Отображения Бэклунда и преобразования Ли—Бэклунда как дифференциально-геометрические структуры

А. К. РЫБНИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: arybnikov@mail.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: преобразования Бэклунда, дифференциально-геометрическая структура, фундаментальный объект, связность в главном расслоении, связность в ассоциированном расслоении, связность, определяющая представление нулевой кривизны, преобразования Ли—Бэклунда, контактные преобразования высших порядков.

Аннотация

Настоящая статья представляет собой изложение доклада, подготовленного автором для Международной конференции «Лаптевские чтения — 2009». В первом разделе рассматриваются преобразования Бэклунда для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Геометрическая теория этих преобразований представлена как специальная глава теории связностей. Второй раздел посвящён дифференциально-геометрическим структурам, порождённым так называемыми преобразованиями Ли—Бэклунда (или, что то же, контактными преобразованиями высших порядков), которые представляют собой частный случай диффеоморфизмов между многообразиями голономных струй сечений. Напомним, что в 1970 г. Г. Ф. Лаптев в докладе на Международном конгрессе математиков в Ницце впервые указал, что дифференцируемые отображения можно рассматривать как дифференциально-геометрические структуры.

Abstract

A. K. Rybnikov, Bäcklund maps and Lie–Bäcklund transformations as differential-geometric structures, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 135—150.

This paper is an exposition of the author's report prepared for the International Conference devoted to the centennial anniversary of G. F. Laptev (Laptev seminar–2009). In the first section, we consider Bäcklund transformations of second-order partial differential equations. In the present work, the theory of Bäcklund transformations is treated as a special branch of the theory of connections. The second section is devoted to differential-geometric structures generated by so-called Lie–Bäcklund transformations (or, equivalently, contact transformations of higher order) that are a special case of diffeomorphisms between the manifolds of holonomic jets. Recall that it was G. F. Laptev who pointed out the possibility of considering differentiable mappings as differential-geometric structures.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 135—150.

1. Преобразования Бэклунда с точки зрения теории связностей

1.1.

Изучение преобразований Бэклунда — одна из наиболее интересных тем в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Эти преобразования применяются для отыскания решений (в частности, солитонных решений) нелинейных дифференциальных уравнений. При рассмотрении преобразований Бэклунда мы придерживаемся трактовки Ф. Пирани и Д. Робинсона [14], согласно которой понятие преобразования Бэклунда является частным случаем более общего понятия *отображения Бэклунда*. Однако наша интерпретация понятия отображения Бэклунда отличается от интерпретации, предложенной в [14].

В работе рассматриваются отображения Бэклунда для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с неизвестной функцией z двух аргументов x^1, x^2:

$$U(x^1, x^2, z, z_1, z_2, z_{11}, z_{12}, z_{22}) = 0. \tag{1}$$

Здесь z_i, z_{kl} $(i, j, \ldots = 1, 2)$ — частные производные функции z по соответствующим аргументам.

Переменные x^1, x^2, z мы рассматриваем как адаптированные локальные координаты $(2+1)$-мерного расслоения общего типа [1] H с двумерной базой (при этом x^1, x^2 являются локальными координатами на базе). Главные дифференциальные формы многообразия H обозначим ω^1, ω^2, ω^{2+1} (при этом ω^1, ω^2 являются главными формами на базе). Обозначим через x^i, z, $p_{j_1 \ldots j_k}$ $(k = 1, \ldots, r)$ локальные координаты в расслоении $J^r H$ (расслоение голономных r-струй сечений). Напомним, что $p_{j_1 \ldots j_k}$ симметричны по нижним индексам. Для любого сечения $\sigma \subset H$, заданного уравнением $z = z(x^1, x^2)$, можно рассматривать поднятые сечения (поднятия) $\sigma^r \subset J^r H$, заданные уравнениями $z = z(x^1, x^2)$, $p_{j_1 \ldots j_k} = z_{j_1 \ldots j_k}$ $(k = 1, \ldots, r)$. Дифференциальное уравнение (1) можно записать в более общем виде

$$U(x^1, x^2, z, p_1, p_2, p_{1\,1}, p_{1\,2}, p_{2\,2}) = 0.$$

На поднятии $\sigma^2 \subset J^2 H$ произвольного сечения это уравнение принимает вид (1). Решения $z = z(x^1, x^2)$ уравнения (1) — это сечения $\sigma \subset H$, на поднятиях которых уравнение (1) удовлетворяется тождественно.

Задание отображения Бэклунда мы трактуем как задание специальной *связности, определяющей представление нулевой кривизны* для наперёд заданного дифференциального уравнения (т. е. связности, формы кривизны которой обращаются в нуль на решениях уравнения и только на них).

Следуя [2], мы обозначаем символом $P(B, G)$ главное расслоение с базой B и структурной группой G. Ассоциированное с ним расслоение с типовым слоем $\Im$ обозначаем $\Im\bigl(P(B, G)\bigr)$.

1.2.

Рассмотрим структурные уравнения, которым удовлетворяют главные дифференциальные формы многообразия H (формы ω^1, ω^2, ω^{2+1}):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^{2+1} = \omega^j \wedge \omega^{2+1}_j + \omega^{2+1} \wedge \omega^{2+1}_{2+1}.$$

Формы

$$\omega^i,\ \omega^{2+1},\ \omega^{2+1}_j,\ \omega^i_j,\ \omega^{2+1}_{2+1} \tag{2}$$

представляют собой систему структурных форм расслоения R^1H (расслоение реперов первого порядка). В процессе правильного продолжения (об этой процедуре см. [4]) возникают симметричные по нижним индексам формы

$$\omega^{2+1}_{j\,k},\ \omega^i_{j\,k},\ \omega^i_{j,\,2+1},\ \omega^{2+1}_{2+1,\,2+1}. \tag{3}$$

Формы (2) и (3) в совокупности представляют собой систему структурных форм расслоения R^2H (расслоение реперов второго порядка). Заметим, что формы ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j одновременно являются главными формами в многообразии 1-струй J^1H, а формы ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, $\omega^{2+1}_{k\,l}$ — главными формами в многообразии 2-струй J^2H.

