Дифференциально-геометрические структуры на обобщённых три-тканях Рейдемейстера и Бола

Г. А. ТОЛСТИХИНА
Тверской государственный университет
e-mail: science@tversu.ru

УДК 514.763.7

Ключевые слова: многомерная три-ткань, структурные уравнения, обобщённые конфигурации Рейдемейстера.

Аннотация

Приводятся основные результаты исследования многомерных три-тканей $W(p,q,r)$, полученные с помощью метода внешних форм и подвижного репера Картана, развитого в работах российских математиков С. П. Финикова, Г. Ф. Лаптева и А. М. Васильева. Основы дифференциально-геометрической теории (p,q,r)-тканей заложены М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом. Исследование (p,q,r)-тканей, включая алгебраический и геометрический аспекты теории, было продолжено в наших работах, в частности, были найдены структурные уравнения три-ткани $W(p,q,r)$ при $p=\lambda l$, $q=\lambda m$, $r=\lambda(l+m-1)$. Для таких тканей было определено понятие обобщённой конфигурации Рейдемейстера и доказано, что три-ткань $W\big(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1)\big)$, на которой замыкаются все достаточно малые обобщённые конфигурации Рейдемейстера, порождается некоторой λ-мерной группой Ли G. Было показано, что структурные уравнения такой ткани связаны с уравнениями Маурера—Картана группы G. Обобщённые конфигурации Рейдемейстера и Бола были определены нами для три-тканей $W(p,q,q)$. Доказано, что ткань $W(p,q,q)$, на которой замыкаются обобщённые конфигурации Рейдемейстера или Бола, порождается действием локальной гладкой q-параметрической группы Ли или соответственно квазигруппы Бола на гладком p-мерном многообразии. Для таких тканей найдены структурные уравнения и исследованы дифференциально-геометрические свойства.

Abstract

G. A. Tolstikhina, Differential-geometric structures on generalized Reidemeister and Bol three-webs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 157—169.

In this paper, we present the main results of the study of multidimensional three-webs $W(p,q,r)$ obtained by the method of external forms and moving Cartan frame. The method was developed by the Russian mathematicians S. P. Finikov, G. F. Laptev, and A. M. Vasiliev, while fundamentals of differential-geometric (p,q,r)-webs theory were described by M. A. Akivis and V. V. Goldberg. Investigation of (p,q,r)-webs including algebraic and geometric theory aspects has been continued in our papers, in particular, we found the structure equations of a three-web $W(p,q,r)$, where $p=\lambda l$, $q=\lambda m$, and $r=\lambda(l+m-1)$. For such webs, we define the notion of a generalized Reidemeister configuration and proved that a three-web $W\big(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1)\big)$, on which all sufficiently small generalized Reidemeister configurations are closed, are generated by a λ-dimensional Lie group G. The structure equations of the web are connected with the

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 157—169.

Maurer–Cartan equations of the group G. We define generalized Reidemeister and Bol configurations for three-webs $W(p,q,q)$. It is proved that a web $W(p,q,q)$ on which generalized Reidemeister or Bol configurations are closed is generated, respectively, by acting of a local smooth q-parametric Lie group or a Bol quasigroup on a smooth p-dimensional manifold. For such webs, the structure equations are found and their differential-geometric properties are studies.

1.

Определение 1.1. Три-тканью $W(p,q,r)$ на гладком многообразии $\mathcal{M}$ размерности $p+q$ называется совокупность трёх гладких слоений λ_1, λ_2, λ_3, слои которых имеют соответственно размерности p, q, r и любые два из них находятся в общем положении.

При $p \leqslant q \leqslant r$ наклонный слой $\mathcal{F}_3 \subset \lambda_3$, проходящий через точку p, пересекает вертикальный слой $\mathcal{F}_1 \subset \lambda_1$ и горизонтальный слой $\mathcal{F}_2 \subset \lambda_2$, проходящие через p, по подмногообразиям V и U соответственно (рис. 1), причём $\dim V = r-q$, $\dim U = r-p$.

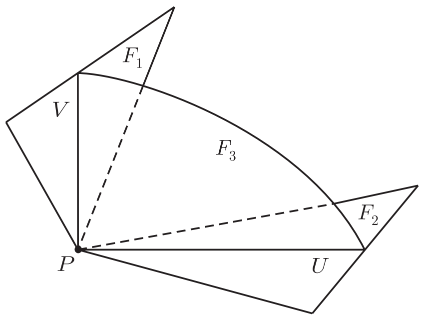

Рис. 1

В случае $p = q = r$ получаем три-ткань $W(r,r,r)$, образованную тремя слоениями одинаковой размерности r [1].

