Три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения

Л. М. ПИДЖАКОВА
Тверской государственный технический университет
e-mail: lpidjhacova@mail.ru

УДК 514.763

Ключевые слова: три-ткань, тензоры кривизны и кручения, однородное пространство, конечные уравнения три-ткани.

Аннотация

Рассматривается специальный класс многомерных три-тканей с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. В первой части статьи доказывается, что три-ткани этого класса являются G-тканями, т. е. существует такое подсемейство адаптированных реперов, в которых компоненты тензоров кручения и кривизны ткани являются постоянными. Описана структура однородного пространства G/H, несущего такую три-ткань. Найдены структурные уравнения группы G. Во второй части найдены структурные уравнения ткани W^∇, а также конечные уравнения некоторых специальных классов таких тканей.

Abstract

L. M. Pidzhakova, Three-webs with covariantly constant curvature and torsion tensors, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 121—133.

In this paper, we study a special class of multidimensional 3-webs with covariantly constant curvature and torsion tensors. In the first part, we prove that 3-webs of the class belong to G-webs, i.e., there is a subfamily of adapted frames whose components of curvature and torsion tensors are constant. The structure of homogeneous space G/H carrying the 3-web is described. Structure equations of G-group are found. In the second part, we have found structure equations of W^∇-web and finite equations of some special web classes.

Введение

С появлением работы Г. Ф. Лаптева [4] начался новый этап в развитии дифференциально-геометрических исследований как в нашей стране, так и за рубежом (см. библиографию в [2]). Усовершенствованный Г. Ф. Лаптевым и другими геометрами метод Э. Картана был с успехом применён и в исследовании дифференциальной геометрии многомерных три-тканей.

В 1969 году появилась работа М. А. Акивиса [1], в которой были найдены структурные уравнения многомерной три-ткани и описаны важнейшие специальные классы тканей (см. библиографию в [8]). Далее последовала целая серия

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 121—133.

статей по теории тканей как самого М. А. Акивиса, так и его коллег и учеников. Результаты их многолетних исследований отражены в [8] (см. также [6, 7]).

Одной из основных проблем теории тканей является описание специальных классов тканей, близких к групповым, и доказательство их существования. В настоящей работе рассматриваются три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Такие ткани мы обозначаем W^∇. Ткани W^∇ рассматривались в [9], где, в частности, были получены соответствующие тензорные соотношения и найден пример негрупповой четырёхмерной ткани.

Так как тензоры кручения и кривизны связности Черна, присоединённой к три-ткани W^∇, являются ковариантно постоянными, то многообразие M этой ткани относительно связности Черна является локальным редуктивным пространством [3, 5, 8]. В настоящей работе мы описываем структуру этого редуктивного пространства $M = G/H$, доказываем существование подсемейства адаптированных реперов (такие реперы названы допустимыми), в которых компоненты тензоров кривизны и кручения ткани являются постоянными. Кроме того, мы находим структурные уравнения групп G и H и описываем соответствующие им алгебры Ли в терминах основных тензоров ткани. Основным результатом работы является следующая теорема.

Основная теорема. *Ткань W^∇ является G-тканью.*

Во второй части работы найдены структурные и конечные уравнения специальных тканей с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения.

1. Редуктивная структура ткани W^∇

Три-тканью $W = (M, \lambda_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, на дифференцируемом многообразии M размерности $2r$ называется совокупность трёх гладких слоений λ_α размерности r, каждые два из которых находятся в общем положении. Как известно [8], корепер на многообразии M можно выбрать так, что слоения ткани W будут задаваться уравнениями

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Тогда структурные уравнения произвольной многомерной три-ткани имеют вид [8]

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^i + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega_j^i - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i &= b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \end{aligned} \tag{1}$$

где величины a и b — тензоры кручения и кривизны ткани соответственно. Компоненты тензоров a и b связаны соотношениями

$$
\begin{aligned}
&b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]},\\
&\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega}^l,\\
&\nabla b^i_{jkl} = \underset{1}{c}^i_{jklm}\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{c}^i_{jklm}\underset{2}{\omega}^m,\\
&\underset{1}{c}^i_{j[k|l|m]} = b^i_{jpl}a^p_{km}, \quad \underset{2}{c}^i_{jk[lm]} = -b^i_{jkp}a^p_{lm}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования, определяемый формулой

$$\nabla a^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} da^i_{jk} + a^m_{jk}\omega^i_m - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k.$$

Мы рассматриваем ткани W^∇, для которых

$$\nabla a^i_{jk} = 0, \quad \nabla b^i_{jkl} = 0. \tag{3}$$

Из условий (2) согласно (3) получаем, что

$$b^i_{jkl} = b^i_{(jkl)}, \quad \underset{1}{c}^i_{jklm} = \underset{2}{c}^i_{jklm} = 0, \tag{4}$$

и тензор a удовлетворяет тождеству Якоби $a^m_{[jk}a^i_{|m|l]} = 0$.