Можно выделить три фактор-многообразия многообразия R^1H:

- многообразие ${}^1r^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ϑ, где $\vartheta = \omega^1_1 + \omega^2_2$;
- многообразие ${}^1R^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω, ω^2_1, ω^1_2, где $\omega = \omega^1_1 - \omega^2_2$;
- многообразие ${}^1\Re^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω^i_j.

Можно выделить также три фактор-многообразия многообразия R^2H:

- многообразие ${}^2r^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, $\omega^{2+1}_{k\,l}$, ϑ;
- многообразие ${}^2R^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, $\omega^{2+1}_{k\,l}$, ω, ω^2_1, ω^1_2;
- многообразие ${}^2\Re^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, $\omega^{2+1}_{k\,l}$, ω^i_j.

Каждое из многообразий

$${}^kr^*H,\ {}^kR^*H,\ {}^k\Re^*H \quad (k = 1, 2) \tag{4}$$

имеет структуру главного расслоения. Расслоения ${}^1r^*H$, ${}^1R^*H$ и ${}^1\Re^*H$ имеют общую базу J^1H, а расслоения ${}^2r^*H$, ${}^2R^*H$ и ${}^2\Re^*H$ — общую базу J^2H. Структурными группами расслоений (4) (как при $k = 1$, так и при $k = 2$) являются соответственно одномерная группа G_1 и группы SL(2), GL(2). Совокупность слоевых форм в ${}^kr^*H$ состоит из одной формы ϑ; формы ω, ω^2_1, ω^1_2 — слоевые формы в ${}^kR^*H$; формы ω^i_j — слоевые формы в ${}^k\Re^*H$ (как при $k = 1$, так и при $k = 2$). При фиксации точки базы слоевые формы превращаются в инвариантные структурные формы соответствующей группы.

Среди связностей, заданных в главных расслоениях (4), инвариантным образом выделяются *специальные связности* [7], т. е. связности, у которых все коэффициенты связности, кроме коэффициентов при ω^1 и ω^2, равны нулю. Иначе говоря, формы связности $\tilde{\omega}^A$ и слоевые формы ω^A связаны соотношениями

$$\tilde{\omega}^A = \omega^A + \gamma_i^A \omega^i,$$

где $A = 1, \ldots, \dim G$. В случае $k = 1$ коэффициенты связности зависят от x^i, z, p_j, а в случае $k = 2$ от x^i, z, p_j, $p_{k\,l}$.

Замечание 1.1. Рассмотрим формы связности, соответствующие специальной связности, заданной в ${}^kR^*H$ (формы $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1^2$, $\tilde{\omega}_2^1$):

$$\tilde{\omega} = \omega + \gamma_1\omega^1 + \gamma_2\omega^2, \quad \tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + \gamma_{1\,1}^2\omega^1 + \gamma_{1\,2}^2\omega^2, \quad \tilde{\omega}_2^1 = \omega_2^1 + \gamma_{2\,1}^1\omega^1 + \gamma_{2\,2}^1\omega^2$$

и формы специальной связности, заданной в ${}^k\Re^*H$ (формы $\tilde{\tilde{\omega}}_j^i$):

$$\tilde{\tilde{\omega}}_j^i = \omega_j^i + \Gamma_{jk}^i\omega^k.$$

При этом предполагаем, что $\Gamma_{j\,k}^i = \Gamma_{k\,j}^i$.

Заметим, что коэффициенты $\Gamma_{j\,k}^i$ и коэффициенты

$$\gamma_1,\ \gamma_{1\,1}^2,\ \gamma_{2\,1}^1,\ \gamma_2,\ \gamma_{1\,2}^2,\ \gamma_{2\,2}^1$$

связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \Gamma_{1\,1}^1 - \Gamma_{1\,2}^2, & \gamma_{1\,1}^2 &= \Gamma_{1\,1}^2, & \gamma_{2\,1}^1 &= \Gamma_{1\,2}^1,\\ \gamma_2 &= \Gamma_{1\,2}^1 - \Gamma_{2\,2}^2, & \gamma_{1\,2}^2 &= \Gamma_{1\,2}^2, & \gamma_{2\,2}^1 &= \Gamma_{2\,2}^1. \end{aligned}\right\}.$$

Следовательно, задание специальной связности в ${}^k\Re^*H$ равносильно заданию специальной связности в ${}^kR^*H$ и можно ограничиться рассмотрением специальных связностей только в ${}^kr^*H$ и ${}^kR^*H$.

В дальнейшем мы будем рассматривать специальные связности в ${}^kR^*H$, определяющие представления нулевой кривизны для наперёд заданного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Заметим, что связности, определяющие представления нулевой кривизны, могут быть заданы также в отличных от ${}^kR^*H$ главных расслоениях над базой J^kH, но со структурной группой G, которая является подгруппой группы $\mathrm{SL}(2)$.

1.3.

Напомним (см., например, [2]), что связность, заданная в главном расслоении $P(B,G)$, порождает связность в ассоциированном расслоении $\Im\big(P(B,G)\big)$. Наиболее важное значение для нас имеют связности в ассоциированных расслоениях с одномерным типовым слоем. В этом случае совокупность форм связности в $\Im\big(P(B,G)\big)$ состоит, как известно, из одной формы $\tilde{\theta}$, которая имеет вид

$$\tilde{\theta} = dY - \xi_A(Y)\cdot\tilde{\omega}^A.$$

Здесь $\tilde{\omega}^A$ — формы связности в $P(B,G)$ $(A, B, \ldots = 1, \ldots, \dim G)$, которая порождает связность в $\Im\big(P(B,G)\big)$ $(\dim\Im = 1)$.

Коэффициенты $\xi_A(Y)$ удовлетворяют тождествам Ли

$$d\xi_B \cdot \xi_C - d\xi_C \cdot \xi_B = \xi_A C^A_{B\,C}\, dY,$$

где $C^A_{B\,C}$ — структурные константы группы Ли G.

Форма $\tilde{\theta}$ удовлетворяет структурному уравнению

$$d\tilde{\theta} = \tilde{\theta} \wedge \left(-\frac{d\xi_A}{dY} \tilde{\omega}^A \right) - \xi_A \Omega^A,$$

где Ω^A — формы кривизны, соответствующие связности, заданной в $P(B, G)$.

