Максимально подвижные пространства финслерова типа и их обобщения

В. И. ПАНЬЖЕНСКИЙ, О. В. СУХОВА
Пензенский государственный
педагогический университет
e-mail: Suhova_-O@list.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: финслерово пространство, обобщённое финслерово пространство, максимально подвижное пространство.

Аннотация

В настоящей работе обсуждаются некоторые обобщения максимально подвижных пространств финслерова типа. К числу таких обобщений относятся локально конические пространства, характеризующиеся тем, что риманова метрика касательных пространств реализуется на круговом конусе, и обобщённые лагранжевы пространства с метрикой Тамма, касательные римановы пространства которых допускают все вращения. На касательном расслоении риманова многообразия исследуется специальный класс метрик структуры почти произведения, порождённый метрикой Тамма, который содержит известные метрики Сасаки и Чигера—Громола. Указано место данного класса в классификации Навейра римановых метрик структуры почти произведения.

Abstract

V. I. Panzhensky, O. V. Sukhova, Maximally movable spaces of Finsler type and their generalization, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 109—119.

In this paper, we consider some generalization of maximally movable spaces of Finsler type. Among them, there are locally conic spaces (Riemannian metrics of their tangent spaces are realized on circular cones) and generalized Lagrange spaces with Tamm metrics (their tangent Riemannian spaces admit all rotations). On the tangent bundle of a Riemannian manifold, we study a special class of almost product metrics, generated Tamm metric. This class contains Sasaki metric and Cheeger—Gromol metric. We determine the position of this class in the Naveira classification of Riemannian almost product metrics.

1. Финслеровы пространства и их обобщения

1.1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, TM — касательное расслоение над M, (x^i) — локальные координаты на M, (x^i, v^i) — естественные локальные координаты на TM, где v^i — слоевые координаты: $v = v^i\partial_i$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $i, j, \ldots = \overline{1, n}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 109—119.

Финслерова структура на M определяется заданием на TM метрической функции $L(x,v)$, положительной: $L(x,v) > 0$, $v \neq 0$, положительно однородной первой степени по координатам касательного вектора: $L(x, \lambda v) = \lambda L(x,v)$, $\lambda > 0$, и такой, что квадратичная форма $\varphi(\xi) = g_{ij}(x,v)\xi^i\xi^j$ является положительно определённой: $\varphi(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$, где $F = L^2$, $F_{\cdot i} = \partial F/\partial v^i = \dot{\partial}_i F$, а функции

$$g_{ij} = \frac{1}{2} F_{\cdot i \cdot j} \tag{1.1}$$

являются компонентами тензорного поля g — метрического тензора финслерова пространства $F^n = (M, L)$. Если x и $x + dx$ — две близкие точки, то расстояние ds между ними есть значение функции L в точке $(x, dx) \in TM$: $ds = L(x, dx)$. В силу однородности метрической функции F имеем $v^i F_{\cdot i} = 2F$, $v^i F_{\cdot i \cdot j} = F_{\cdot j}$, откуда следует, что

$$F = g_{ij} v^i v^j. \tag{1.2}$$

Поэтому

$$ds^2 = g_{ij}(x, dx)\, dx^i\, dx^j, \tag{1.3}$$

т. е. расстояние ds в финслеровом пространстве, как и в случае риманова пространства, определяется метрическим тензором. Из (1.1) следует, что компоненты $g_{ij}(x,v)$ метрического тензора финслерова пространства являются однородными нулевой степени по v функциями координат, т. е.

$$v^k g_{ij \cdot k} = 0. \tag{1.4}$$

В финслеровой геометрии характерным является тензор

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} g_{ij \cdot k}, \tag{1.5}$$

обращение в нуль которого является необходимым и достаточным условием того, чтобы пространство F^n являлось римановым. Этот тензор, очевидно, симметричен по всем индексам. Заметим, что финслерову структуру можно ввести, задав метрический тензор $g_{ij}(x,v)$, однородный нулевой степени по v и такой, что тензор $g_{ij \cdot k}$ симметричен по всем индексам. В этом случае метрическая функция, порождающая по формуле (1.1) тензор g, имеет вид (1.2).