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — дифференцируемое многообразие размерности $p+q$, на котором задана три-ткань $W(p,q,r)$, и пусть A — произвольная точка на $\mathcal{M}$. Тогда в некоторой окрестности U_A точки A существуют такие локальные координаты $x=(x^1,\dots,x^q)$, $y=(y^1,\dots,y^p)$, что слоения ткани могут быть заданы уравнениями*

$$\lambda_1\colon\ x=\mathrm{const},\quad \lambda_2\colon\ y=\mathrm{const},\quad \lambda_3\colon\ z=f(x,y)=\mathrm{const}, \tag{1.1}$$

где $z=(z^1,\dots,z^\lambda)$, $f=(f^1,\dots,f^\lambda)$, $\lambda=p+q-r$, f — гладкая функция и ранги матриц Якоби $(\partial f/\partial x)$ и $(\partial f/\partial y)$ максимальны в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$.

Определение 1.2. Уравнение

$$z = f(x, y), \tag{1.2}$$

связывающее параметры x, y и z слоёв первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(p, q, r)$, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, называется уравнением три-ткани $W(p, q, r)$.

Определение 1.3. Бинарная операция

$$(\cdot)\colon X \times Y \to Z, \quad z = f(x, y) \equiv x \cdot y,$$

называется локальным координатным группоидом три-ткани.

При $p = q = r$ операция $(\cdot)$ является квазигруппой. Она называется локальной координатной квазигруппой три-ткани $W(r, r, r)$ [19].

Переменные x, y и z, входящие в уравнение (1.2), допускают изотопические преобразования вида

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z),$$

где α, β, γ — локальные диффеоморфизмы.

2.

Определение 2.1. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_l)$ — фиксированный упорядоченный набор из l достаточно близких различных вертикальных слоёв три-ткани $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$ — фиксированный упорядоченный набор из m достаточно близких различных горизонтальных слоёв этой ткани. Совокупность (a, b) этих наборов назовём *координатной решёткой* три-ткани $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$.

Пусть (a, b) — координатная решётка ткани $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big) \equiv W$, M — произвольная точка многообразия $\mathcal{M}$, x, y и z — вертикальный, горизонтальный и наклонный слои ткани W, проходящие через точку M (рис. 2), так что $z = f(x, y)$. Тогда на $\mathcal{M}$ возникают два отображения:

$$R_b\colon x \to (u_1, \ldots, u_m), \quad L_a\colon y \to (v_1, \ldots, v_l),$$

где $u_1, \ldots, u_m$ — наклонные слои, проходящие через точки $B_1, \ldots, B_m$ пересечения слоёв $b_1, \ldots, b_m$ со слоем x; $v_1, \ldots, v_l$ — наклонные слои, проходящие через точки $A_1, \ldots, A_l$ пересечения слоёв $a_1, \ldots, a_l$ со слоем y, так что

$$\begin{cases} u_1 = f(x, b_1), \\ \quad \ldots \\ u_m = f(x, b_m), \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = f(a_1, y), \\ \quad \ldots \\ v_l = f(a_l, y). \end{cases}$$

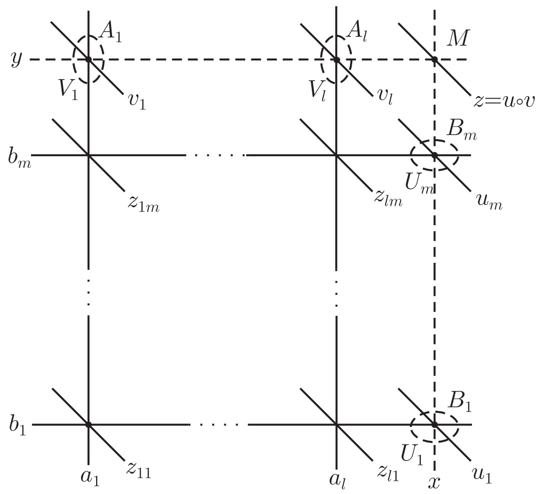

Рис. 2

Пусть в некоторой области $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{X} \times \tilde{Y}$ отображения R_b и L_a локально биективны. Тогда в этой области определены обратные функции R_b^{-1} и L_a^{-1}:

$$x = R_b^{-1}(u), \quad u = (u_1, \ldots, u_m), \quad y = L_a^{-1}(v), \quad v = (v_1, \ldots, v_l),$$

при этом $R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v) = z$.

Определение 2.2. Отображение

$$(\circ)\colon \underbrace{(\lambda_3 \times \ldots \times \lambda_3)}_{m} \times \underbrace{(\lambda_3 \times \ldots \times \lambda_3)}_{l} \to \lambda_3, \quad z = u \circ v = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v),$$

в области $\tilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ называется координатным моноидом три-ткани $W \equiv \equiv W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ и обозначается $\mu_{(a,b)}(\circ)$.