Внешнее дифференцирование уравнений (3) с учётом (2) приводит к следующим тензорным соотношениям [9]:

$$a^i_{mk}b^m_{jpq} + a^i_{jm}b^m_{kpq} = 0, \tag{5}$$

$$b^i_{jkp}a^p_{lm} = 0, \tag{6}$$

$$b^m_{jkl}b^i_{mpq} - b^i_{mkl}b^m_{jpq} - b^i_{jml}b^m_{kpq} - b^i_{jkm}b^m_{lpq} = 0. \tag{7}$$

Уравнения (1) являются структурными уравнениями некоторой аффинной связности, которая называется связностью Черна [8].

Так как тензоры кручения и кривизны связности Черна, присоединённой к три-ткани W^∇, являются ковариантно постоянными, то многообразие M этой ткани относительно связности Черна является локальным редуктивным пространством [3]. Опишем однородную структуру этого пространства.

Подсемейство адаптированных реперов ткани W^∇ назовём *допустимым*, если на нём компоненты тензоров a и b являются постоянными.

Лемма. *Система алгебраических уравнений вида*

$$
\begin{aligned}
&-b^m_{jkl}x^i_m + b^i_{mkl}x^m_j + b^i_{jml}x^m_k + b^i_{jkm}x^m_l = 0,\\
&-a^m_{jk}x^i_m + a^i_{mk}x^m_j + a^i_{jm}x^m_k = 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где b^i_{jkl} — тензор кривизны ткани W^∇, имеет ненулевое решение.

Доказательство. При любых Θ^{kl}, таких что $\Theta^{kl} = \Theta^{lk}$, величины

$$x^i_j = b^i_{jkl}\Theta^{kl}.$$

удовлетворяют системе уравнений (8) в силу соотношений (5)—(7). □

Обозначим совокупность всех линейно независимых решений системы (8) через $c^i_{j\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, \rho$. Тогда любое решение системы (8) можно записать в виде

$$x^i_j = c^i_{j\alpha}\Theta^\alpha. \tag{9}$$

Теорема 1. *Для ткани W^∇ допустимое семейство реперов существует.*

Доказательство. Положим в уравнениях (4) $a = \mathrm{const}$ и $b = \mathrm{const}$. Получим соотношения

$$\begin{aligned} &-b^m_{jkl}\omega^i_m + b^i_{mkl}\omega^m_j + b^i_{jml}\omega^m_k + b^i_{jkm}\omega^m_l = 0,\\ &-a^m_{jk}\omega^i_m + a^i_{mk}\omega^m_j + a^i_{jm}\omega^m_k = 0, \end{aligned}$$

которые имеют тот же вид, что и (8). Поэтому семейство допустимых реперов ткани W^∇ записывается в виде

$$\omega^i_j = c^i_{j\alpha}\Theta^\alpha, \tag{9$'$}$$

где Θ^α — некоторые независимые дифференциальные формы на многообразии ткани.

В силу того что на подсемействе реперов, заданном соотношениями (9′), компоненты тензоров a и b являются постоянными, величины $c^i_{j\alpha}$ также будут постоянными, так как они образуют базис в пространстве решений системы (8).

Теперь необходимо доказать, что система уравнений (9′) вполне интегрируема.

Преобразование $\underset{\alpha}{e_i} = A^j_i \underset{\alpha}{e'_j}$ с постоянной матрицей A^i_j назовём *допустимым*, если оно переводит допустимые реперы в допустимые. Допустимые преобразования удовлетворяют соотношениям

$$b^i_{jkl} = \tilde{A}^i_s A^p_j A^q_k A^r_l b^s_{pqr}, \quad a^i_{jk} = \tilde{A}^i_s A^p_j A^q_k a^s_{pq}, \tag{10}$$

где A и $\tilde{A}$ — обратные матрицы. Совокупность матриц, удовлетворяющих этим равенствам, образует группу Ли. Она называется *подгруппой изотропии*. Обозначим эту группу через H.