1.2. Одним из естественных обобщений римановых и финслеровых пространств является пространство линейных элементов с непотенциальной метрикой (обобщённое финслерово пространство $\mathcal{F}^n$), метрическая структура которого определяется заданием дважды ковариантного симметричного положительно определённого тензорного поля g, компоненты которого $g_{ij}(x,v)$ являются однородными нулевой степени по координатам касательного вектора функциями.

Длина s кривой c: $x = x(t)$ базисного многообразия M вдоль векторного поля $v = v(t)$ определяется интегралом

$$s = \int \sqrt{g_{ij}(x(t), v(t))\dot{x}^i \dot{x}^j}\, dt. \tag{1.6}$$

Если, в частности, $v(t) = \dot{x}(t)$, то (1.6) определяет длину базисной кривой, которая в силу однородности нулевой степени функции $g_{ij}(x, \dot{x})$ по $\dot{x}$ не зависит от выбора параметризации этой кривой.

Прямым обобщением финслерова пространства является лагранжево пространство L^n, лагранжиан $L(x, v)$ которого не обладает, вообще говоря, какой-либо однородностью. Требуется лишь невырожденность лагранжиана L: $\det\|L_{\cdot i \cdot j}\| \neq 0$, что позволяет привести уравнения Эйлера—Лагранжа к каноническому виду и с помощью преобразований Лежандра перейти к уравнениям Гамильтона. Если снять условие однородности на компоненты метрического тензора обобщённого финслерова пространства, мы приходим к понятию обобщённого лагранжева пространства $\mathcal{L}^n$.

1.3. Так же как финслерово пространство является обобщением риманова пространства, финслерова связность является обобщением линейной связности.

Пусть, как и ранее, M — гладкое многообразие, TM — касательное расслоение над M, $\pi\colon TM \to M$ — каноническая проекция. Отображение π индуцирует над TM векторное расслоение

$$\pi^*(TM) = \bigcup_{z \in TM} T_{\pi(z)}M,$$

которое называется финслеровым расслоением. Множество гладких сечений из TM в $\pi^*(TM)$ обозначим через $\operatorname{Sec}\pi^*(TM)$. Каждое такое сечение $X\colon TM \to \pi^*(TM)$ есть финслерово векторное поле. Локальный базис $\{\partial_i\}$ векторных полей на M является локальным базисом и финслеровых векторных полей: $X = X^i(x, v)\partial_i$. Финслерово векторное поле $v\colon z = (x, v) \to (z, v)$ называется фундаментальным: $v = v^i\partial_i$, а векторное поле $V = v^i\dot{\partial}_i$ на TM есть поле Лиувилля.

Финслерова связность на M — это отображение

$$\nabla\colon \operatorname{Sec} T(TM) \times \operatorname{Sec}\pi^*(TM) \to \operatorname{Sec}\pi^*(TM),$$

которое каждому векторному полю X на TM и финслерову векторному полю Y ставит в соответствие финслерово векторное поле $Z = \nabla_X Y$ (ковариантная производная от Y вдоль X). При этом требуется, чтобы отображение ∇ обладало известными свойствами определения линейной связности по Кошулю.

Предположим теперь, что на TM задана инфинитезимальная связность, т. е. распределение $H\colon z \to H_z$ горизонтальных площадок и $\delta_i = \partial_i - H_i^k\dot{\partial}_k$ — локальный базис векторных полей этого распределения. Если (F_{ij}^k, C_{ij}^k) — коэффициенты связности ∇, определяемые разложениями

$$\nabla_i\partial_j \equiv \nabla_{\delta_i}\partial_j = F_{ij}^k\partial_k, \quad \dot{\nabla}_i\partial_j \equiv \nabla_{\dot{\partial}_i}\partial_j = C_{ij}^k\partial_k, \tag{1.7}$$

то, потребовав, чтобы $F_{ij}^k = F_{ji}^k$, $C_{ij}^k = C_{ji}^k$ и $\nabla_X g = 0$ для всех $X \in \operatorname{Sec} T(TM)$, находим, что

$$F_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{is} - \delta_s g_{ij}), \tag{1.8}$$

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\dot{\partial}_i g_{sj} + \dot{\partial}_j g_{is} - \dot{\partial}_s g_{ij}). \tag{1.9}$$

Построенную таким образом связность назовём метрической финслеровой связностью.