Теорема 1 [19]. *Координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ главноизотопен её координатному группоиду.*

Замечание. При $l = m = 1$ три-ткань $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ будет тканью $W(\lambda, \lambda, \lambda)$, а её координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ — координатной лупой $\ell_{(a,b)}(\circ)$ этой ткани (см. [1]).

В [11] показано, что с три-тканью $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ может быть связана некоторая $(n+1)$-ткань коразмерности λ. Согласно [3] $(n+1)$-тканью называется ткань, образованная $n+1$ гладкими слоениями общего положения одинаковой коразмерности λ на многообразии размерности $n\lambda$.

Пусть (a, b) — некоторая фиксированная координатная решётка ткани $W \equiv \equiv W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$. На слоях b_μ $(\mu = \overline{1, m})$ и a_s $(s = \overline{1, l})$ наклонными слоями ткани W высекаются подмногообразия U_μ и V_s соответственно. Пусть $\bar{U}_\mu$ — подмногообразие вертикальных слоёв ткани W, пересекающих U_μ; $\bar{V}_s$ —

подмногообразие горизонтальных слоёв, пересекающих V_s; при этом $\operatorname{codim} \bar{U}_\mu = \operatorname{codim} \bar{V}_s = \operatorname{codim} \mathcal{F}_3 = \lambda$. Обозначим через $\bar{\mathbf{u}}_\mu$ и $\bar{\mathbf{v}}_s$ слоения подмногообразий $\bar{U}_\mu$ и $\bar{V}_s$. Слоения $\bar{\mathbf{u}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{v}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{v}}_l$ и третье слоение λ_3 ткани W образуют в области $\tilde{\mathcal{M}}$ $(n+1)$-ткань, где $n = l + m$. Эта $(n+1)$-ткань названа в [11] *ассоциированной* с три-тканью W и обозначена $\tilde{W}^\lambda(a,b)$.

Предложение 2.1 [11]. *Каждая координатная решётка три-ткани* $W \equiv W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ *однозначно определяет ассоциированную* $(n+1)$*-ткань* $(n = l+m)$ *коразмерности* λ*, которая задаётся в адаптированных локальных координатах тем же уравнением*

$$z = \tilde{f}(u_1, \ldots, u_m; v_1, \ldots, v_l), \tag{2.1}$$

что и координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ *три-ткани* W.

В адаптированных локальных координатах слоения $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$ определяются уравнениями

$$\bar{\mathbf{u}}_\mu\colon\ u_\mu = \bar{C}_\mu, \quad \bar{\mathbf{v}}_s\colon\ v_s = \tilde{C}_s, \quad \lambda_3\colon\ z = C, \tag{2.2}$$

где $\bar{C}_\mu$, $\tilde{C}_s$, C — постоянные векторы. При этом уравнение (1.2) три-ткани W преобразуется к виду (2.1), а уравнения (1.1) её слоений приводятся к виду

$$\lambda_1\colon\ u_\mu = \bar{C}_\mu, \quad \lambda_2\colon\ v_s = \tilde{C}_s, \quad \lambda_3\colon\ z = C. \tag{2.3}$$

Замечание. Слои всех слоений ассоциированной $(n+1)$-ткани попарно трансверсальны в области, где выполняются условия

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}\right| \neq 0, \ldots, \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_m}\right| \neq 0, \ \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_1}\right| \neq 0, \ldots, \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v_l}\right| \neq 0. \tag{2.4}$$

В этой же области уравнение (2.1) задаёт координатную n-квазигруппу $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$ [3].

Продифференцируем уравнения (2.1) координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W \equiv W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ и положим

$$\underset{\mu}{\theta}{}^\xi = \frac{\partial \tilde{f}^\xi(u,v)}{\partial u_\mu^\eta} du_\mu^\eta, \quad \underset{s}{\vartheta}{}^\xi = \frac{\partial \tilde{f}^\xi(u,v)}{\partial v_s^\eta} dv_s^\eta, \quad \Theta^\xi = dz^\xi. \tag{2.5}$$

Здесь $u = (u_1^\eta, \ldots, u_m^\eta)$, $v = (v_1^\zeta, \ldots, v_l^\zeta)$, $\xi, \eta, \zeta = \overline{1,\lambda}$, по μ и s суммирования в правой части нет и для любых $\mu = \overline{1,m}$ и $s = \overline{1,l}$ выполняются условия (2.4). Формы Пфаффа $\underset{\mu}{\theta}{}^\xi$ и $\underset{s}{\vartheta}{}^\xi$ образуют базис пространства дифференциальных 1-форм многообразия $\mathcal{M}$ и задают $n = l+m$ слоений $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$:

$$\underset{1}{\theta}{}^\xi = 0, \ldots, \underset{m}{\theta}{}^\xi = 0, \ \underset{1}{\vartheta}{}^\xi = 0, \ldots, \underset{l}{\vartheta}{}^\xi = 0. \tag{2.6}$$