Лемма [5]. *Операторы $c_\alpha = (c^i_{j\alpha})$ образуют касательную алгебру Ли $\mathfrak{h}$ группы H.*

Доказательство. Пусть $A(t)$ — кривая в группе H, проходящая через единицу, т. е. $A(0) = E$. Тогда

$$\begin{aligned} b^i_{jkl} &= \tilde{A}(t)^i_s A(t)^p_j A(t)^q_k A(t)^r_l b^s_{pqr},\\ a^i_{jk} &= \tilde{A}(t)^i_s A(t)^p_j A(t)^q_k a^s_{pq}. \end{aligned}$$

Продифференцировав эти соотношения по t, при $t = 0$ получим равенства

$$\begin{aligned} &-\dot{A}^i_m b^m_{jkl} + \dot{A}^m_j b^i_{mkl} + \dot{A}^m_k b^i_{jml} + \dot{A}^m_l b^i_{jkm} = 0,\\ &-\dot{A}^i_m a^m_{jk} + \dot{A}^m_j a^i_{mk} + \dot{A}^m_k a^i_{jm} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\dot{A}^i_j = \frac{\partial}{\partial t} A^i_j \bigg|_{t=0}.$$

Элементами алгебры Ли $\mathfrak{h}$ являются матрицы $\dot{A}^i_j$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{h}$ группы H задаётся системой уравнений (11). Сравнивая (11) с (9), находим, что базисные матрицы в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ — это матрицы $c_\alpha = (c^i_{j\alpha})$. $\square$

Обозначим структурные постоянные алгебры $\mathfrak{h}$ через $C^\gamma_{\alpha\beta}$. Тогда $C^\gamma_{\alpha\beta} = -C^\gamma_{\beta\alpha}$ и для величин $C^\gamma_{\alpha\beta}$ выполняется тождество Якоби.

Операция в алгебре записывается в виде

$$[c_\alpha, c_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} c_\gamma$$

или

$$c^i_{k\alpha} c^k_{j\beta} - c^i_{k\beta} c^k_{j\alpha} = C^\gamma_{\alpha\beta} c^i_{j\gamma}. \tag{12}$$

Продолжим доказательство теоремы 1. На семействе допустимых реперов, заданных соотношениями (9′), первая серия структурных уравнений (1) рассматриваемой ткани W^∇ принимает вид

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= c^i_{j\alpha} \underset{1}{\omega}^j \wedge \Theta^\alpha + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= c^i_{j\alpha} \underset{2}{\omega}^j \wedge \Theta^\alpha - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k. \end{aligned} \tag{13}$$

Дифференцируя уравнения (9′) внешним образом и пользуясь оставшимися структурными уравнениями (1) и (13), придём к уравнениям

$$c^i_{j\alpha} d\Theta^\alpha = c^i_{k\alpha} c^k_{j\beta} \Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta + b^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \tag{14}$$

Уравнения (14) с учётом (12) перепишем в виде

$$c^i_{j\gamma} \left(d\Theta^\gamma - \frac{1}{2} C^\gamma_{\alpha\beta} \Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta \right) = b^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \tag{15}$$

Из этого равенства видно, что формы $d\Theta^\gamma - \frac{1}{2} C^\gamma_{\alpha\beta} \Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta$ являются линейными комбинациями форм $\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l$:

$$d\Theta^\gamma - \frac{1}{2} C^\gamma_{\alpha\beta} \Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta = b^\gamma_{kl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \tag{16}$$

Подставляя в (15) и сравнивая коэффициенты при независимых формах $\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l$, получим соотношения

$$b^i_{jkl} = c^i_{j\alpha} b^\alpha_{kl}. \tag{17}$$

Так как матрицы $(c^i_{j\alpha})$ линейно независимые, то набор чисел b^α_{kl} определятся из (17) однозначно. Отсюда также следует, что величины b^α_{kl} являются постоянными, как и величины b^i_{jkl} и $c^i_{j\alpha}$.

Заметим, что, поскольку тензор b^i_{jkl} симметричен по нижним индексам, из (17) вытекает, что структурные тензоры b^α_{kl} удовлетворяют соотношениям

$$b^\alpha_{kl} = b^\alpha_{lk}, \quad c^i_{j\alpha} b^\alpha_{kl} = c^i_{k\alpha} b^\alpha_{jl}. \tag{18}$$

Таким образом, семейство допустимых реперов, определённое соотношениями (9′), существует тогда и только тогда, когда формы Θ^α удовлетворяют соотношениям (16), причём постоянные b^α_{kl} находятся из соотношений (17).