Лемма (см. [8]). *Форму связности $\tilde{\theta}$ в ассоциированном расслоении*

$$\Im\Big(P\big(B, \mathrm{SL}(2)\big)\Big) \quad (\dim \Im = 1)$$

можно представить в виде

$$\tilde{\theta} = \chi\{dy + \tilde{\omega}^2_1 - y\tilde{\omega} - y^2 \tilde{\omega}^1_2\} \quad (\chi \neq 0). \tag{5}$$

Связность в ассоциированном расслоении $\Im({}^kR^*H)$ $(\dim \Im = 1)$ мы называем *связностью Бэклунда класса k* для дифференциального уравнения 2-го порядка (1), если она порождена специальной связностью в ${}^kR^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (1). Связность в $\Im\big(P(J^kH, G)\big)$ $(\dim \Im = 1)$, порождённую специальной связностью в $P(J^kH, G)$, где G — подгруппа группы $\mathrm{SL}(2)$, мы называем *особой связностью Бэклунда класса k*, если связность в $P(J^kH, G)$ определяет представление нулевой кривизны. Особыми связностями Бэклунда являются, в частности, *связности Коула—Хопфа* [10] и связности Бэклунда для эволюционных уравнений [9, 12].

Очевидно, что уравнение Пфаффа

$$\underset{\sigma}{\tilde{\theta}} = 0 \tag{6}$$

вполне интегрируемо в том и только в том случае, когда сечение $\sigma \subset H$ является решением дифференциального уравнения (1) (здесь $\tilde{\theta}$ — форма связности, соответствующая связности Бэклунда, а $\underset{\sigma}{\tilde{\theta}}$ — форма $\tilde{\theta}$, рассматриваемая над сечением $\sigma \subset H$).

Уравнение Пфаффа (6) определяет отображение

$$H \supset \sigma \to \underset{\sigma}{\Sigma} \subset \Im({}^kR^*H) \quad (\dim \Im = 1), \tag{7}$$

при котором любое решение $\sigma \subset H$ дифференциального уравнения (1) переходит в сечение $\underset{\sigma}{\Sigma} \subset \Im({}^kR^*H)$ $(\dim \Im = 1)$, являющееся решением уравнения Пфаффа (6) при заданном $\sigma \subset H$. Мы называем отображение (7) *отображением Бэклунда класса k*, соответствующим дифференциальному уравнению (1), а уравнение (6) — *уравнением Пфаффа, определяющим отображение Бэклунда*. Отображения (7), соответствующие особым связностям Бэклунда, мы называем *особыми отображениями Бэклунда*. Особыми отображениями Бэклунда являются, в частности, *преобразования Коула—Хопфа* [10] и отображения Бэклунда для эволюционных уравнений [9, 12].

1.4.

В качестве главных форм в J^2H можно выбрать формы

$$\omega^i = dx^i,\ \omega^{2+1} = dz - p_i dx^i,\ \omega_j^{2+1} = dp_j - p_{jk}dx^k,\ \omega_{kl}^{2+1} = dp_{kl}.$$

В этом случае уравнение Пфаффа (6) эквивалентно в силу (5) системе уравнений с частными производными

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,1} + y\cdot\underset{\sigma}{\gamma}_1 + y^2\cdot\underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,1},\\ y_2 &= -\underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,2} + y\cdot\underset{\sigma}{\gamma}_2 + y^2\cdot\underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,2},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

которую мы назовём *системой Бэклунда*. Здесь $\underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1i}$, $\underset{\sigma}{\gamma}_i$, $\underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2i}$ $(i = 1,2)$ — коэффициенты связности в ${}^kR^*H$, определяющей представление нулевой кривизны (рассматриваемые на сечении $\sigma \subset H$). Уравнение (1) является условием совместности системы (8). Если при этом любое решение системы (8) является к тому же решением дифференциального уравнения

$$V(x^1, x^2, y, y_1, y_2, y_{11}, y_{12}, y_{22}) = 0, \tag{9}$$

то отображение Бэклунда называют *преобразованием Бэклунда* дифференциального уравнения (1) в дифференциальное уравнение (9).

Можно доказать, что в случае $k = 2$ система Бэклунда имеет ещё более специальный вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (\varphi_2^1 y^2 + \varphi y - \varphi_1^2)\cdot z_{11} + (\psi_2^1 y^2 + \psi y - \psi_1^2)\cdot z_{12} + \chi_{21}^1 y^2 + \chi_1 y - \chi_{11}^2,\\ y_2 &= (\varphi_2^1 y^2 + \varphi y - \varphi_1^2)\cdot z_{12} + (\psi_2^1 y^2 + \psi y - \psi_1^2)\cdot z_{22} + \chi_{22}^1 y^2 + \chi_2 y - \chi_{12}^2,\end{aligned}\right\}$$

где функции

$$\varphi,\ \varphi_1^2,\ \varphi_2^1,\ \psi,\ \psi_1^2,\ \psi_2^1,\ \chi_i,\ \chi_{1i}^2,\ \chi_{2i}^1 \quad (i = 1,2) \tag{10}$$

зависят от x^1, x^2, z, z_1, z_2.