$(n+1)$-е слоение определяется уравнениями $z^\xi = \mathrm{const}$ или согласно (2.1) и (2.5) уравнениями

$$\Theta^\xi \equiv \sum_{\mu=1}^{m} \underset{\mu}{\theta}^\xi + \sum_{s=1}^{l} \underset{s}{\vartheta}^\xi = 0. \tag{2.7}$$

Условия интегрируемости уравнений (2.6) и (2.7) приводят к структурным уравнениям $(n+1)$-ткани $\tilde{W}^\lambda(a,b)$:

$$\begin{aligned} d\underset{\mu}{\theta}^\xi &= \underset{\mu}{\theta}^\eta \wedge \Big(\omega_\eta^\xi + \sum_{\nu\neq\mu} \underset{\mu\nu}{\bar{a}}{}^{\xi}_{\eta\zeta} \underset{\nu}{\theta}^\zeta + \sum_{s} \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta} \underset{s}{\vartheta}^\zeta\Big), \\ d\underset{s}{\vartheta}^\xi &= \underset{s}{\vartheta}^\eta \wedge \Big(\omega_\eta^\xi + \sum_{t\neq s} \underset{st}{\tilde{a}}{}^{\xi}_{\eta\zeta} \underset{t}{\vartheta}^\zeta + \sum_{\mu} \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\zeta\eta} \underset{\mu}{\theta}^\zeta\Big), \\ d\Theta^\xi &= \Theta^\eta \wedge \omega_\eta^\xi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\underset{\mu\nu}{\bar{a}}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{\nu\mu}{\bar{a}}{}^{\xi}_{\zeta\eta}, \quad \underset{st}{\tilde{a}}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{ts}{\tilde{a}}{}^{\xi}_{\zeta\eta}.$$

При этом допускаются преобразования

$$\underset{\mu}{\tilde{\theta}}{}^\xi = A_\eta^\xi \underset{\mu}{\theta}^\eta, \quad \underset{s}{\tilde{\vartheta}}{}^\xi = A_\eta^\xi \underset{s}{\vartheta}^\eta, \quad |A_\eta^\xi| \neq 0. \tag{2.9}$$

Три-ткань $W \equiv W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ определяется (с точностью до изотопии) теми же уравнениями (2.1), что и $(n+1)$-ткань $\tilde{W}^\lambda(a,b)$. Слоения ткани W задаются уравнениями (2.3). Дифференцируя их, получим

$$\begin{aligned} &\lambda_1\colon\ \underset{\mu}{\theta}^\xi = 0, \quad \mu = \overline{1,m}; \\ &\lambda_2\colon\ \underset{s}{\vartheta}^\xi = 0, \quad s = \overline{1,l}; \\ &\lambda_3\colon\ \Theta^\xi \equiv \sum_{\mu=1}^{m} \underset{\mu}{\theta}^\xi + \sum_{s=1}^{l} \underset{s}{\vartheta}^\xi = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В силу (2.8) системы форм (2.10), определяющие слоения три-ткани W, вполне интегрируемы, поэтому (2.8) являются также структурными уравнениями три-ткани W.

Предложение 2.2 [11]. *Структурные уравнения три-ткани* $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ *и связанной с нею* $(n+1)$*-ткани* $\tilde{W}^\lambda(a,b)$ *могут быть приведены к виду* (2.8) *и допускают преобразования вида* (2.9).

Замечание. Структурные уравнения (p,q,r)-ткани наиболее общего вида, найденные в [2] (см. также [4]), получаются из уравнений (2.8) при допустимых преобразованиях следующего вида:

$$\underset{\hat\mu}{\tilde\theta}{}^{\xi} = \sum_{\hat\nu} A^{\xi}_{\hat\mu\hat\nu\eta}\underset{\hat\nu}{\theta}{}^{\eta} + A^{\xi}_{\hat\mu\eta}\underset{m+1}{\theta}{}^{\eta}, \quad \underset{m+1}{\tilde\theta}{}^{\xi} = A^{\xi}_{\eta}\underset{m+1}{\theta}{}^{\eta}, \quad \underset{m+1}{\theta}{}^{\xi} = \sum_{\mu}\underset{\mu}{\theta}{}^{\xi}, \quad \hat\mu, \hat\nu = \overline{1, m-1},$$

$$\underset{\hat s}{\tilde\vartheta}{}^{\xi} = \sum_{\hat t} A^{\xi}_{\hat s\hat t\eta}\underset{\hat t}{\vartheta}{}^{\eta} + A^{\xi}_{\hat s\eta}\underset{l+1}{\vartheta}{}^{\eta}, \quad \underset{l+1}{\tilde\vartheta}{}^{\xi} = A^{\xi}_{\eta}\underset{l+1}{\vartheta}{}^{\eta}, \quad \underset{l+1}{\vartheta}{}^{\xi} = \sum_{s}\underset{s}{\vartheta}{}^{\xi}, \quad \hat s, \hat t = \overline{1, l-1}.$$

3.

