpha_2 \wedge \beta_2 + \alpha_2(Y)\beta_2(X)\alpha_1 \wedge \beta_1 - \\ &\quad - \alpha_1(Y)\beta_2(X)\alpha_2 \wedge \beta_1 - \alpha_2(Y)\beta_1(X)\alpha_1 \wedge \beta_2 \in \Omega^2. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. На разложимых тензорах, т. е. на тензорах вида $\alpha \otimes X$ и $\beta \otimes Y$, где $\alpha, \beta \in \Omega^2$ и $X, Y \in D$, скобка $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ имеет вид

$$\langle \alpha \otimes X, \beta \otimes Y \rangle_W = (Y \lrcorner \alpha) \wedge (X \lrcorner \beta).$$

Определим дифференциальные 2-формы, ассоциированные со структурой r -кратного почти произведения:

$$\langle \tau_{\mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s}, \tau_{\mathbf{1}_p + \mathbf{1}_q - \mathbf{1}_r} \rangle_W. \quad (22)$$

Замечание. Если вместо скобки (21) рассмотреть скобку

$$\langle A, B \rangle_S = 2C_1^6 \circ C_4^3 (\iota(A \otimes B) + \iota(B \otimes A)),$$

мы получим симметрическую билинейную форму на N .

Замечание. Все наши результаты справедливы и для комплексных структур r -кратного почти произведения. При этом вместо модулей $\Omega^s(N)$ и $D(N)$ нужно рассматривать их комплексификации.

4. Приложение к уравнениям Монжа—Ампера

Уравнение Монжа—Ампера имеет следующий вид:

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \quad (23)$$

где A, B, C, D и E — функции от независимых переменных x, y , неизвестной функции $v = v(x, y)$ и её первых производных v_x, v_y . Далее мы полагаем, что функции A, B, C, D и E принадлежат классу C^∞ .

Класс уравнений Монжа—Ампера выделяется из уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения. Этот факт был известен ещё Софусу Ли, который в серии работ [9, 10] рассматривал проблему классификации гиперболических уравнений Монжа—Ампера.

Всякое гиперболическое или эллиптическое уравнение Монжа—Ампера можно рассматривать как набор трёх распределений C_+, l и C_- на пятимерном пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}^2$ [11]. Эти распределения вещественны для гиперболических уравнений и комплексны для эллиптических. Распределения C_+ и C_- двумерны, а распределение l одномерно.

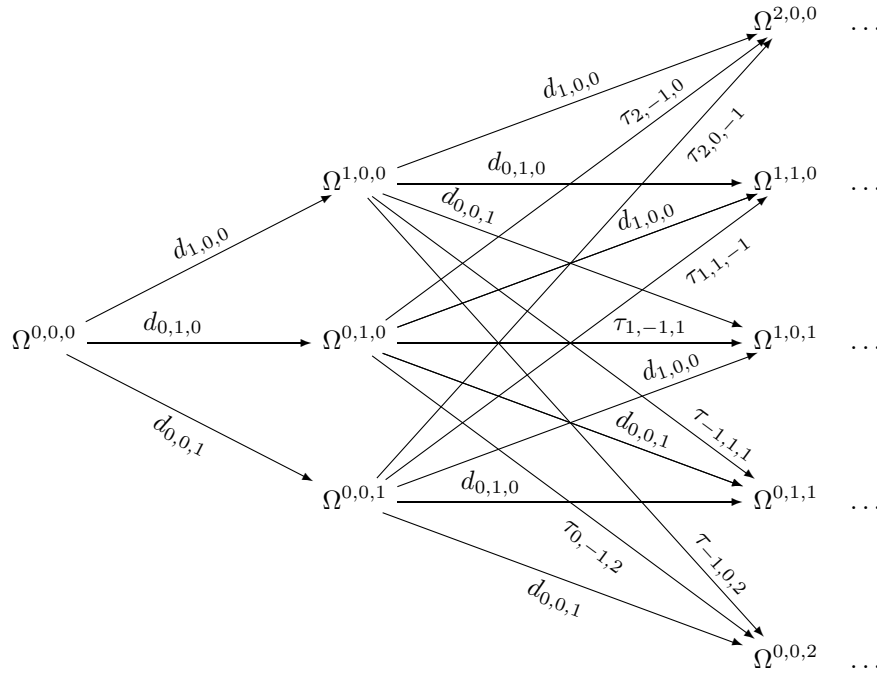


Диаграмма 1. Разложение комплекса де Рама для уравнения Монжа—Ампера

Обозначим распределения C_+ , l и C_- через $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_3$ соответственно. Эти распределения образуют структуру 3-кратного почти произведения. Соответствующее разложение комплекса де Рама показано на диаграмме 1.

Согласно теореме 2 мы получаем следующие тензоры:

$$\tau_{-1,0,2}, \tau_{2,0,-1}, \tau_{1,-1,1}, \tau_{-1,1,1}, \tau_{1,1,-1}, \tau_{0,-1,2}, \tau_{2,-1,0}.$$

Первые три из них — нули [1], и мы получаем четыре тензорных инварианта уравнения Монжа—Ампера.