Заметим, что систему Бэклунда (8) можно посредством замены $y = \operatorname{tg}('y/2)$ представить в форме

$$\left.\begin{aligned} 'y_1 &= \underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,1} - \underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,1} + \underset{\sigma}{\gamma}_1\cdot\sin{}'y - \big(\underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,1} + \underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,1}\big)\cdot\cos{}'y,\\ 'y_2 &= \underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,2} - \underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,2} + \underset{\sigma}{\gamma}_2\cdot\sin{}'y - \big(\underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,2} + \underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,2}\big)\cdot\cos{}'y\end{aligned}\right\} \tag{$'8$}$$

либо посредством замены $y = e^{''y}$ представить в форме

$$\left.\begin{aligned} ''y_1 &= \underset{\sigma}{\gamma}_1 + \underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,1}\cdot e^{''y} - \underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,1}\cdot e^{-''y},\\ ''y_2 &= \underset{\sigma}{\gamma}_2 + \underset{\sigma}{\gamma}{}^1_{2\,2}\cdot e^{''y} - \underset{\sigma}{\gamma}{}^2_{1\,2}\cdot e^{-''y}.\end{aligned}\right\} \tag{$''8$}$$

Пример 1.1. Отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда (записанная в форме ($'8$) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}z_1 + \sin y \cdot \cos\frac{z}{2} + \cos y \cdot \sin\frac{z}{2} = \frac{1}{2}z_1 + \sin\left(y + \frac{z}{2}\right), \\ y_2 &= -\frac{1}{2}z_2 + \sin y \cdot \cos\frac{z}{2} - \cos y \cdot \sin\frac{z}{2} = -\frac{1}{2}z_2 + \sin\left(y - \frac{z}{2}\right), \end{aligned}\right\}$$

является автопреобразованием уравнения синус-Гордона

$$z_{1\,2} = \sin z.$$

Пример 1.2. Отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда (записанная в форме ($''8$)) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{z/2+y}, \\ y_2 &= -\frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{z/2-y}, \end{aligned}\right\}$$

является преобразованием уравнения Лиувилля

$$z_{1\,2} = e^z$$

в волновое уравнение

$$y_{1\,2} = 0.$$

Пример 1.3. Отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y - z + z_2, \\ y_2 &= -y + \ln z, \end{aligned}\right\}$$

является преобразованием Бэклунда уравнения

$$z_1 = z \cdot z_{22} + z\ln z - z^2$$

в уравнение

$$y_1 = y + e^{y+y_2}(-1 + y_2 + y_{22}).$$

Заметим, что здесь мы имеем дело с особым преобразованием Бэклунда. В этом случае связность Бэклунда порождена связностью (определяющей представление нулевой кривизны), заданной в расслоении $P(J^1H, G)$, где G — подгруппа группы SL(2), определённая уравнением Пфаффа $\bar\omega_2^1 = 0$ ($\bar\omega$, $\bar\omega_1^2$, $\bar\omega_2^1$ — инвариантные структурные формы группы SL(2)).

Пример 1.4. Система

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_2 \cdot z_{1\,1} + (2z_2 \cdot z_{1\,1} - 1) \cdot y + (z_2 \cdot z_{1\,1} - 1) \cdot y^2, \\ y_2 &= z_2 \cdot z_{1\,2} + (2z_2 \cdot z_{1\,2} - 1) \cdot y + (z_2 \cdot z_{1\,2} - 1) \cdot y^2 \end{aligned}\right\}$$

является системой Бэклунда, определяющей отображение Бэклунда класса 2 для уравнения

$$z_{1\,1} \cdot z_{2\,2} - (z_{1\,2})^2 + z_2 \cdot z_{1\,1} - z_2 \cdot z_{1\,2} = 0.$$

1.5.

При рассмотрении преобразований Бэклунда естественным образом возникает вопрос об условиях их существования. Необходимое условие существования отображений Бэклунда для уравнений второго порядка устанавливает следующая теорема, которая является уточнением известного с 1906 г. результата А. К. Форсиса [13].

Теорема 1. *Если дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка* (1) *допускает отображение Бэклунда класса* 1*, то оно квазилинейное.*

Если уравнение (1) *допускает отображение Бэклунда класса* 2*, то в случае когда функции* (10) *в системе Бэклунда удовлетворяют условиям*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial z_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}+2\begin{vmatrix}\varphi_2^1 & \varphi_1^2\\ \psi_2^1 & \psi_1^2\end{vmatrix}=0,\\ &\frac{\partial\psi_1^2}{\partial z_1}-\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial z_2}+\begin{vmatrix}\varphi_1^2 & \varphi\\ \psi_1^2 & \psi\end{vmatrix}=0,\\ &\frac{\partial\psi_2^1}{\partial z_1}-\frac{\partial\varphi_2^1}{\partial z_2}+\begin{vmatrix}\varphi & \varphi_2^1\\ \psi & \psi_2^1\end{vmatrix}=0,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

оно квазилинейное, а в случае когда условия (11) *не выполнены, это уравнение является уравнением типа Монжа—Ампера*

$$z_{1\,1}\cdot z_{2\,2}-(z_{1\,2})^2+Pz_{1\,1}+Qz_{1\,2}+Rz_{2\,2}+S=0,$$

где P, Q, R, S зависят от x^1, x^2, z, z_1, z_2.

Нами выведены некоторые достаточные условия существования отображений Бэклунда класса 1 (см. [8—10, 12]). Доказано существование отображений Бэклунда класса 2 для уравнений $z_{11}\cdot z_{22}-(z_{12})^2+c^2=0$ ($c=\mathrm{const}$). Доказано также существование отображений Коула—Хопфа класса 2 для уравнений вида $z_{11}\cdot z_{22}-(z_{12})^2+g(z)\cdot f(z_1,z_2)=0$ (см. [10]).

2. Дифференциально-геометрические структуры, порождённые преобразованиями Ли—Бэклунда

2.1. Фундаментальный объект контактного 2-диффеоморфизма. Квазилежандровы и квазиэйлеровы контактные 2-диффеоморфизмы

Так называемые преобразования Ли—Бэклунда, или, что то же, контактные преобразования высших порядков, используются при изучении нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными для приведения дифференциальных уравнений к более простому виду (см., например, [3]).

Контактные преобразования порядка k ($k = 1, 2, \ldots$) представляют собой частный случай диффеоморфизмов между многообразиями голономных k-струй J^kH и J^kH' (или, говоря короче, k-диффеоморфизмов), где H и H' — $(n+1)$-мерные расслоённые многообразия общего типа над n-мерными базами M и M' соответственно. В соответствии с подходом Г. Ф. Лаптева [5] их можно рассматривать как дифференциально-геометрические структуры и, следовательно, определять заданием фундаментального объекта. В настоящей работе мы ограничиваемся для простоты рассмотрением случая $n = 2$, $k = 2$.