В [22] определена обобщённая конфигурация Рейдемейстера $R\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ на три-ткани $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$. Она образована двумя наборами из $l+1$ вертикальных слоёв $x_{\bar s}$, $\bar x_{\bar s}$ $(\bar s = \overline{1, l+1})$, двумя наборами из $m+1$ горизонтальных слоёв $y_{\bar\mu}$, $\bar y_{\bar\mu}$ $(\bar\mu = \overline{1, m+1})$ и такими $(l+1)(m+1)+1$ наклонными слоями $z_{\bar s\bar\mu}$, $\bar z_{l+1m+1}$, для которых выполняются равенства

$$x_s \cdot y_\mu = \bar x_s \cdot \bar y_\mu = z_{s\mu}, \quad x_s \cdot y_{m+1} = \bar x_s \cdot \bar y_{m+1} = z_{sm+1},$$
$$x_{l+1} \cdot y_\mu = \bar x_{l+1} \cdot \bar y_\mu = z_{l+1m}, \quad x_{l+1} \cdot y_{m+1} = z_{l+1m+1}, \quad \bar x_{l+1} \cdot \bar y_{m+1} = \bar z_{l+1m+1},$$

где $s = \overline{1, l}$, $\mu = \overline{1, m}$ (рис. 3). При этом наклонные слои z_{l+1m+1} и $\bar z_{l+1m+1}$, вообще говоря, не совпадают.

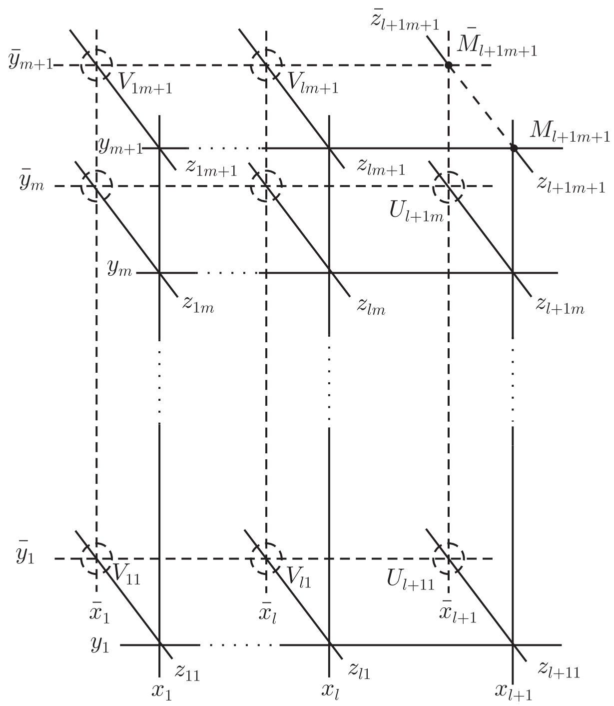

Рис. 3

При $l = m = 1$ получаем конфигурацию (R) на ткани $W(\lambda, \lambda, \lambda)$ [1], а при $\lambda = 1$ — конфигурацию $R(p, q)$ на ткани $W(p, q, p+q-1)$ (см. [13,14]).

Если $z_{l+1m+1} = \bar{z}_{l+1m+1}$, то будем говорить, что обобщённая конфигурация Рейдемейстера замыкается.

Определение 3.1. Три-ткань $W\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$, на которой замыкаются все достаточно малые конфигурации Рейдемейстера $R\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$, называется обобщённой три-тканью Рейдемейстера и обозначается $WR\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$.

Теорема 2 [11]. *$(n+1)$-ткань $\tilde{W}^{\lambda}(a, b)$, ассоциированная с три-тканью $WR\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$, является групповой.*

Напомним [5], что $(n+1)$-ткань называется групповой, если её координатная n-квазигруппа является n-группой. Согласно [5] групповая $(n+1)$-ткань коразмерности λ характеризуется тем, что любая её три-подткань $W(\lambda, \lambda, \lambda)$ является групповой тканью, порождаемой λ-мерной группой Ли, при этом координатные группы различных три-подтканей изоморфны.