В соответствии с теоремой 3 мы получаем также две дифференциальные 2-формы

$$\lambda_+ = \langle \tau_{0,-1,2}, \tau_{1,1,-1} \rangle_W, \quad \lambda_- = \langle \tau_{2,-1,0}, \tau_{-1,1,1} \rangle_W.$$

Эти формы называются *формами Лапласа* [4].

Укажем формы Лапласа для некоторых классов уравнений Монжа—Ампера. Пусть q_1 , q_2 , u , p_1 , p_2 — стандартные координаты на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}^2$.

Пример 1. Для линейного гиперболического уравнения

$$v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y)$$

формы Лапласа имеют вид

$$\lambda_- = (ab + c - b_{q_2})dq_1 \wedge dq_2, \quad \lambda_+ = -(ab + c - a_{q_1})dq_1 \wedge dq_2.$$

Коэффициенты этих форм представляют собой классические инварианты Лапласа, определённые им для линейных уравнений [8].

Пример 2. Для линейного эллиптического уравнения

$$v_{xx} + v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y)$$

формы Лапласа имеют вид

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{4} \left(b_{q_1} - a_{q_2} \pm \left(\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + 2c - a_{q_1} - b_{q_2} \right) \iota \right) dq_1 \wedge dq_2.$$

Здесь $\iota = \sqrt{-1}$. Коэффициенты при действительных и мнимых частях этих форм являются инвариантами Коттона [2].

Пример 3. Тензорные инварианты уравнения

$$v_{xy} = f(x, y, v, v_x, v_y)$$

имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_{-1,1,1} = & (ff_{p_2p_2}dq_1 \wedge du - f_{p_2p_2}dp_2 \wedge du - p_1f_{p_2p_2}dq_1 \wedge dp_2 - p_2f_{p_2p_2}dq_2 \wedge dp_2 + \\ & + (f_u - p_2f_{p_2u} + f_{p_1}f_{p_2} - ff_{p_1p_2} - f_{q_2p_2})dq_2 \wedge du + \\ & + (p_1f_u - p_1p_2f_{p_2u} - p_2ff_{p_2p_2} + p_1f_{p_1}f_{p_2} - p_1ff_{p_1p_2} - p_1f_{q_2p_2})dq_1 \wedge dq_2) \otimes \\ & \otimes \frac{\partial}{\partial p_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{1,1,-1} = & (ff_{p_1p_1}dq_2 \wedge du - f_{p_1p_1}dp_1 \wedge du - p_1f_{p_1p_1}dq_1 \wedge dp_1 - p_2f_{p_1p_1}dq_2 \wedge dp_1 + \\ & + (f_u + f_{p_1}f_{p_2} - p_1f_{p_1u} - ff_{p_1p_2} - f_{q_1p_1})dq_1 \wedge du + \\ & + (-p_2f_u - p_2f_{p_1}f_{p_2} + p_1p_2f_{p_1u} + p_2ff_{p_1p_2} + p_1ff_{p_1p_1} + p_2f_{q_1p_1})dq_1 \wedge dq_2) \otimes \\ & \otimes \frac{\partial}{\partial p_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{2,-1,0} = & (dq_1 \wedge dp_1 - f_{p_2}dq_1 \wedge du + (p_2f_{p_2} - f)dq_1 \wedge dq_2) \otimes \\ & \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u} + f_{p_2} \frac{\partial}{\partial p_1} + f_{p_1} \frac{\partial}{\partial p_2} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{0,-1,2} = & (dq_2 \wedge dp_2 - f_{p_1}dq_2 \wedge du - (p_1f_{p_1} - f)dq_1 \wedge dq_2) \otimes \\ & \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u} + f_{p_2} \frac{\partial}{\partial p_1} + f_{p_1} \frac{\partial}{\partial p_2} \right).\end{aligned}$$

Формы Лапласа имеют вид

$$\begin{aligned}\lambda_- = & f_{p_2p_2}(f_{p_1}dq_1 \wedge du - dq_1 \wedge dp_2) + \\ & + (f_u - p_2f_{p_2u} + f_{p_1}f_{p_2} - p_2f_{p_1}f_{p_2p_2} - ff_{p_1p_2} - f_{q_2p_2})dq_1 \wedge dq_2, \\ \lambda_+ = & f_{p_1p_1}(f_{p_2}dq_2 \wedge du - dq_2 \wedge dp_1) + \\ & + (-f_u + p_1f_{p_1u} - f_{p_1}f_{p_2} + p_1f_{p_2}f_{p_1p_1} + ff_{p_1p_2} + f_{q_1p_1})dq_1 \wedge dq_2.\end{aligned}$$

Следующая теорема показывает, что введённые нами формы Лапласа являются прямыми обобщениями инвариантов Лапласа и Коттона, построенных для линейных уравнений, на уравнения Монжа—Ампера.