С учётом (17) тензорные соотношения (6) и (7) ткани W^∇ запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} c^m_{j\alpha}b^\alpha_{kl}c^i_{m\beta}b^\beta_{pq} - c^m_{j\alpha}b^\alpha_{pq}c^i_{m\beta}b^\beta_{kl} = c^m_{k\alpha}b^\alpha_{pq}c^i_{j\beta}b^\beta_{ml} + c^m_{l\alpha}b^\alpha_{pq}c^i_{j\beta}b^\beta_{km}, \\ c^i_{j\alpha}b^\alpha_{kp}a^p_{lm} = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Из второй серии соотношений, поскольку компоненты решения $c_\alpha = (c^i_{j\alpha})$ независимы, вытекают равенства

$$b^\alpha_{kp}a^p_{lm} = 0. \tag{20}$$

С учётом (12) первое из соотношений (19) преобразуется следующим образом:

$$b^\alpha_{pq}b^\beta_{kl}C^\gamma_{\alpha\beta}c^i_{j\gamma} = b^\alpha_{pq}(c^m_{k\alpha}b^\gamma_{kl} + c^m_{l\alpha}b^\gamma_{km})c^i_{j\gamma}.$$

Используя снова линейную независимость решений $(c^i_{j\alpha})$, придём к уравнениям

$$b^\beta_{kl}C^\gamma_{\alpha\beta} = c^m_{k\alpha}b^\gamma_{kl} + c^m_{l\alpha}b^\gamma_{km}. \tag{21}$$

Покажем, что вместе с уравнениями (16) выполняются и их дифференциальные следствия. Дифференцируя (16) внешним образом, используя эти же уравнения и соотношения (13), получим

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}C^\gamma_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}C^\alpha_{\xi\zeta}\Theta^\xi\wedge\Theta^\zeta + b^\alpha_{kl}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l\right)\wedge\Theta^\beta - \frac{1}{2}C^\gamma_{\alpha\beta}\Theta^\alpha\wedge\left(\frac{1}{2}C^\beta_{\xi\zeta}\Theta^\xi\wedge\Theta^\zeta + b^\beta_{kl}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l\right) + \\ + b^\gamma_{kl}\left(c^k_{j\alpha}\underset{1}{\omega}^j\wedge\Theta^\alpha + a^k_{jp}\underset{1}{\omega}^j\wedge\underset{1}{\omega}^p\right)\wedge\underset{2}{\omega}^l - b^\gamma_{kl}\underset{1}{\omega}^k\wedge\left(c^l_{j\alpha}\underset{2}{\omega}^j\wedge\Theta^\alpha - a^l_{jp}\underset{2}{\omega}^j\wedge\underset{2}{\omega}^p\right) = 0 \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} \frac{1}{4}C^\gamma_{\alpha\beta}C^\alpha_{\xi\zeta}\Theta^\xi\wedge\Theta^\zeta\wedge\Theta^\beta + \frac{1}{2}C^\gamma_{\alpha\beta}b^\alpha_{kl}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l\wedge\Theta^\beta - \frac{1}{4}C^\gamma_{\alpha\beta}C^\beta_{\xi\zeta}\Theta^\alpha\wedge\Theta^\xi\wedge\Theta^\zeta - \\ - \frac{1}{2}C^\gamma_{\alpha\beta}b^\beta_{kl}\Theta^\alpha\wedge\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l + b^\gamma_{kl}c^k_{j\alpha}\underset{1}{\omega}^j\wedge\Theta^\alpha\wedge\underset{2}{\omega}^l + b^\gamma_{kl}a^k_{jp}\underset{1}{\omega}^j\wedge\underset{1}{\omega}^p\wedge\underset{2}{\omega}^l - \\ - b^\gamma_{kl}c^l_{j\alpha}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^j\wedge\Theta^\alpha + b^\gamma_{kl}a^l_{jp}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^j\wedge\underset{2}{\omega}^p = 0. \end{gathered}$$

Используя кососимметричность тензора $C^\gamma_{\alpha\beta}$ по нижним индексам, получим

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}C^\gamma_{\alpha[\beta}C^\alpha_{\xi\zeta]}\Theta^\xi\wedge\Theta^\zeta\wedge\Theta^\beta + (C^\gamma_{\alpha\beta}b^\alpha_{kl} - b^\gamma_{jl}c^j_{k\beta} - b^\gamma_{kj}c^j_{l\beta})\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l\wedge\Theta^\beta + \\ + b^\gamma_{kl}a^k_{jp}\underset{1}{\omega}^j\wedge\underset{1}{\omega}^p\wedge\underset{2}{\omega}^l + b^\gamma_{kl}a^l_{jp}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^j\wedge\underset{2}{\omega}^p = 0. \end{gathered}$$