В [11] показано, что структурные уравнения ткани $WR\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ могут быть приведены к виду

$$d\underset{\mu}{\theta}^{\xi} = \underset{\mu}{\theta}^{\eta} \wedge \underset{\mu}{\theta}{}_{\eta}^{\xi} + a^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\theta}^{\eta} \wedge \underset{\mu}{\theta}^{\zeta}, \quad d\underset{s}{\vartheta}^{\xi} = \underset{s}{\vartheta}^{\eta} \wedge \underset{s}{\vartheta}{}_{\eta}^{\xi} - a^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{\vartheta}^{\eta} \wedge \underset{s}{\vartheta}^{\zeta},$$

$$d\Theta^{\xi} = a^{\xi}_{\eta\zeta}\Theta^{\eta} \wedge \Big(\underset{m+1}{\theta}{}^{\zeta} - \underset{l+1}{\vartheta}{}^{\zeta}\Big),$$

$$d\underset{\mu}{\theta}{}_{\eta}^{\xi} = 0, \quad d\underset{s}{\vartheta}{}_{\eta}^{\xi} = 0,$$

$$da^{\xi}_{\eta\zeta} = 0, \quad \underset{\mu}{\theta}{}_{\eta}^{\xi} = \sum_{s=1}^{l} \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{s}{\vartheta}^{\zeta}, \quad \underset{s}{\vartheta}{}_{\eta}^{\xi} = \sum_{\mu=1}^{m} \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{\theta}^{\zeta}, \quad \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\zeta\eta},$$

$$d\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\sigma}\Bigg(\sum_{\nu=1}^{m} \underset{\nu s}{b}{}^{\sigma}_{\zeta\rho}\underset{\nu}{\theta}^{\rho} + \sum_{t=1}^{l} \underset{\mu t}{b}{}^{\sigma}_{\zeta\rho}\underset{t}{\vartheta}^{\rho}\Bigg),$$

$$\underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\eta\zeta}a^{\zeta}_{\rho\sigma} = 0, \quad \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\sigma[\eta}\underset{\nu s}{b}{}^{\sigma}_{\zeta]\rho} = 0, \quad \underset{\mu s}{b}{}^{\xi}_{\sigma[\eta}\underset{\mu t}{b}{}^{\sigma}_{\zeta]\rho} = 0.$$

Величины $a^{\xi}_{\eta\zeta}$ образуют структурный тензор группы Ли G, порождающей три-ткань $WR\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$.

Для случая, когда группа G абелева, т. е. когда $a^{\xi}_{\eta\zeta} = 0$, в [11] найдены уравнения соответствующей ткани путём интегрирования её структурных уравнений. Полученные уравнения приведены к виду

$$z^{\xi} = \sum_{\mu,s} \underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}\underset{\mu}{x}^{\eta}\underset{s}{y}^{\zeta} + \sum_{\mu}\underset{\mu}{x}^{\xi} + \sum_{s}\underset{s}{y}^{\xi}, \tag{3.1}$$

где величины $\underset{\mu s}{C}{}^{\xi}_{\eta\zeta}$ постоянны.

При $\lambda = 1$ уравнения (3.1) приводятся к трём различным видам

$$1)\quad z = \underset{1}{x}\underset{1}{y} + \ldots + \underset{p}{x}\underset{p}{y},$$

$$2)\quad z = \underset{1}{x}\underset{1}{y} + \ldots + \underset{p}{x}\underset{p}{y} + \underset{p+1}{x},$$

$$3)\quad z = \underset{1}{x}\underset{1}{y} + \ldots + \underset{p-1}{x}\underset{p-1}{y} + \underset{p}{x} + \underset{p}{y},$$

которые определяют классы изотопически неэквивалентных тканей (см. [13]). С другой стороны, эти уравнения определяют классы бинарных физических структур, найденные в [7].

4.

Рассмотрим три-ткань $GW(p,q,q)$, порождаемую действием q-параметрической группы Ли на гладком p-мерном многообразии ($p \leqslant q$) [15]. Пусть группа Ли G размерности q действует на гладком p-мерном многообразии Y, т. е. задана гладкая функция

$$f\colon G \times Y \to Y, \quad z = f(a,y) \equiv a \cdot y, \tag{4.1}$$

удовлетворяющая условиям

$$f(e,y) = y, \quad f\big(a, f(b,y)\big) = f(\phi(a,b), y), \tag{4.2}$$

где e — единица группы G, а $\phi(a,b)$ — операция в этой группе. Группоид (4.1), с одной стороны, определяет группу Ли преобразований, а с другой — задаёт три-ткань $GW(p,q,q)$, образованную слоениями

$$\lambda_1\colon\ a = \mathrm{const}, \quad \lambda_2\colon\ y = \mathrm{const}, \quad \lambda_3\colon\ z = f(a,y) = \mathrm{const}$$

на многообразии $\mathcal{M} = G \times Y$ размерности $p+q$.