Пусть теперь $\nabla(H_i^k, F_{ij}^k, C_{ij}^k)$ — метрическая финслерова связность обобщённого финслерова пространства $\mathcal{F}^n$. Тогда её коэффициенты F_{ij}^k и тензорная часть C_{ij}^k выражаются через коэффициенты H_i^k инфинитезимальной связности и компоненты g_{ij} метрического тензора по формулам (1.8) и (1.9). Из (1.8) следует, что для вычисления коэффициентов связности F_{ij}^k, кроме компонент метрического тензора, необходимы ещё и коэффициенты инфинитезимальной связности.

Векторное поле X на TM называется горизонтальным, если $\nabla_X v = 0$, где $v = v^i \partial_i$ — фундаментальное финслерово векторное поле. Если отображение, которое каждой точке $z \in TM$ ставит в соответствие множество всех горизонтальных векторов в этой точке, является инфинитезимальной связностью, то связность ∇ называется регулярной. Коэффициентами такой инфинитезимальной связности являются функции F_{i0}^k, а условием регулярности является невырожденность матрицы $M_i^k = \delta_i^k + C_{i0}^k$. Регулярная финслерова связность ∇ называется связностью Картана, если $H_i^k = F_{i0}^k$, т. е. исходная инфинитезимальная связность совпадает с инфинитезимальной связностью, порождённой регулярной связностью ∇.

Коэффициенты метрической связности Картана, как и в финслеровом случае, обозначаются через Γ_{ij}^{*k}, а для их вычисления в соответствии с (1.8) имеем формулу

$$\Gamma_{ij}^{*k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} - \frac{1}{2} g^{kp} (g_{pi \cdot s} \Gamma_{j0}^{*s} + g_{jp \cdot s} \Gamma_{i0}^{*s} - g_{ij \cdot s} \Gamma_{p0}^{*s}), \tag{1.10}$$

где

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij}) - \tag{1.11}$$

символы Кристоффеля метрического тензора. Свернув (1.10) с v^j, получим

$$H_{li}^{km} \Gamma_{m0}^{*l} = \left\{ {k \atop i0} \right\}, \tag{1.12}$$

где

$$H_{li}^{km} = \delta_l^k \delta_i^m + \frac{1}{2} g^{kp} g_{sp \cdot l} v^s \delta_i^m + \frac{1}{2} g^{kp} g_{ip \cdot l} v^m - \frac{1}{2} g^{km} g_{si \cdot l} v^s. \tag{1.13}$$

Для того чтобы система (1.12) имела единственное решение и, следовательно, существовала единственная метрическая связность Картана, необходимо и достаточно, чтобы матрица H_{li}^{km} была невырожденной. Для явного выражения Γ_{i0}^{*k} (и, следовательно, Γ_{ij}^{*k}) надо иметь матрицу $\tilde{H}_{kq}^{pi}$, обратную к H_{li}^{km}:

$\tilde{H}^{pi}_{kq} H^{km}_{li} = \delta^p_l \delta^m_q$. Пространства $\mathcal{F}^n$, для которых матрица H^{km}_{li} является невырожденной, называют пространствами с регулярной метрикой. Обобщённое финслерово пространство $\mathcal{F}^n$ с регулярной связностью и регулярной метрикой называется регулярным. Регулярное пространство $\mathcal{F}^n$ обладает единственной связностью Картана. Нетрудно убедиться, что финслеровы пространства являются регулярными.