Первая группа слагаемых обращается в нуль, так как тензор $C^\gamma_{\alpha\beta}$ удовлетворяет тождеству Якоби. Вторая и третья группы слагаемых обращаются в нуль в силу соотношений (20) и (21). □

Таким образом, в допустимом репере структурные уравнения (1) три-ткани W^{∇} приняли вид (13), (16). Это вполне интегрируемая система, содержащая только константы. Следовательно, полученная система представляет собой уравнения Маурера—Картана некоторой группы Ли G размерности $2r+\rho$. Формы $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ и Θ^α образуют её инвариантный кобазис. Формы Θ^α образуют инвариантный кобазис подгруппы изотропии H размерности ρ, её структурные уравнения имеют вид

$$d\Theta^\gamma = \frac{1}{2}C^\gamma_{\alpha\beta}\Theta^\alpha \wedge \Theta^\beta.$$

Величины $(c^i_{j\alpha}, a^i_{jk}, C^\alpha_{\beta\gamma}, b^\alpha_{kl})$ образуют структурный тензор группы G. Соответствующими тождествами Якоби являются соотношения (12), (17), (18), тождества Якоби для величин $C^\alpha_{\beta\gamma}$ и a^i_{jk}, а также соотношения (20) и (21).

Ткань W^{∇} определена на однородном пространстве $M = G/H$. Слоения этой ткани выделяются системами $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$ и $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$. Эти уравнения определяют на группе G подгруппы размерности $r+\rho$. Следовательно, в соответствии с определением G-ткани (см. [8, гл. 6]) три-ткань W^{∇} является G-тканью. Основная теорема доказана.

2. Структурные уравнения три-ткани W^{∇} с тензором кривизны минимального ранга

Рассмотрим ткань W^{∇}, у которой компоненты тензора кривизны имеют вид

$$b^i_{jkl} = \mu^i b_j c_k d_l.$$

В силу симметричности тензора b^i_{jkl} по нижним индексам (4) компоненты тензора b должны иметь следующее строение:

$$b^i_{jkl} = \mu^i b_j b_k b_l. \tag{22}$$

Тогда соотношения (7) принимают вид

$$\mu^m b_m b_j b_k b_l b_p b_q = 0.$$

Если все b_j равны 0, то $b^i_{jkl} = 0$ и рассматриваемая ткань является групповой. Этот случай оставляем в стороне как тривиальный, поэтому из последнего равенства следует, что

$$\mu^m b_m = 0. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (6), получим

$$b_p a^p_{lm} = 0. \tag{24}$$

Учитывая (22), из соотношений (5) получаем

$$a^i_{mk}\mu^m b_j + a^i_{jm}\mu^m b_k = 0. \tag{25}$$

Вторая серия дифференциальных уравнений (3) в силу (22) имеет вид

$$\nabla\mu^m b_j b_k b_l + \mu^m \nabla b_j b_k b_l + \mu^m b_j \nabla b_k b_l + \mu^m b_j b_k \nabla b_l = 0. \tag{26}$$

Сворачивая с μ^l, получаем

$$\nabla b_l \mu^l = 0. \tag{27}$$

С другой стороны, дифференцируя внешним образом соотношение (23), получим

$$\nabla\mu^m b_m + \mu^m \nabla b_m = 0.$$

С учётом (27) имеем

$$\nabla\mu^m b_m = 0. \tag{28}$$

Выберем репер так чтобы ковектор b_i стал базисным:

$$b_1 \neq 0, \quad b_{\hat{\imath}} = 0, \quad \hat{\imath} = \overline{2, r}. \tag{29}$$

Тогда из (23) следует, что $\mu^1 = 0$, а из (22) вытекает, что ненулевыми компонентами тензора b^i_{jkl} будут только $b^{\hat{\imath}}_{111}$.