Три-ткани $GW(p,q,q)$ характеризуются замыканием на них конфигураций типа Рейдемейстера, которые получаются из $R\big(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)\big)$ при $l=1$, причём $\lambda = p$, $m = [q/p]$ (см. [15]).

В [16] описано вложение ткани $GW(p,q,q)$ в групповую три-ткань $R \equiv W(q,q,q)$, порождаемую группой G. Это вложение задаётся уравнениями

$$\underset{1}{\bar\omega}^\alpha = \underset{1}{\omega}^\alpha + b^\alpha_u \underset{1}{\omega}^u, \quad \underset{1}{\bar\omega}^u = \underset{1}{\omega}^u, \quad \underset{2}{\bar\omega}^\alpha = \underset{2}{\omega}^\alpha, \quad \underset{2}{\omega}^u = a^u_\alpha \underset{2}{\omega}^\alpha, \quad \underset{3}{\bar\omega}^\alpha = \underset{3}{\omega}^\alpha + b^\alpha_u \underset{1}{\omega}^u,$$

где $\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,p}$, $u,v = \overline{p+1,q}$. Там же показано, как находить структурные уравнения ткани $GW(p,q,q)$ в виде

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\bar\omega}^\alpha &= \underset{1}{\bar\omega}^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta + \mu^\alpha_{u\beta} \underset{1}{\bar\omega}^u \wedge \underset{3}{\bar\omega}^\beta - \mu^\alpha_{\beta\gamma} \underset{1}{\bar\omega}^\beta \wedge \underset{1}{\bar\omega}^\gamma,\\
d\underset{1}{\bar\omega}^u &= \underset{1}{\bar\omega}^v \wedge \omega^u_v + \underset{1}{\bar\omega}^\beta \wedge \omega^u_\beta,\\
d\underset{2}{\bar\omega}^\alpha &= \underset{2}{\bar\omega}^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta + \mu^\alpha_{\beta\gamma} \underset{2}{\bar\omega}^\beta \wedge \underset{2}{\bar\omega}^\gamma
\end{aligned} \tag{4.3}$$

по уравнениям Маурера—Картана группы G

$$d\omega^i = c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$$

(здесь $i, j, k = \overline{1, q}$, ω^i — инвариантные формы группы Ли G, c^i_{jk} — её структурный тензор, удовлетворяющий тождествам Якоби).

Величины $\{\mu^\alpha_{u\beta}, \mu^\alpha_{\beta\gamma}\}$ в уравнениях (4.3) кососимметричны по нижним индексам и образуют тензор кручения ткани $GW(p, q, q)$, а её слоения определяются уравнениями

$$\tilde{\lambda}_1\colon\ \underset{1}{\bar{\omega}}^i = 0, \quad \tilde{\lambda}_2\colon\ \underset{2}{\bar{\omega}}^\alpha = 0, \quad \tilde{\lambda}_3\colon\ \underset{3}{\bar{\omega}}^\alpha = \underset{1}{\bar{\omega}}^\alpha + \underset{2}{\bar{\omega}}^\alpha = 0. \tag{4.4}$$

5.

Обобщённая левая три-ткань Бола $B_l(p, q, q)$ определяется, согласно [17], действием локальной гладкой q-мерной квазигруппы $Q(*)$ на гладком p-мерном многообразии Y ($p \leqslant q$) и задаётся гладкой функцией

$$f\colon Q \times Y \to Y, \quad z = f(a, y), \quad a \in Q, \quad y, z \in Y, \tag{5.1}$$

удовлетворяющей тождеству

$$f\Big(a, f^{-1}\big(b, f(a, y)\big)\Big) = f(a * b, y), \quad a, b \in Q, \quad y \in Y, \tag{5.2}$$

причём ранги матриц $(\partial f/\partial a)$ и $(\partial f/\partial y)$ максимальны в каждой точке области определения.

В силу (5.2) операция $(*)$ обладает свойствами

$$a * a = a, \quad a * (a * b) = b, \quad a * (b * c) = (a * b) * (a * c),$$

поэтому квазигруппа $Q(*)$ изотопна левой лупе Бола, т. е. в последней выполняется тождество

$$\big(u \circ (v \circ u)\big) \circ w = u \circ \Big(v \circ \big(u \circ w\big)\Big).$$

Поэтому группоид (5.1), удовлетворяющий условию (5.2), назван локальной гладкой квазигруппой Бола преобразований.