2. Максимально подвижные обобщённые финслеровы пространства

2.1. Векторное поле $X = \xi^k \partial_k$ является инфинитезимальным движением обобщённого финслерова пространства $\mathcal{F}^n = (M, g)$, если производная Ли вдоль X от метрического тензора g обращается в нуль: $\mathcal{L}_X g = 0$, или в локальных координатах

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + v^p \partial_p \xi^k g_{ij \cdot k} + \partial_i \xi^k g_{kj} + \partial_j \xi^k g_{ik} = 0. \tag{2.1}$$

Теорема [1]. *Множество всех инфинитезимальных движений регулярного обобщённого финслерова пространства $\mathcal{F}^n$ является алгеброй Ли конечной размерности $r \leqslant n(n+1)/2$.*

2.2. Пусть теперь $\mathcal{F}^n$ — обобщённое финслерово пространство, у которого функция $F = g_{ij} v^i v^j$ задаёт ассоциированную финслерову структуру. Если X — инфинитезимальное движение пространства $\mathcal{F}^n$, то X является инфинитезимальным движением и ассоциированного финслерова пространства F^n. Поэтому, так же как и в случае регулярного пространства $\mathcal{F}^n$, размерность алгебры Ли инфинитезимальных движений не превосходит $n(n+1)/2$. Как следует из теоремы Ванга [10], если финслерово пространство F^n допускает группу движений максимальной размерности $n(n+1)/2$, то оно является римановым пространством постоянной секционной кривизны. Поэтому возникает естественный вопрос. Существуют ли пространства $\mathcal{F}^n$, отличные от римановых пространств постоянной кривизны с группой движений максимальной размерности? Впервые на возможность существования таких пространств указал известный венгерский геометр А. Моор [8]. Положительное решение гипотезы А. Моора дано в [1].

Действительно, так как группа движений пространства $\mathcal{F}^n$ имеет максимальную размерность, то ассоциированное финслерово пространство F^n является римановым пространством постоянной секционной кривизны. Существует система координат (в некоторой окрестности каждой точки), в которой метрика любого риманова пространства постоянной кривизны K имеет вид

$$ds^2 = \frac{{dx^1}^2 + \ldots + {dx^n}^2}{[1 + \frac{K}{4}({x^1}^2 + \ldots + {x^n}^2)]^2}. \tag{2.2}$$

Интегрируя уравнения Киллинга для метрики (2.2), находим базисные операторы её группы движений

$$X_i = \left(1 - \frac{K}{4}Q_i\right)\partial_i + \frac{K}{2}x^i x^s \partial_s, \tag{2.3}$$

$$X_{jk} = -x^k\partial_j + x^j\partial_k, \tag{2.4}$$

где (2.3) — это операторы сдвигов, (2.4) — операторы вращений,

$$Q_i = {x^1}^2 + \ldots + {x^{i-1}}^2 - {x^i}^2 + {x^{i+1}}^2 + \ldots + {x^n}^2, \quad s \neq i.$$

Интегрируя уравнения движений (2.1) для операторов (2.3) и (2.4), находим общее решение, которое имеет вид

$$g_{ij} = \left[1 + \frac{K}{4}\big({x^1}^2 + \cdots + {x^n}^2\big)\right]^{-2}\left\{c_1\delta_{ij} + c_2\frac{v^i v^j}{{v^1}^2 + \cdots + {v^n}^2}\right\}, \tag{2.5}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, такие что $c_1 + c_2 \neq 0$ (иначе $F = 0$ и метрический тензор вырождается).

Чтобы включить в данный класс пространств $\mathcal{F}^n$ римановы пространства постоянной кривизны в (2.5), будем предполагать, что $c_1 \neq 0$, а метрический тензор запишем в виде

$$g_{ij} = \gamma_{ij} + a\frac{\gamma_{ip}\gamma_{js}v^p v^s}{\gamma_{ps}v^p v^s}, \tag{2.6}$$

где γ_{ij} — компоненты метрического тензора риманова пространства постоянной кривизны, $a = \mathrm{const} \neq -1$.