Из условия (24), учитывая (29), получаем

$$a^1_{lm} = 0,$$

а из соотношений (25) следует, что

$$a^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}}\mu^{\hat{m}} = 0.$$

После проведённой канонизации репера структурные уравнения ткани дают

$$d\omega^1_i = \omega^k_i \wedge \omega^1_k.$$

Отсюда следует, что уравнения $\omega^1_i = 0$ вполне интегрируемы, и можно сузить семейство адаптированных реперов рассматриваемой ткани, положив

$$\omega^1_i = 0.$$

Тогда из оставшихся структурных уравнений этой серии получаем

$$d\omega^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}} = \omega^{\hat{k}}_{\hat{\jmath}} \wedge \omega^{\hat{\imath}}_{\hat{k}}.$$

Отсюда следует, что система $\omega^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}} = 0$ вполне интегрируема, т. е. можно положить

$$\omega^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}} = 0. \tag{30}$$

В результате ненулевыми из форм ω^i_j остаются только формы $\omega^{\hat{\imath}}_1$. В силу (22) они удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^{\hat{\imath}}_1 = \mu^{\hat{\imath}} b^3_1 \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1.$$

Учитывая все найденные условия, имеем

$$\begin{aligned}
&\nabla b_{\hat{\imath}} = 0, \quad \nabla\mu^1 = 0,\\
&\nabla b_1 = db_1 + b_k\omega^k_1 = db_1 + b_1\omega^1_1 + b_{\hat{k}}\omega^{\hat{k}}_1 = db_1,\\
&\nabla\mu^{\hat{\imath}} = d\mu^{\hat{\imath}} - \mu^k\omega^{\hat{\imath}}_k = d\mu^{\hat{\imath}} - \mu^1\omega^{\hat{\imath}}_1 - \mu^{\hat{k}}\omega^{\hat{\imath}}_{\hat{k}} = d\mu^{\hat{\imath}}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Это означает, что величины b_1 и $\mu^{\hat{\imath}}$ являются относительными инвариантами.

После канонизации уравнение (26) примет вид

$$\nabla\mu^{\hat{\imath}}(b_1)^3 + 3\mu^{\hat{\imath}}(b_1)^2\nabla b_1 = 0,$$

или, ввиду (31),

$$d\mu^{\hat{\imath}}(b_1)^3 + 3\mu^{\hat{\imath}}(b_1)^2 db_1 = 0.$$

После интегрирования имеем

$$\mu^{\hat{\imath}}(b_1)^3 = b^{\hat{\imath}}_{111} = \mathrm{const} \stackrel{\mathrm{def}}{=} c^{\hat{\imath}}.$$

Остальные компоненты тензора b^i_{jkl}, как уже было отмечено, равны нулю. При этом из соотношений (5) следует, что

$$a^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}} c^{\hat{m}} = 0,$$

а соотношения (28) удовлетворяются тождественно.

Из условия ковариантного постоянства тензора кручения (см. (3)) выводим, что

$$da^{\hat{\imath}}_{jk} - a^{\hat{\imath}}_{mk}\omega^m_j - a^{\hat{\imath}}_{jm}\omega^m_k = 0.$$

По (30) для величин $a^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}}$ получим $da^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}} = 0$, т. е.

$$a^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}} = \mathrm{const} \stackrel{\mathrm{def}}{=} c^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}}.$$

В силу (30)

$$da^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}} - a^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}}\omega^{\hat{m}}_1 - a^{\hat{\imath}}_{1\hat{m}}\omega^{\hat{m}}_{\hat{k}} = 0,$$

следовательно,

$$da^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}} - a^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}}\omega^{\hat{m}}_1 = 0.$$

Доказана следующая лемма.

Лемма. *Структурные уравнения ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения, компоненты тензора кривизны которой имеют специальное строение* (22)*, могут быть приведены к виду*

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat{\imath}}_1 + 2a^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + c^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}}\underset{1}{\omega}^{\hat{\jmath}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}},\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat{\imath}}_1 - 2a^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}} - c^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}}\underset{2}{\omega}^{\hat{\jmath}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}},\\
&d\omega^{\hat{\imath}}_1 = c^{\hat{\imath}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1,\\
&da^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}} = c^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}}\omega^{\hat{m}}_1,
\end{aligned} \tag{32}$$

причём выполняются соотношения

$$c^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}} c^{\hat{m}} = 0, \tag{33}$$

а величины $c^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}}$, $c^{\hat{m}}$ являются постоянными.

Внешнее дифференцирование уравнений (32) приводит к тождествам. Следовательно, рассматриваемый класс тканей задаётся набором постоянных $c^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}}$, $c^{\hat{\imath}}$, связанных соотношениями (33).

Найдём конечные уравнения ткани W^{∇} минимального ранга, для которой $c^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}} = 0$. Назовём такие ткани специальными тканями W^{∇}.

