Хаусдорфова метрика на гранях n-мерного куба

Г. Г. РЯБОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: gen-ryabov@yandex.ru

УДК 512.531+515.124+004.2

Ключевые слова: n-мерный куб, k-мерные грани, четверичное представление, хаусдорфова метрика, супервычисления.

Аннотация

Для n-мерного единичного куба (I^n) рассматривается хаусдорфова метрика (H-метрика) на всех его гранях. Используется понятие кубанта — n-разрядного четверичного кода k-мерной грани, содержащего декартово произведение k реперных единичных отрезков и код трансляции грани внутри I^n. Кубанты образуют полугруппу с единицей относительно операции умножения. Рассматривается вычисление H-метрики, являющейся обобщением метрики Хэмминга для двоичных кодов. Обсуждаются вопросы, связанные с супервычислениями.

Abstract

G. G. Ryabov, Hausdorff metric on faces of the n-cube, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 151—155.

The Hausdorff metric on all faces of the unit n-cube (I^n) is considered. The notion of a cubant is used; it was introduced as an n-digit quaternary code of a k-dimensional face containing the Cartesian product of k frame unit segments and the face translation code within I^n. The cubants form a semigroup with a unit (monoid) with respect to the given operation of multiplication. A calculation of Hausdorff metric based on the generalization of the Hamming metric for binary codes is considered. The supercomputing issues are discussed.

Исходные положения

Продолжая исследования гиперметрических пространств [1], на основании установленной биекции [2] между всеми n-разрядными троичными кодами и всеми k-размерными гранями (k-гранями) n-мерного единичного куба в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с заданным ортонормированным репером $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ мы вводим понятие кубанта (кубического кванта) [3] следующим образом.

Пусть $D = d_1, d_2, \ldots, d_n$ — n-разрядное троичное слово, где d_i — буква алфавита $\{0, 1, 2\}$. Между реперными векторами и разрядами троичного числа установлена биекция:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \xleftrightarrow{[1,1]} d_1, d_2, \ldots, d_n.$$

Пусть в слове $D = d_1, d_2, \ldots, d_n$ разряды $d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ik}$ принимают значения 2, а остальные разряды принимают значения 0 и 1. Разрядам, принимающим значение 2, ставится в соответствие декартово произведение единичных отрезков, коллинеарных реперным векторам $\mathbf{e}_{i1}, \mathbf{e}_{i2}, \ldots, \mathbf{e}_{ik}$, т. е. k-грань в n-кубе. Разряды со значениями 0 и 1 соответствуют отсутствию или наличию параллельного переноса (трансляции) вдоль реперного вектора, номер которого совпадает с номером данного разряда. Поэтому формально для k-грани F можно записать

$$F(k,p) = \prod_{i:\ d_i=2} \mathbf{e}_i + \mathop{\mathbf{T}}_{j:\ d_j=0,1} \mathbf{e}_j,$$

где k — размерность грани, p — вершина трансляции.

Для кубантов определена бинарная поразрядная операция «умножения» по следующим правилам:

$$0 \times 0 = 0, \quad 0 \times 1 = 1 \times 0 = \emptyset,$$
$$1 \times 1 = 1, \quad 0 \times 2 = 2 \times 0 = 0, \quad 1 \times 2 = 2 \times 1 = 1.$$

Эта операция коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по определению. В префиксной нотации произведение двух кубантов будет обозначаться как $\Pi(D_1, D_2)$. Так для $D_1 = 022121$ и $D_2 = 121120$ $\Pi(D_1, D_2) = \emptyset 2111 \emptyset$, а для $D_3 = 212202$ и $D_4 = 122001$ $\Pi(D_3, D_4) = 112001$. В первом случае пересечение кубантов пусто и наличие двух символов $\emptyset$ в произведении соответствует длине кратчайшего пути (по ребрам n-куба, где длина ребра равна 1) между этими кубантами. В дальнейшем число разрядов в слове с символом $\emptyset$ будем обозначать через ω, так что $\omega(\emptyset 2111 \emptyset) = 2$.