Пусть x^i, z — адаптированные локальные координаты расслоения H (при этом x^1, x^2 являются локальными координатами на базе M). Обозначим через x^i, z, p_j локальные координаты в многообразии 1-струй J^1H и через x^i, z, p_j, p_{kl} ($p_{kl} = p_{lk}$) локальные координаты в многообразии 2-струй J^2H. Соответственно ξ^i, y — адаптированные локальные координаты расслоения H' (при этом ξ^1, ξ^2 являются локальными координатами на базе M'). Локальные координаты в многообразии 1-струй J^1H' обозначим ξ^i, y, q_j, локальные координаты в многообразии 2-струй J^2H' обозначим ξ^i, y, q_j, q_{kl} ($q_{kl} = q_{lk}$).

Пусть ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, $\omega^{2+1}_{k\,l}$ — главные формы в J^2H. Они удовлетворяют структурным уравнениям

$$\left.\begin{aligned}
&d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,\\
&d\omega^{2+1} = \omega^j \wedge \omega^{2+1}_j + \omega^{2+1} \wedge \omega^{2+1}_{2+1},\\
&d\omega^{2+1}_j = \omega^m_j \wedge \omega^{2+1}_m + \omega^{2+1}_j \wedge \omega^{2+1}_{2+1} + \omega^k \wedge \omega^{2+1}_{jk} + \omega^{2+1} \wedge \omega^{2+1}_{j,2+1},\\
&d\omega^{2+1}_{jk} = \omega^m_j \wedge \omega^{2+1}_{mk} + \omega^m_k \wedge \omega^{2+1}_{jm} + \omega^{2+1}_j \wedge \omega^{2+1}_{k,2+1} + \omega^{2+1}_k \wedge \omega^{2+1}_{j,2+1} +\\
&\qquad + \omega^m_{jk} \wedge \omega^{2+1}_m + \omega^{2+1}_{jk} \wedge \omega^{2+1}_{2+1} + \omega^l \wedge \omega^{2+1}_{jkl} + \omega^{2+1} \wedge \omega^{2+1}_{jk,2+1}.
\end{aligned}\right\}$$

Таким же структурным уравнениям удовлетворяют главные формы в J^2H' (мы обозначим их ϑ^i, ϑ^{2+1}, ϑ^{2+1}_j, $\vartheta^{2+1}_{k\,l}$):

$$\left.\begin{aligned}
&d\vartheta^i = \vartheta^j \wedge \vartheta^i_j,\\
&d\vartheta^{2+1} = \vartheta^j \wedge \vartheta^{2+1}_j + \vartheta^{2+1} \wedge \vartheta^{2+1}_{2+1},\\
&d\vartheta^{2+1}_j = \vartheta^m_j \wedge \vartheta^{2+1}_m + \vartheta^{2+1}_j \wedge \vartheta^{2+1}_{2+1} + \vartheta^k \wedge \vartheta^{2+1}_{jk} + \vartheta^{2+1} \wedge \vartheta^{2+1}_{j,2+1},\\
&d\vartheta^{2+1}_{jk} = \vartheta^m_j \wedge \vartheta^{2+1}_{mk} + \vartheta^m_k \wedge \vartheta^{2+1}_{jm} + \vartheta^{2+1}_j \wedge \vartheta^{2+1}_{k,2+1} + \vartheta^{2+1}_k \wedge \vartheta^{2+1}_{j,2+1} +\\
&\qquad + \vartheta^m_{jk} \wedge \vartheta^{2+1}_m + \vartheta^{2+1}_{jk} \wedge \vartheta^{2+1}_{2+1} + \vartheta^l \wedge \vartheta^{2+1}_{jkl} + \vartheta^{2+1} \wedge \vartheta^{2+1}_{jk,2+1}.
\end{aligned}\right\}$$

В расслоении реперов $R^1(J^2H)$ слоевыми формами являются формы

$$\omega^i_j,\ \omega^{2+1}_{2+1},\ \omega^i_{jk},\ \omega^{2+1}_{j,2+1},\ \omega^{2+1}_{jk,2+1},\ \omega^{2+1}_{jkl}. \tag{12}$$

При фиксации точки базы слоевые формы (12) превращаются в инвариантные формы структурной группы (которую мы обозначим G):

$$\bar\omega^i_j,\ \bar\omega^{2+1}_{2+1},\ \bar\omega^i_{jk},\ \bar\omega^{2+1}_{j,2+1},\ \bar\omega^{2+1}_{jk,2+1},\ \bar\omega^{2+1}_{jkl}. \tag{$\overline{12}$}$$

В расслоении реперов многообразия $R^1(J^2H')$ слоевыми формами являются формы

$$\vartheta^i_j,\ \vartheta^{2+1}_{2+1},\ \vartheta^i_{jk},\ \vartheta^{2+1}_{j,2+1},\ \vartheta^{2+1}_{jk,2+1},\ \vartheta^{2+1}_{jkl}, \tag{12$'$}$$

структурной группой является та же самая группа G. Формы $(\overline{12})$ и формы

$$\bar\vartheta^i_j,\ \bar\vartheta^{2+1}_{2+1},\ \bar\vartheta^i_{jk},\ \bar\vartheta^{2+1}_{j,2+1},\ \bar\vartheta^{2+1}_{jk,2+1},\ \bar\vartheta^{2+1}_{jkl}, \tag{$\overline{12}'$}$$

в которые формы (12′) превращаются при фиксации точки базы, удовлетворяют одним и тем же структурным уравнениям.