Теорема 4 (см. [5]). Гиперболическое уравнение Монжа—Ампера локально контактно эквивалентно волновому уравнению $v_{xy} = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_+ = \lambda_- = 0$.

Эллиптическое уравнение Монжа—Ампера локально контактно эквивалентно уравнению Пуассона $v_{xx} + v_{yy} = f(x, y)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_+ = \lambda_- = 0$.

В [1, 3–5, 7] формы Лапласа применялись к проблеме классификации уравнений Монжа—Ампера.

5. Приложение к уравнениям Якоби

Уравнения Якоби имеют вид [11]

$$\begin{cases} A_1 + B_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + C_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + D_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + E_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + F_1 \det J_v = 0, \\ A_2 + B_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + C_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + D_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + E_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + F_2 \det J_v = 0, \end{cases}$$

где $\det J_v$ — определитель матрицы Якоби

$$J_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

и $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$ ($i = 1, 2$) — функции от x_1, x_2, v_1, v_2 . Мы полагаем, что эти функции гладкие.

Уравнения Якоби можно рассматривать как набор двух двумерных распределений на некотором четырёхмерном гладком многообразии [7, 11]. Мы получаем разложение комплекса де Рама, представленное на диаграмме 2. Это разложение

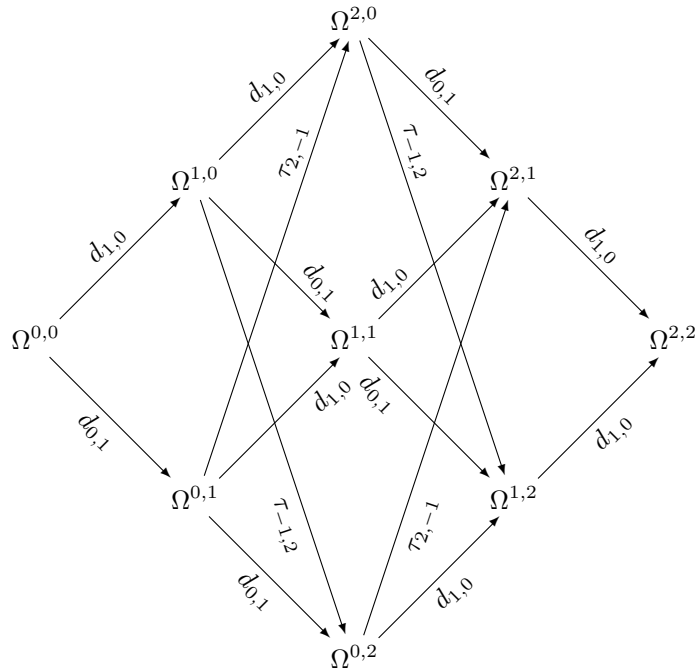


Диаграмма 2. Разложение комплекса де Рама для уравнений Якоби

порождает два тензора $\tau_{-1,2}$, $\tau_{2,-1}$ и одну 2-форму (22):

$$\lambda = \langle \tau_{-1,2}, \tau_{2,-1} \rangle_W.$$

Эта форма может быть использована при классификации уравнений Якоби.

Исследования автора частично финансировались Российским фондом фундаментальных исследований (грант 08-01-00601-а «Деквантование, тропическая математика и математическая физика»).

Литература

- [1] Кушнер А. Г. Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа—Ампера // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2008. — № 4. — С. 43—58.
- [2] Cotton E. Sur les invariants différentiels de quelques équations lineaires aux dérivées partielles du second ordre // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1900. — Vol. 17. — P. 211—244.
- [3] Kushner A. G. Almost product structures and Monge—Ampère equations // Lobachevskii J. Math. — 2006. — Vol. 23. — P. 151—181. — <http://ijm.ksu.ru>.
- [4] Kushner A. G. A contact linearization problem for Monge—Ampère equations and Laplace invariants // Acta Appl. Math. — 2008. — Vol. 101, No 1—3. — P. 177—189.
- [5] Kushner A. G. Classification of Monge—Ampère equations // Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability. The Abel Symposium 2008. Proc. of the Fifth Abel Symposium on Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability, June 18—21, 2008, Tromsø, Norway / B. Kruglikov, V. Lychagin, E. Straume, eds. — Berlin: Springer, 2009. — P. 223—256.
- [6] Kushner A. G. On contact equivalence of Monge—Ampère equations to linear equations with constant coefficients // Acta Appl. Math. — 2010. — Vol. 109, No. 1. — P. 197—210.
- [7] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. — (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications; Vol. 101).
- [8] Laplace P. S. Recherches sur le calcul intégrals aux différences partielles // Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris. — 1773; Oeuvres complètes. Vol. 9. — Paris: Gauthier-Villars, 1893; New York, 1966.
- [9] Lie S. Über einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Orduung // Math. Ann. — 1872. — Vol. 5. — P. 209—256.
- [10] Lie S. Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen // Math. Ann. — 1874. — Vol. 8. — P. 215—303.
- [11] Lychagin V. V. Lectures on Geometry of Differential Equations. — Rome: La Sapienza, 1993.