Ввиду соотношения $c^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}} = 0$ компоненты $a^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}}$ становятся постоянными (см. (32)). Положим $a^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}} = c^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}}$. Тогда структурные уравнения специальной три-ткани W^{∇} имеют следующий вид:

$$d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \tag{34}$$

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat{\imath}}_1 + c^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}}, \tag{35}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat{\imath}}_1 - c^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}}, \tag{36}$$

$$d\omega^{\hat{\imath}}_1 = c^{\hat{\imath}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1. \tag{37}$$

Эта замкнутая система с постоянными коэффициентами определяет некоторую группу Ли G размерности $3r-1$ с инвариантными формами $\underset{1}{\omega}^1$, $\underset{2}{\omega}^1$, $\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}}$, $\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}}$, $\omega^{\hat{\imath}}_1$. Вполне интегрируемая система $\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0$, $\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0$, $i = \overline{1,r}$, выделяет подгруппу H группы G размерности $r-1$ со структурными уравнениями $d\omega^{\hat{\imath}}_1 = 0$. Следовательно, H — абелева группа.

Специальная три-ткань W^{∇} определена на однородном пространстве $M = G/H$, причём слоения этой ткани выделяются системами $\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0$, $\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0$ и $\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} + \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0$. Таким образом, специальная ткань W^{∇} является G-тканью [8].

Рассмотрим частный случай.

Пусть матрица $c^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}}$ имеет диагональный вид, причём $c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}} \neq 0$. Тогда структурные уравнения (34)—(37) принимают вид

$$d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \tag{38}$$

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat{\imath}}_1 + c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}}, \tag{39}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^{\hat{\imath}}_1 - c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}}, \tag{40}$$

$$d\omega^{\hat{\imath}}_1 = c^{\hat{\imath}}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1. \tag{41}$$

Здесь и далее по индексу $\hat{\imath}$ суммирования нет.

Интегрируя уравнения (38), получим

$$\underset{1}{\omega}^1 = du^1, \quad \underset{2}{\omega}^1 = dv^1, \tag{42}$$

так что уравнения (41) принимают вид

$$d\omega^{\hat{\imath}}_1 = c^{\hat{\imath}} du^1 \wedge dv^1.$$

Так как $c^{\hat{\imath}} = \mathrm{const}$, то

$$\omega_1^{\hat{\imath}} = \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}(u^1dv^1 - v^1du^1) + d\varphi^{\hat{\imath}}, \tag{43}$$

где $\varphi^{\hat{\imath}}$ — некоторые новые переменные. Ввиду (42) и (43) оставшиеся структурные уравнения (39), (40) примут вид

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1du^1 \wedge dv^1 + du^1 \wedge d\varphi^{\hat{\imath}} + c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}du^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}},$$
$$d\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = -\frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}v^1dv^1 \wedge du^1 + dv^1 \wedge d\varphi^{\hat{\imath}} - c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}dv^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}},$$

или

$$d\left(\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} + \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1v^1du^1 + \varphi^{\hat{\imath}}du^1\right) = c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}du^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}},$$
$$d\left(\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} - \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1v^1dv^1 + \varphi^{\hat{\imath}}dv^1\right) = -c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}dv^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}}.$$

Полагая в последних уравнениях

$$\begin{aligned} \underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} + \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1v^1du^1 + \varphi^{\hat{\imath}}du^1 = \underset{1}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}}, \\ \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} - \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1v^1dv^1 + \varphi^{\hat{\imath}}dv^1 = \underset{2}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}}, \end{aligned} \tag{44}$$

получим уравнения вида

$$d\underset{1}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}} = c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}du^1 \wedge \underset{1}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}}, \quad d\underset{2}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}} = -c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}dv^1 \wedge \underset{2}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}}.$$

Решения последних уравнений могут быть записаны следующим образом:

$$\underset{1}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}} = e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}u^1}du^{\hat{\imath}}, \quad \underset{2}{\bar{\omega}}^{\hat{\imath}} = e^{-c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}v^1}dv^{\hat{\imath}}.$$

Подставляя их в (44), находим формы $\underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}}$, $\underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}}$:

$$\begin{aligned} \underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}u^1}du^{\hat{\imath}} - \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1v^1du^1 - \varphi^{\hat{\imath}}du^1, \\ \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = e^{-c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}v^1}dv^{\hat{\imath}} + \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1v^1dv^1 - \varphi^{\hat{\imath}}dv^1. \end{aligned} \tag{45}$$

Теперь найдём уравнения слоений рассматриваемой ткани.