Диффеоморфизм между многообразиями 2-струй J^2H и J^2H' (иначе говоря, 2-диффеоморфизм) можно задать либо в явном виде уравнениями, связывающими локальные координаты многообразий J^2H и J^2H', либо уравнениями Пфаффа, связывающими главные (базисные) дифференциальные формы этих многообразий. В частности, уравнения Пфаффа, определяющие 2-диффеоморфизм, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\omega^i &= \Lambda^i_k\vartheta^k + \Lambda^i\vartheta^{2+1} + \Lambda^{i,j}\vartheta^{2+1}_j + \Lambda^{i,lm}\vartheta^{2+1}_{lm},\\
\omega^{2+1} &= S_k\vartheta^k + S\vartheta^{2+1} + S^i\vartheta^{2+1}_i + S^{lm}\vartheta^{2+1}_{lm},\\
\omega^{2+1}_j &= T_{j,k}\vartheta^k + T_j\vartheta^{2+1} + T^i_j\vartheta^{2+1}_i + T^{lm}_j\vartheta^{2+1}_{lm},\\
\omega^{2+1}_{jk} &= F_{jk,l}\vartheta^l + F_{jk}\vartheta^{2+1} + F^i_{jk}\vartheta^{2+1}_i + F^{lm}_{jk}\vartheta^{2+1}_{lm}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

При этом коэффициенты $\Lambda^{i,lm}$, S^{lm}, T^{lm}_j, F^{lm}_{jk} симметричны по l, m и, кроме того, коэффициенты $F_{jk,l}$, F_{jk}, F^i_{jk}, F^{lm}_{jk} симметричны по j, k.

Коэффициенты в правых частях уравнений (13) являются компонентами фундаментального объекта 2-диффеоморфизма. Структурной группой фундаментального объекта является группа Ли $G\times G$ (прямое произведение группы G с инвариантными структурными формами $(\overline{12})$ на группу G с инвариантными структурными формами $(\overline{12}')$). Поле фундаментального объекта задано на многообразии J^2H'.

Фундаментальный объект 2-диффеоморфизма содержит подобъект с компонентами

$$S_k,\ S^i,\ S^{lm},\ T_{j,k},\ T^{lm}_j. \tag{14}$$

Обращение этих компонент в нуль носит инвариантный характер. В этом случае

$$\omega^{2+1} = S\vartheta^{2+1}, \quad \omega^{2+1}_j = T_j\vartheta^{2+1} + T^i_j\vartheta^{2+1}_i. \tag{15}$$

При этом

$$\det\|\Lambda^i_j\| = \Lambda \neq 0, \quad S\neq 0, \quad \det\|T^i_j\|\neq 0.$$

Заметим, что 2-диффеоморфизмы, для которых коэффициенты (14) обращаются в нуль, — это контактные 2-диффеоморфизмы. В этом можно убедиться, выбрав в качестве базисных форм в J^2H формы

$$\omega^i = dx^i, \quad \omega^{2+1} = dz - p_i dx^i, \quad \omega^{2+1}_j = dp_j - p_{jk}dx^k, \quad \omega^{2+1}_{kl} = dp_{kl},$$

а в качестве базисных форм в J^2H' — формы

$$\vartheta^i = d\xi^i, \quad \vartheta^{2+1} = dy - q_i d\xi^i, \quad \vartheta_j^{2+1} = dq_j - q_{jk} d\xi^k, \quad \vartheta_{kl}^{2+1} = dq_{kl}.$$

Уравнения (15) принимают тогда вид

$$\begin{aligned} &dz - p_i dx^i = S(dy - q_i d\xi^i), \\ &dp_j - p_{jk} dx^i = T_j(dy - q_i d\xi^i) + T_j^i(dq_i - q_{ik} d\xi^i). \end{aligned}$$

Следовательно, при контактном 2-диффеоморфизме уравнение Пфаффа

$$dy - q_i d\xi^i = 0$$

переходит в уравнение

$$dz - p_i dx^i = 0$$

(и обратно) и, кроме того, система уравнений Пфаффа

$$dy - q_i d\xi^i = 0, \quad dq_i - q_{ij} d\xi^j = 0$$

переходит в систему

$$dz - p_i dx^i = 0, \quad dp_i - p_{ij} dx^j = 0$$

(и обратно). Контактные распределения (см. [1, гл. IV, § 3]) на J^1H' переходят в контактные распределения на J^1H, контактные распределения на J^2H' переходят в контактные распределения на J^2H (и обратно).

Из уравнений (15), которые имеют место в случае контактного 2-диффеоморфизма, следует (после внешнего дифференцирования и последующего разложения по лемме Картана), в частности, что

$$\Lambda^{i,kl} = 0.$$

Кроме того,

$$T_1^1 = \frac{S}{\Lambda}\Lambda_2^2, \quad T_1^2 = -\frac{S}{\Lambda}\Lambda_1^2, \quad T_2^1 = -\frac{S}{\Lambda}\Lambda_2^1, \quad T_2^2 = \frac{S}{\Lambda}\Lambda_1^1, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &F_{11}^{11} = \frac{S}{(\Lambda)^2}(\Lambda_2^2)^2, \quad && F_{11}^{12} = -\frac{S}{(\Lambda)^2}\Lambda_2^2\Lambda_1^2, \quad && F_{11}^{22} = \frac{S}{(\Lambda)^2}(\Lambda_1^2)^2, \\ &F_{12}^{11} = -\frac{S}{(\Lambda)^2}\Lambda_2^2\Lambda_2^1, \quad && F_{12}^{12} = \frac{S}{2(\Lambda)^2}\Lambda_1^1\Lambda_2^2 + \Lambda_2^1\Lambda_1^2), \quad && F_{12}^{22} = -\frac{S}{(\Lambda)^2}\Lambda_1^1\Lambda_1^2, \\ &F_{22}^{11} = \frac{S}{(\Lambda)^2}(\Lambda_2^1)^2, \quad && F_{22}^{12} = -\frac{S}{(\Lambda)^2}\Lambda_1^1\Lambda_2^1, \quad && F_{22}^{22} = \frac{S}{(\Lambda)^2}(\Lambda_1^1)^2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Теорема 2. *Уравнения Пфаффа, определяющие контактный диффеоморфизм второго порядка, имеют вид*

$$\left.\begin{aligned} &\omega^i = \Lambda_k^i\vartheta^k + \Lambda^i\vartheta^{2+1} + \Lambda^{i,j}\vartheta_j^{2+1}, \\ &\omega^{2+1} = S\vartheta^{2+1}, \\ &\omega_j^{2+1} = T_j\vartheta^{2+1} + T_j^i\vartheta_i^{2+1}, \\ &\omega_{jk}^{2+1} = F_{jk,l}\vartheta^l + F_{jk}\vartheta^{2+1} + F_{jk}^i\vartheta_i^{2+1} + F_{jk}^{lm}\vartheta_{lm}^{2+1}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

При этом коэффициенты Λ^i_k *удовлетворяют условию* $\det\|\Lambda^i_k\| \neq 0$ *и связаны с* $\Lambda^{i,j}$ *и* $F_{jk,l}$ *соотношениями*

$$\Lambda^{[1}_m\Lambda^{2],m} = 0, \quad F_{jm,[1}\Lambda^m_{2]} = 0.$$

Коэффициент $S \neq 0$, *коэффициенты* T^i_j *и* F^{lm}_{jk} *имеют соответственно вид* (16) *и* (17).