В случае когда произведение не содержит символов $\emptyset$, это произведение есть кубант-пересечение кубантов-сомножителей. Введением символа $\emptyset$ в исходный алфавит образуется алфавит $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$, и в дальнейшем будут рассматриваться все n-разрядные четверичные слова (всего их 4^n), из которых 3^n слов без символов $\emptyset$ являются кубантами, соответствующими граням n-куба, а остальные (содержащие по крайней мере один символ $\emptyset$) — псевдокубантами. Тогда множество всех n-разрядных четверичных кодов образует алгебраическую структуру (полугруппу) по отношению к введённой поразрядной операции умножения, которая доопределяется следующими правилами для разрядов с символом $\emptyset$:

$$\emptyset \times \emptyset = \emptyset \times 0 = 0 \times \emptyset = \emptyset \times 1 = 1 \times \emptyset = \emptyset \times 2 = 2 \times \emptyset = \emptyset.$$

Единицей в этой полугруппе является кубант $22\ldots2$, т. е. весь n-куб. Таким образом, можно говорить о полугруппе с единицей (моноиде). Обозначив через $\mathrm{M}(n)$ моноид, через $\mathrm{Mc}(n)$ — множество кубантов, через $\mathrm{Mp}(n)$ — множество псевдокубантов, имеем

$$\mathrm{M}(n) = \mathrm{Mc}(n) \cup \mathrm{Mp}(n), \quad \mathrm{Mc}(n) \cap \mathrm{Mp}(n) = \emptyset,$$
$$|\mathrm{M}(n)| = 4^n, \quad |\mathrm{Mc}(n)| = 3^n.$$

Хаусдорфова метрика на кубантах

На $\mathrm{Mc}(n)$ естественно определить хаусдорфову метрику (H-метрику), которая является обобщением метрики Хэмминга для двоичных кодов, поскольку вершины n-куба являются кубантами — n-разрядными словами с разрядами только 0 и 1. В случае если $D_1 = 010101$ и $D_2 = 111000$, $\Pi(D_1, D_2) = \emptyset 1 \emptyset\emptyset 0 \emptyset$ и $L_{\min}(D_1, D_2) = 3$, т. е. хэммингово расстояние между этими кодами совпадает с длиной кратчайшего пути по рёбрам, если рассматривать вершины как кубанты. Для вычисления H-расстояния между любыми двумя кубантами D_1, D_2 в I^n ($D_1, D_2 \in \mathrm{Mc}(n)$) вводится (некоммутативная) поразрядная операция H-сжатия одного кубанта относительно другого. Будем обозначать результат H-сжатия D_1 относительно D_2 как D_1^*/D_2 и аналогично D_2^*/D_1. Для случая D_1^* левые разряды (из операндов) относятся к D_1, а правые к D_2. Тогда операция задаётся следующими правилами:

$$D_1^*/D_2\colon\ 0/0 = 0/1 = 0/2 = 0,$$
$$1/0 = 1/1 = 1/2 = 1, \quad 2/0 = 1,\ 2/1 = 0,\ 2/2 = 2.$$

Аналогично для D_2^*: левые разряды из D_2, правые из D_1, правила те же. H-расстояние вычисляется в соответствии с определением хаусдорфовой метрики как

$$p_H(D_1, D_2) = \max\{L_{\min}(D_1^*/D_2, D_2); L_{\min}(D_2^*/D_1, D_1)\}.$$

Учитывая, что $L_{\min}(D_1, D_2) = \omega\big(\Pi(D_1, D_2)\big)$, можно записать

$$p_H(D_1, D_2) = \max\big\{\omega\big(\Pi(D_1^*/D_2, D_2)\big); \omega\big(\Pi(D_2^*/D_1, D_1)\big)\big\}. \tag{1}$$

Естественно, эта метрика для кубантов (как точек метрического пространства с H-метрикой) принимает значения для I^n из множества $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Поскольку, как было показано выше, эта метрика является обобщением метрики Хэмминга, более корректно применять обозначение $p_{HH}(D_1, D_2)$.

Легко проверить, что все четыре аксиомы метрического пространства выполняются. Подчеркнём, что метрика введена только для кубантов, но не для псевдокубантов.

H-метрика может быть определена и на подмножествах кубантов, для чего потребуется рассмотреть множество всех подмножеств кубантов из $\mathrm{Mc}(n)$ (так называемый булеан), мощность которого 2^A, где $A = 3^n$. Детальное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной статьи, однако отметим, что H-расстояния между подмножествами кубантов будут принимать не только целочисленные, но и вещественные значения. Достаточно привести два простых примера для $n = 3$.

1. Для $A_1 = \{(020), (120)\}$ и $A_2 = \{(200), (210)\}$ $p_{EH}(A_1, A_2) = 1/2$.
2. Для $A_3 = \{(000), (001), (010), (011)\}$ и $A_4\{(022)\}$ $p_{EH}(A_3, A_4) = \sqrt{2}/2$.