У максимально подвижных пространств $\mathcal{F}^n$ касательные римановы пространства являются субпроективными пространствами В. Ф. Кагана, реализующимися на n-мерном круговом конусе, вложенном в $(n+1)$-мерное евклидово или псевдоевклидово пространство, а «угол раствора» конуса определяется значением постоянной a. Максимально подвижные пространства $\mathcal{F}^n$ являются регулярными и имеют постоянную флаговую кривизну (кривизну Бервальда), равную $K/(a+1)$.

3. Локально конические пространства и пространства Тамма

3.1. Естественным обобщением максимально подвижных пространств являются так называемые локально конические пространства K^n [3], которые характеризуются тем, что метрика их касательных римановых пространств реализуется на n-мерном круговом конусе, вложенном в $(n+1)$-мерное евклидово или псевдоевклидово пространство. Метрика локально конического пространства K^n имеет вид

$$ds^2 = \gamma_{ij}(x)dx^i dx^j + a(x)\frac{[\gamma_{ij}(x)v^i dx^j]^2}{\gamma_{ij}(x)v^i v^j}. \tag{3.1}$$

При $a = 0$ мы имеем риманову метрику на M. Скалярная функция $a(x)$ определяет угол раствора касательного конуса в точке x, $a(x) \neq -1$. Пространства K^n являются регулярными обобщёнными финслеровыми пространствами. Явные выражения для коэффициентов евклидовой связности Картана и её тензорной части имеют вид

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{kp}(\partial_i\gamma_{pj} + \partial_j\gamma_{ip} - \partial_p\gamma_{ij}) + \\ + \frac{1}{2(a+1)u_pv^p}(v^k u_j \partial_i a + v^k u_i \partial_j a - u_i u_j \gamma^{kp}\partial_p a), \tag{3.2}$$

$$C^k_{ij} = \frac{a}{a+1}\left(\frac{v^k\gamma_{ij}}{u_pv^p} - \frac{v^k u_i u_j}{(u_pv^p)^2}\right), \tag{3.3}$$

где $u_i = \gamma_{ip}v^p$. Метрика локально конического пространства K^n $(n > 2)$ совпадает с римановой метрикой базисного многообразия $(a = 0)$ тогда и только тогда, когда второй тензор кривизны равен нулю. Для того чтобы локально коническое пространство имело в каждой точке одинаковый угол раствора касательного конуса, необходимо и достаточно, чтобы третий тензор кривизны был равен нулю. Первый тензор кривизны локально конического пространства равен нулю тогда и только тогда, когда базисное многообразие является локально евклидовым $(\gamma_{ij} = \delta_{ij})$, а угол раствора касательного конуса является постоянным $(a = \mathrm{const})$. Имеет место аналог теоремы Шура: если в каждой точке локально конического пространства K^n $(n > 2)$ касательные конусы имеют одинаковый угол раствора и флаговая кривизна одинакова по всем двумерным направлениям, то она сохраняет постоянное значение и от точки к точке.

3.2. В 1965 году на конференции по физике элементарных частиц, проходившей в Киото, академик И. Е. Тамм сделал доклад, посвящённый построению квантовой теории поля в кривом импульсном пространстве. Указывая на ограниченность релятивистской теории, в которой постулируется, что пространство импульсов является плоским пространством Минковского, и на ряд непреодолимых в рамках этой теории трудностей, И. Е. Тамм предлагает считать пространство импульсов римановым пространством, метрика которого инвариантна относительно собственных преобразований Лоренца. Однако при построении данного варианта теории поля возникают трудности, связанные с отсутствием подходящего предельного перехода к плоскому пространству. Эти трудности, возможно, удастся преодолеть за счёт выбора метрического тензора, и не исключено, что более подходящей для обобщения является евклидова, а не псевдоевклидова форма обычной теории. Учитывая указанные замечания и рассматривая произвольную размерность, в [4] мы вводим обобщённые лагранжевы пространства $\mathcal{L}^n$ с «метрикой Тамма»

$$g_{ij}(x, v) = \varphi(r)\gamma_{ij}(x) + \psi(r)v_iv_j, \tag{3.4}$$

где φ и ψ — произвольные функции аргумента $r = (1/2)\gamma_{pq}(x)v^pv^q$, $\gamma_{ij}(x)$ — компоненты (псевдо)риманова метрического тензора, $v_i = \gamma_{ip}v^p$, $\varphi + 2r\psi \neq 0$.