Заметим, что $\det\|\Lambda^{i,j}\|$ является относительным инвариантом. Следовательно, его обращение в нуль имеет инвариантный характер. Существуют как контактные 2-диффеоморфизмы, для которых $\det\|\Lambda^{i,j}\| \neq 0$ (условимся называть их *квазилежандровыми 2-диффеоморфизмами*), так и контактные 2-диффеоморфизмы, для которых $\det\|\Lambda^{i,j}\| = 0$ (условимся называть их *квазиэйлеровыми 2-диффеоморфизмами*). Каждый контактный 2-диффеоморфизм является в фиксированной точке многообразия J^2H' либо квазилежандровым, либо квазиэйлеровым 2-диффеоморфизмом. В частности, известное преобразование Лежандра второго порядка (см. пример 2.1) является квазилежандровым 2-диффеоморфизмом, а известное преобразование Эйлера второго порядка (см. пример 2.2) является квазиэйлеровым 2-диффеоморфизмом.

Замечание 2.1. Можно доказать, что в случае когда контактный 2-диффеоморфизм задан явными уравнениями, эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &x^i = f^i(\xi^1,\xi^2,y,q_1,q_2),\\ &z = f^{2+1}(\xi^1,\xi^2,y,q_1,q_2),\\ &p_j = f^{2+1}_j(\xi^1,\xi^2,y,q_1,q_2),\\ &p_{kl} = f^{2+1}_{kl}(\xi^1,\xi^2,y,q_1,q_2,q_{11},q_{12},q_{22}).\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

При этом функции f^1, f^2 удовлетворяют условиям

$$\det\left\|\frac{\partial f^i}{\partial\xi^j} + q_j\frac{\partial f^i}{\partial y} + q_{jm}\frac{\partial f^i}{\partial q_m}\right\| \neq 0, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1,2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial\xi^i} + q_i\frac{\partial f^1}{\partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial\xi^i} + q_i\frac{\partial f^2}{\partial y}\\ \frac{\partial f^1}{\partial q_i} & \frac{\partial f^2}{\partial q_i}\end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Если уравнения (19) определяют квазилежандров 2-диффеоморфизм, то

$$\det\left\|\frac{\partial f^i}{\partial q_j}\right\| \neq 0. \tag{22}$$

Если же уравнения (19) определяют квазиэйлеров 2-диффеоморфизм, то

$$\det\left\|\frac{\partial f^i}{\partial q_j}\right\| = 0. \tag{23}$$

2.2. Задание квазилежандрова 2-диффеоморфизма явными уравнениями

Рассмотрим более подробно ситуацию, когда система (19) определяет квазилежандров 2-диффеоморфизм. Функции f^1, f^2 удовлетворяют в этом случае условиям (20)—(22). Кроме того, можно доказать, что

1) функция f^{2+1} удовлетворяет условию
$$\frac{\partial f^{2+1}}{\partial \xi^j} + q_j \frac{\partial f^{2+1}}{\partial y} + \frac{1}{L}\left(\frac{\partial f^{[1}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial f^{2]}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f^{2+1}}{\partial q_2} - \frac{\partial f^{[1}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial f^{2]}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial f^{2+1}}{\partial q_1}\right) = 0;$$

2) функции f_1^{2+1} и f_2^{2+1} имеют вид
$$f_1^{2+1} = -\frac{1}{L}\frac{\partial f^2}{\partial q_{[1}} \cdot \frac{\partial f^{2+1}}{\partial q_{2]}}, \quad f_2^{2+1} = \frac{1}{L}\frac{\partial f^1}{\partial q_{[1}} \cdot \frac{\partial f^{2+1}}{\partial q_{2]}} \tag{24}$$
и удовлетворяют условию
$$\sum_{i=1,2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f_i^{2+1}}{\partial \xi^1} + q_1\frac{\partial f_i^{2+1}}{\partial y} + q_{1m}\frac{\partial f_i^{2+1}}{\partial q_m} & \frac{\partial f^i}{\partial \xi^1} + q_1\frac{\partial f^i}{\partial y} + q_{1m}\frac{\partial f^i}{\partial q_m} \\ \frac{\partial f_i^{2+1}}{\partial \xi^2} + q_2\frac{\partial f_i^{2+1}}{\partial y} + q_{2m}\frac{\partial f_i^{2+1}}{\partial q_m} & \frac{\partial f^i}{\partial \xi^2} + q_2\frac{\partial f^i}{\partial y} + q_{2m}\frac{\partial f^i}{\partial q_m} \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$
которое в силу (24) является дополнительным условием при выборе f^{2+1};

3) система функций $p_{11} = f_{11}^{2+1}$, $p_{12} = f_{12}^{2+1}$, $p_{22} = f_{22}^{2+1}$ — решение системы линейных уравнений
$$\left(\frac{\partial f^m}{\partial \xi^k} + q_k\frac{\partial f^m}{\partial y} + q_{kt}\frac{\partial f^m}{\partial q_t}\right)p_{jm} = \frac{\partial f_j^{2+1}}{\partial \xi^k} + q_k\frac{\partial f_j^{2+1}}{\partial y} + q_{kt}\frac{\partial f_j^{2+1}}{\partial q_t}, \tag{26}$$
которая (в силу (20) и (25)) является совместной и имеет единственное решение.