Такую метрику корректно называть евклидовой-хаусдорфовой и обозначать $p_{EH}(A_i, A_j)$.

В дальнейшем нас будет интересовать H-метрика на кубантах, когда исследуемым объектом является матрица значений $p_{HH}(D_i, D_j)$ для всех пар кубантов в I^n, т. е. квадратная $(3^n \times 3^n)$-матрица, в которой порядок следования столбцов и строк задаётся следующим образом. Все кубанты упорядочены так, что вначале идут кубанты, слова которых содержат в разрядах только 0 и 1 (все вершины n-куба), расположенные в лексикографическом порядке, затем кубанты (слова) с одной двойкой среди разрядов (ребра n-куба), также в лексикографическом порядке, и т. д. вплоть до n-куба — слова, у которого все n разрядов равны 2. Эта матрица симметрическая, элементы под главной диагональю будут опущены.

Подмножествам кубантов размерностей k и m поставим в соответствие минор $H(k, m)$. Относительный объём такого минора равен km/s, где $s = (3^{2n} - 3^n)/2 + 3^n$. Каждому минору соответствует диапазон значений расстояний в H-метрике. Учитывая (1), легко заключить, что в миноре $H(k, m)$ при $m \geqslant k$ такой диапазон равен $[m - k, n - k]$. Приведём общий вид такой матрицы для размерности n, разбитой на миноры, и укажем диапазон значений H-расстояний в каждом миноре.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \text{0-грани} & \text{1-грани} & \cdots & (n-2)\text{-грани} & (n-1)\text{-грани} & n\text{-куб} \\
\hline
\text{0-грани} & \begin{bmatrix} H(0,0) \\ r=[0;n] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(0,1) \\ r=[1;n] \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} H(0,n-2) \\ r=[n-2;n] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(0,n-1) \\ r=[n-1;n] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(0,n) \\ r=n \end{bmatrix} \\
\text{1-грани} & & \begin{bmatrix} H(1,1) \\ r=[0;n-1] \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} H(1,n-2) \\ r=[n-3;n-1] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(1,n-1) \\ r=[n-2;n-1] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(1,n) \\ r=n-1 \end{bmatrix} \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots & \\
(n-2)\text{-грани} & & & & \begin{bmatrix} H(n-2,n-2) \\ r=[0;2] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(n-2,n-1) \\ r=[1;2] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(n-2,n) \\ r=2 \end{bmatrix} \\
(n-1)\text{-грани} & & \text{Симметрия} & & & \begin{bmatrix} H(n-1,n-1) \\ r=[0;1] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H(n-1,n) \\ r=1 \end{bmatrix} \\
n\text{-куб} & & & & & & \begin{bmatrix} H(n,n) \\ r=0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Полная обозримость такой структуры и возможность прямого вычисления любого элемента этой матрицы при максимальном распараллеливании вычислений могут поставить лишь один вопрос в прикладном плане. Какова размерность пространства n, для которой современные суперкомпьютеры могут рассчитать, а затем и хранить для использования в многомерных моделях полную матрицу хаусдорфовой метрики для кубантов. Для петафлопсного уровня производительности грубая оценка для n может быть получена из соотношения $3^n \sim 10^{15-17}$. Отсюда $n = 14$ или $n = 15$ (время счёта — десятки-сотни секунд), и для хранения одного значения r_{HH} достаточно четырёх битов (полбайта). Оценка ёмкости памяти для табличного хранения такой матрицы — 10^{15} байт. Ниже приведена таблица всех парных H-расстояний между кубантами для размерностей n от 1 до 8.

$n \backslash r_{HH}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	3							
2	9	22	14						
3	27	117	174	60					
4	81	540	1380	1072	248				
5	243	2295	8820	11480	5800	1008			
6	729	9234	49410	94960	78600	29088	4064		
7	2187	35721	252882	667380	802200	476784	139104	16320	
8	6561	134136	1211112	4183200	6818000	5794432	2669184	644608	65408

Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного грантом РФФИ 09-07-12135-офи-м.

Литература

[1] Деза М., Штогрин М. И. Мозаики и их изометрические вложения // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 3—22.

[2] Рябов Г. Г. О путевом кодировании k-граней в n-мерном кубе // Вычислительные методы и программирование. — 2008. — Т. 9, № 1. — С. 20—22.

[3] Рябов Г. Г. О четверичном кодировании кубических структур // Вычислительные методы и программирование. — 2009. — Т. 10, № 2. — С. 154—161.