Указанный класс пространств характеризуется тем, что риманова метрика касательного пространства T_xM инвариантна относительно всех вращений.

4. Некоторые метрики структуры почти произведения на касательном расслоении риманова многообразия

4.1. Пусть, как и ранее, (M, g) — риманово многообразие, TM — касательное расслоение, H — инфинитезимальная связность с коэффициентами $H_i^k(x, v)$, определяющая горизонтальное распределение H и, следовательно, структуру почти произведения на TM:

$$T_z(TM) = H_z \oplus V_z,$$

где V — вертикальное распределение, касающееся слоёв.

Векторные поля $\delta_A = (\delta_i, \dot{\partial}_i)$ образуют локальный базис векторных полей, адаптированный к структуре почти произведения. Дуальный ему базис $\delta^B = (dx^k, \delta v^k)$ состоит из горизонтальных форм dx^k и вертикальных форм $\delta v^k = dv^k + H_p^k dx^p$.

Структурные уравнения имеют вид

$$[\delta_i, \delta_j] = R_{ij}^k \dot{\partial}_k, \quad [\delta_i, \dot{\partial}_j] = L_{ij}^k \dot{\partial}_k, \quad [\dot{\partial}_i, \dot{\partial}_j] = 0, \tag{4.1}$$

где

$$R_{ij}^k = \delta_j H_i^k - \delta_i H_j^k, \quad L_{ij}^k = \dot{\partial}_j H_i^k.$$

Обозначим через h и v операторы проектирования на H и V соответственно, $h^2 = h$, $v^2 = v$, $hv = vh = 0$. Тогда $P = v - h$ есть оператор структуры почти произведения, $P^2 = \mathrm{id}$.

Действие оператора P определяется следующим образом:

$$P(X^h) = -X^h, \quad P(X^v) = X^v,$$

где X^h, X^v — горизонтальный и вертикальный лифты векторного поля в связности ∇. Если X — векторное поле на TM, $X = X^i\delta_i + X^{n+i}\dot{\partial}_i$, то

$$P(X) = -X^i\delta_i + X^{n+i}\dot{\partial}_i.$$

В адаптированных координатах матрица компонент структурного аффинора P имеет вид

$$(P_I^K) = \begin{pmatrix} -\delta_i^k & 0 \\ 0 & \delta_i^k \end{pmatrix}.$$

Пусть на касательном расслоении TM задана риманова метрика

$$\tilde{g} = g_{ik} dx^i \otimes dx^k + \bar{g}_{ik} \delta v^i \otimes \delta v^k, \tag{4.2}$$

где g_{ik} — компоненты римановой метрики g, $\bar{g}_{ik} = \varphi(r) g_{ik} + \psi(r) v_i v_k$ — компоненты метрики Тамма.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ коэффициенты связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ метрики $\tilde{g}$, определяемые разложением $\tilde{\nabla}_{\delta_I}\delta_J = \tilde{\Gamma}^K_{IJ}\delta_K$. Вычисляя коэффициенты $\tilde{\Gamma}^K_{IJ}$ по формуле Кошуля, приходим к следующим результатам:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}^{n+k}_{ij} = \frac{1}{2}R^k_{ij},$$
$$\tilde{\Gamma}^k_{i\ n+j} = \frac{1}{2}g^{ks}\bar{g}_{jp}R^p_{si}, \quad \tilde{\Gamma}^k_{n+i\ j} = -\frac{1}{2}g^{ks}\bar{g}_{ip}R^p_{js},$$
$$\tilde{\Gamma}^{n+k}_{n+i\ j} = 0, \quad \tilde{\Gamma}^k_{n+i\ n+j} = 0,$$
$$\tilde{\Gamma}^{n+k}_{i\ n+j} = \Gamma^k_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}^{n+k}_{n+i\ n+j} = C^k_{ij},$$