Пример 2.1. К классу квазилежандровых 2-диффеоморфизмов относится известное преобразование Лежандра [6], для которого система уравнений (19) имеет вид
$$\left.\begin{aligned} &x^i = q_i,\\ &z = -y + q_i\xi^i,\\ &p_i = \xi^i,\\ &p_{11} = \frac{q_{22}}{J}, \quad p_{12} = -\frac{q_{12}}{J}, \quad p_{22} = \frac{q_{11}}{J}, \end{aligned}\right\}$$
где $J = q_{11}q_{22} - (q_{12})^2$.

Заметим, в частности, что в результате преобразования Лежандра уравнение стационарного трансзвукового потока
$$ap_1 \cdot p_{11} + p_{22} = 0$$
(т. е. $az_1 \cdot z_{11} + z_{22} = 0$), где $a \neq 0$, переходит в уравнение
$$a\xi^1 q_{22} + q_{11} = 0$$
(т. е. $a\xi^1 y_{22} + y_{11} = 0$).

2.3. Задание квазиэйлерова 2-диффеоморфизма явными уравнениями

Рассмотрим теперь ситуацию, когда система (19) определяет квазиэйлеров контактный 2-диффеоморфизм и, следовательно, функции f^1, f^2 удовлетворяют условиям (20), (21) и (23).

Оставив в стороне случай, когда функции f^1, f^2 не зависят от q_1, q_2, мы можем без ограничения общности предполагать, что первая строка определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial q_1} & \frac{\partial f^2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f^1}{\partial q_2} & \frac{\partial f^2}{\partial q_2} \end{vmatrix}$$

ненулевая и, следовательно, элементы второй строки отличаются от соответствующих элементов первой строки лишь множителем:

$$\frac{\partial f^1}{\partial q_2} = \alpha \frac{\partial f^1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f^2}{\partial q_2} = \alpha \frac{\partial f^2}{\partial q_1}.$$

Можно доказать, что в рассматриваемом случае

1) справедливо соотношение
$$\frac{\partial f^i}{\partial \xi^1} + q_1 \frac{\partial f^i}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial f^i}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial f^i}{\partial y} \right) = \beta \frac{\partial f^i}{\partial q_1} \quad (i = 1, 2),$$
где β — некоторый множитель;

2) справедливо неравенство
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial f^1}{\partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial f^2}{\partial y} \\ \frac{\partial f^1}{\partial q_1} & \frac{\partial f^2}{\partial q_1} \end{vmatrix} \neq 0;$$

3) функция f^{2+1} удовлетворяет соотношениям
$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial f^{2+1}}{\partial q_2} = \alpha \frac{\partial f^{2+1}}{\partial q_1}, \\ &\frac{\partial f^{2+1}}{\partial \xi^1} + q_1 \frac{\partial f^{2+1}}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial f^{2+1}}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial f^{2+1}}{\partial y} \right) = \beta \frac{\partial f^{2+1}}{\partial q_1} \end{aligned} \right\};$$

4) функции f_1^{2+1} и f_2^{2+1} имеют вид
$$\left. \begin{aligned} f_1^{2+1} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial f^{[2}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f^{2+1]}}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial f^{[2}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f^{2+1]}}{\partial y} \right), \\ f_2^{2+1} &= -\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial f^{[1}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f^{2+1]}}{\partial \xi^2} + q_2 \frac{\partial f^{[1}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f^{2+1]}}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \tag{27}$$
и, кроме того, удовлетворяют условию (25), которое в силу (27) является дополнительным условием при выборе f^{2+1};

5) система функций $p_{11} = f_{11}^{2+1}$, $p_{12} = f_{12}^{2+1}$, $p_{22} = f_{22}^{2+1}$ — решение системы линейных уравнений (26), которая (в силу (20) и (25)) является совместной и имеет единственное решение.

Пример 2.2. К классу квазиэйлеровых 2-диффеоморфизмов относится известное преобразование Эйлера [6], для которого система уравнений (19) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &x^1 = q_1, \quad x^2 = \xi^2, \\ &z = -y + q_1\xi^1, \\ &p_1 = \xi^1, \quad p_2 = -q_2, \\ &p_{11} = \frac{1}{q_{11}}, \quad p_{12} = -\frac{q_{12}}{q_{11}}, \quad p_{22} = -q_{22} + \frac{(q_{12})^2}{q_{11}}. \end{aligned}\right\}$$

Заметим, в частности, что в результате преобразования Эйлера квазилинейное уравнение

$$p_1 \cdot p_{11} + a = 0$$

(т. е. $z_1 \cdot z_{11} + a = 0$), где $a \neq 0$, переходит в линейное уравнение

$$q_2 = aq_{11}$$

(т. е. $y_2 = ay_{11}$).

Литература

[1] Васильев А. М. Теория дифференциально-геометрических структур. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

[2] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—246.

[3] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.

[4] Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1966. — Т. 1. — С. 139—189.

[5] Лаптев Г. Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1974. — Т. 6. — С. 37—42.

[6] Полянин Л. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2003.

[7] Рыбников А. К. О специальных связностях, определяющих представление нулевой кривизны для эволюционных уравнений второго порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1999. — № 9. — С. 32—41.

[8] Рыбников А. К. Теория связностей и преобразования Бэклунда для общих дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка // Докл. РАН. — 2005. — Т. 405, № 1. — С. 26—29.

[9] Рыбников А. К. Теория связностей и проблема существования преобразований Бэклунда для эволюционных уравнений второго порядка // Докл. РАН. — 2005. — Т. 400, № 3. — С. 319—322.

[10] Рыбников А. К. Теория связностей, преобразования Коула—Хопфа и потенциалы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2007. — № 9. — С. 50—70.

[11] Рыбников А. К. Дифференциально-геометрические структуры, определяющие преобразования Ли—Бэклунда // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 1. — С. 25—30.

[12] Рыбников А. К., Семёнов К. В. Связности Бэклунда и отображения Бэклунда, соответствующие эволюционным уравнениям второго порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 5. — С. 52—68.

[13] Forsyth A. K. Theory of Differential Equations. Pt. 4. Vol. 6. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1906.

[14] Pirani F. A. E., Robinson D. C. Sur la définition des transformations de Bäcklund // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. — 1977. — Vol. 285. — P. 581—583.