Согласно теории первое слоение задаётся системой уравнений

$$\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad \underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0,$$

или

$$du^1 = 0, \quad e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}u^1}du^{\hat{\imath}} - \frac{1}{2}c^{\hat{\imath}}u^1v^1du^1 - \varphi^{\hat{\imath}}du^1 = 0.$$

После интегрирования получаем

$$u^1 = x^1, \quad u^{\hat{\imath}} = x^{\hat{\imath}},$$

где x^i $(i = \overline{1, r})$ — постоянные интегрирования — параметры первого слоения.

Уравнения второго слоения имеют вид

$$\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0,$$

или в силу (42) и (45)

$$dv^1 = 0, \quad e^{-c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}v^1} dv^{\hat{\imath}} + \frac{1}{2} c^{\hat{\imath}} u^1 v^1 dv^1 - \varphi^{\hat{\imath}} dv^1 = 0.$$

Интегрируя, находим, что

$$v^1 = y^1, \quad v^{\hat{\imath}} = y^{\hat{\imath}},$$

где y^i $(i = \overline{1, r})$ — параметры второго слоения.

Наконец, уравнения третьего слоения имеют вид

$$\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad \underset{1}{\omega}^{\hat{\imath}} + \underset{2}{\omega}^{\hat{\imath}} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} &du^1 + dv^1 = 0, \\ &e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}u^1} du^{\hat{\imath}} - \frac{1}{2} c^{\hat{\imath}} u^1 v^1 du^1 - \varphi^{\hat{\imath}} du^1 + e^{-c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}v^1} dv^{\hat{\imath}} + \frac{1}{2} c^{\hat{\imath}} u^1 v^1 dv^1 - \varphi^{\hat{\imath}} dv^1 = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эту систему, находим, что

$$\begin{aligned} &u^1 + v^1 = z^1, \\ &e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}z^1} u^{\hat{\imath}} + v^{\hat{\imath}} - \frac{1}{2} c^{\hat{\imath}} z^1 (u^1)^2 + \frac{1}{3} c^{\hat{\imath}} (u^1)^3 = z^{\hat{\imath}}, \end{aligned}$$

где z^i $(i = \overline{1, r})$ — параметры третьего слоения.

Теперь, исключая локальные координаты u^i, v^i, $\varphi^{\hat{\imath}}$ $(i = \overline{1, r}$, $\hat{\imath} = \overline{2, r})$, найдём связь между параметрами слоений ткани, проходящих через одну точку, т. е. найдём уравнения ткани:

$$\begin{aligned} &z^1 = x^1 + y^1, \\ &z^{\hat{\imath}} = e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}(x^1 + y^1)} x^{\hat{\imath}} + y^{\hat{\imath}} - c^{\hat{\imath}} \left(\frac{1}{6} (x^1)^3 + \frac{1}{2} (x^1)^2 y^1 \right). \end{aligned}$$

После изотопического преобразования

$$\begin{aligned} &x^1 \to u^1, \quad e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}x^1} x^{\hat{\imath}} \to u^{\hat{\imath}} c^{\hat{\imath}}, \\ &y^1 \to v^1, \quad y^{\hat{\imath}} \to v^{\hat{\imath}} c^{\hat{\imath}}, \\ &z^1 \to z^1, \quad z^{\hat{\imath}} \to z^{\hat{\imath}} c^{\hat{\imath}} \end{aligned}$$

найденные выше уравнения примут более простой вид:

$$z^1 = u^1 + v^1, \quad z^{\hat{\imath}} = e^{c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}v^1} u^{\hat{\imath}} + v^{\hat{\imath}} - \frac{1}{6} (u^1)^3 - \frac{1}{2} (u^1)^2 v^1. \tag{46}$$

Теорема 2. *Конечные уравнения специальной три-ткани W^{∇} с диагональной невырожденной матрицей $(c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}})$ имеют вид* (46). *Этот класс тканей зависит от $r - 1$ постоянных $c^{\hat{\imath}}_{1\hat{\imath}}$.*

Литература

[1] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1969. — Т. 2. — С. 7—31.

[2] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—246.

[3] Ковальский О. Обобщённые симметрические пространства. — М., 1984.

[4] Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1966. — Т. 1. — С. 139—189.

[5] Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[6] Шелехов А. М. О дифференциально-геометрических объектах высших порядков многомерной три-ткани // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1987. — Т. 19. — С. 101—154.

[7] Шелехов А. М. Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1989. — Т. 21. — С. 109—154.

[8] Akivis M. A., Shelekhov A. M. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

[9] Shelekhov A. M., Pidzhakova L. M. On three-webs with covariantly constant torsion and curvature tensors // Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 1998—1999. — P. 92—103.