где

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}), \quad C^k_{ij} = \frac{1}{2}\bar{g}^{ks}(\dot{\partial}_i\bar{g}_{sj} + \dot{\partial}_j\bar{g}_{is} - \dot{\partial}_s\bar{g}_{ij}).$$

4.2. В 1983 году испанский математик Навейра выделил 64 класса римановых структур почти произведения [9] и получил инвариантные характеристики каждого класса.

Согласно данной классификации каждый класс римановой структуры почти произведения $(TM, \tilde{g}, P)$ определён парой условий, первое из которых соответствует горизонтальному распределению, второе — вертикальному распределению. Условия выбираются среди следующих:

F: $\tilde{\nabla}_{hX}(P)hY = \tilde{\nabla}_{hY}(P)hX$
(соответственно $\tilde{\nabla}_{vX}(P)vY = \tilde{\nabla}_{vY}(P)vX$),

AF: $\tilde{\nabla}_{hX}(P)hX = 0$ (соответственно $\tilde{\nabla}_{vX}(P)vX = 0$),

D_1: $\alpha^h = 0$ (соответственно $\alpha^v = 0$),

D_2: $\langle\tilde{\nabla}_{hX}(P)hY + \tilde{\nabla}_{hY}(P)hX, vZ\rangle = \dfrac{2}{p}\langle hX, hY\rangle\alpha^h(vZ)$
(соответственно $\langle\tilde{\nabla}_{vX}(P)vY + \tilde{\nabla}_{vY}(P)vX, hZ\rangle = \dfrac{2}{q}\langle vX, vY\rangle\alpha^v(hZ)$),

TGF: $\tilde{\nabla}_{hX}(P) = 0$ (соответственно $\tilde{\nabla}_{vX}(P) = 0$),

F_1: $\tilde{\nabla}_{hX}(P)hY = \tilde{\nabla}_{hY}(P)hX,\ \alpha^h = 0$
(соответственно $\tilde{\nabla}_{vX}(P)vY = \tilde{\nabla}_{vY}(P)vX,\ \alpha^v = 0$),

F_2: $\langle\tilde{\nabla}_{hX}(P)hY, vZ\rangle = \dfrac{1}{p}\langle hX, hY\rangle\alpha^h(vZ)$
(соответственно $\langle\tilde{\nabla}_{vX}(P)vY, hZ\rangle = \dfrac{1}{q}\langle vX, vY\rangle\alpha^v(hZ)$)

для любых векторных полей hX, hY, hZ (vX, vY, vZ), принадлежащих горизонтальному (соответственно вертикальному) распределению на TM. Здесь

$$\alpha^h(X) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_i}(P)E_i, X), \quad \alpha^v(X) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_{n+i}}(P)E_{n+i}, X),$$

$\{E_i, E_{n+i}\}$ — некоторый ортонормированный базис, адаптированный к структуре почти произведения,

Геометрические свойства данных классов получены в [6].

Теорема. *Пусть на TM задана риманова метрика* (2.6) *и инфинитезимальная связность H порождается связностью связностью Леви-Чивита метрики g. Тогда риманова структура почти произведения $(TM, \tilde{g}, P)$ принадлежит классу Навейры (AF, TGF).*

Доказательство. Рассмотрим условие

$$\mathrm{AF}\colon \tilde{\nabla}_{hZ}(P)hZ = 0$$

для горизонтального распределения. Выполнение данного условия означает, что распределение является вполне геодезическим, т. е. геодезическая, касательная к распределению в одной точке, остаётся касательной по всей своей длине. Полагая $hZ = hX + hY$, приходим к равносильному условию

$$\tilde{\nabla}_{hX}(P)hY + \tilde{\nabla}_{hY}(P)hX = 0.$$

В адаптированных к структуре почти произведения координатах имеем

$$\tilde{\nabla}_{\delta_i}(P)\delta_j + \tilde{\nabla}_{\delta_j}(P)\delta_i = 0,$$
$$\tilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_j + \tilde{\nabla}_{\delta_j}\delta_i + P(\tilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_j + \tilde{\nabla}_{\delta_j}\delta_i) = 0.$$

После некоторых преобразований получим

$$\tilde{\Gamma}^{n+k}_{ij} + \tilde{\Gamma}^{n+k}_{ji} = 0.$$

Учитывая выражения для коэффициентов связности Леви-Чивита метрики $\tilde{g}$, находим, что

$$-\frac{1}{2}(R^k_{ij} + R^k_{ji}) = 0.$$

Так как $R^p_{ij} = -R^p_{ji}$, получаем, что условие AF для горизонтального распределения структуры почти произведения $(TM, \tilde{g}, P)$ выполняется тождественно.

Рассмотрим условие TGF для вертикального распределения. Выполнение данного условия означает, что распределение определяет вполне геодезическое слоение: каждое его интегральное многообразие является вполне геодезическим подмногообразием. Условие TGF равносильно одновременному выполнению условий F и AF интегрируемости и вполне геодезичности распределения.

Для распределения V условие F имеет вид

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\partial}_i}(P)\dot{\partial}_j = \tilde{\nabla}_{\dot{\partial}_j}(P)\dot{\partial}_i.$$

Преобразуя данное равенство, находим, что

$$\tilde{\Gamma}^k_{n+i\ n+j} - \tilde{\Gamma}^k_{n+j\ n+i} = 0.$$

Подставляя выражения для коэффициентов связности Леви-Чивита метрики $\tilde{g}$, получаем, что данное равенство выполняется тождественно.

Условие AF для вертикального распределения

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\partial}_i}(P)\dot{\partial}_j + \tilde{\nabla}_{\dot{\partial}_j}(P)\dot{\partial}_i = 0$$

равносильно условию

$$\tilde{\Gamma}^k_{n+i\ n+j} + \tilde{\Gamma}^k_{n+j\ n+i} = 0,$$

которое согласно полученным выражениям для коэффициентов связности Леви-Чивита метрики $\tilde{g}$ выполняется тождественно. Теорема доказана. □

Литература

[1] Паньженский В. И. О группах изометрий метрических пространств линейных элементов. — Деп. в ВИНИТИ 29.04.81; № 1939-81.

[2] Паньженский В. И. О пространстве линейных элементов непотенциальной метрики с группой изометрий максимальной размерности // Вопросы дифференциальной геометрии в целом. Межвуз. сб. науч. трудов. — Л.: ЛГПИ, 1983. — С. 91—95.

[3] Паньженский В. И. Некоторые вопросы геометрии метрических пространств линейных элементов. Деп. в ВИНИТИ 11.12.1984; № 8179-84.

[4] Паньженский В. И., Сухова О. В. К геометрии пространств с метрикой Тамма // Лаптевские чтения. Сб. трудов Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева (26—31 января 2004 г.). — Пенза: ПГПУ, 2004. — С. 93—99.

[5] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. — М.: Наука, 1981.

[6] Gil-Medrano O. Geometric properties of some classes of Riemannian almost-product manifolds // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1983. — Vol. 32, no. 3. — P. 315—329.

[7] Matsumoto M. Foundation of Finsler geometry and Special Finsler Spaces. — Kaiseisha Press, 1986.

[8] Moor A. Entwicklung einer Geometrie der allgemeiner metrischen Linienelement raume // Acta Sci. Math. — 1956. — Vol. 17, no. 1-2. — P. 85—120.

[9] Naveira A. M. A classification of Riemannian almost-product manifolds // Rend. Mat. Appl. — 1983. — Vol. 3, no. 3. — P. 577—592.

[10] Wang H. S. On Finsler spaces with completely integrable equations of Killing // J. London Math. Soc. — 1947. — Vol. 22. — P. 5—9.