С другой стороны, этот группоид определяет три-ткань $W(p, q, q)$, образованную на многообразии $Q \times Y$ слоениями

$$\lambda_1\colon\ a = \text{const}, \quad \lambda_2\colon\ y = \text{const}, \quad \lambda_3\colon\ z = f(a, y) = \text{const}.$$

Тождеству (5.2) на три-ткани $W(p, q, q)$ соответствует конфигурация, аналогичная конфигурации B_l на ткани $W(q, q, q)$ [1] (рис. 4, где $c = a * b$). Три-ткань $W(p, q, q)$ называется *обобщённой левой тканью Бола* и обозначается $B_l(p, q, q)$.

Теорема 3 [13]. *Три-ткань $B_l(p, q, q)$ индуцирует на базе первого слоения локально симметрическую структуру.*

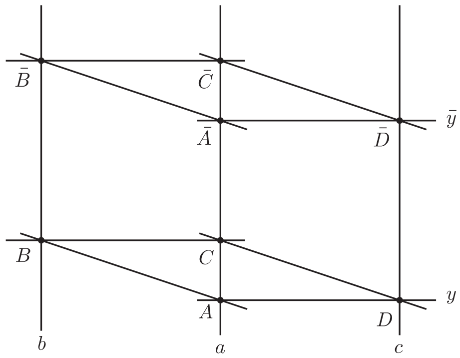

Рис. 4

Структурные уравнения ткани $B_l(p,q,q)$ и их дифференциальные продолжения найдены в [18]. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
&d\underset{3}{\omega}^{\alpha} = \underset{3}{\omega}^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} + \underset{3}{\Theta}^{\alpha},\\
&d\underset{1}{\omega}^{u} = \underset{1}{\omega}^{v} \wedge \omega^{u}_{v} + (\underset{3}{\omega}^{\beta} - \underset{2}{\omega}^{\beta}) \wedge \omega^{u}_{\beta},\\
&d\underset{2}{\omega}^{\alpha} = \underset{2}{\omega}^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} + \underset{2}{\Theta}^{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d\omega^{\alpha}_{\beta} - \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} = b^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\underset{2}{\omega}^{\gamma} \wedge \underset{3}{\omega}^{\delta} + b^{\alpha}_{\beta\gamma w}(\underset{2}{\omega}^{\gamma} - \underset{3}{\omega}^{\gamma}) \wedge \underset{1}{\omega}^{w},\\
&d\omega^{u}_{v} - \omega^{w}_{v} \wedge \omega^{u}_{w} = b^{u}_{v\gamma\delta}\underset{2}{\omega}^{\gamma} \wedge \underset{3}{\omega}^{\delta} + b^{u}_{v\gamma w}(\underset{2}{\omega}^{\gamma} - \underset{3}{\omega}^{\gamma}) \wedge \underset{1}{\omega}^{w},\\
&d\omega^{u}_{\beta} - \omega^{v}_{\beta} \wedge \omega^{u}_{v} - \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{u}_{\gamma} = b^{u}_{\beta\gamma\delta}\underset{2}{\omega}^{\gamma} \wedge \underset{3}{\omega}^{\delta} + b^{u}_{\beta\gamma w}(\underset{2}{\omega}^{\gamma} - \underset{3}{\omega}^{\gamma}) \wedge \underset{1}{\omega}^{w},\\
&(d\omega^{\alpha}_{\beta} - \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma}) \wedge \underset{3}{\omega}^{\beta} + d\underset{3}{\Theta}^{\alpha} + \underset{3}{\Theta}^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} = 0,\\
&(d\omega^{\alpha}_{\beta} - \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma}) \wedge \underset{2}{\omega}^{\beta} + d\underset{2}{\Theta}^{\alpha} + \underset{2}{\Theta}^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} = 0,
\end{aligned}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta = \overline{1,p}$, $u,v,w = \overline{p+1,q}$, $\underset{3}{\omega}^{\alpha} = \underset{1}{\omega}^{\alpha} + \underset{2}{\omega}^{\alpha}$,

$$\underset{3}{\Theta}^{\alpha} = \frac{1}{2}\mu^{\alpha}_{u\beta}\underset{1}{\omega}^{u} \wedge \underset{3}{\omega}^{\beta} + \mu^{\alpha}_{\beta\gamma}\underset{3}{\omega}^{\beta} \wedge \underset{2}{\omega}^{\gamma}, \quad \underset{2}{\Theta}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\mu^{\alpha}_{u\beta}\underset{1}{\omega}^{u} \wedge \underset{2}{\omega}^{\beta} + \mu^{\alpha}_{\beta\gamma}\underset{2}{\omega}^{\beta} \wedge \underset{3}{\omega}^{\gamma}.$$

Слоения ткани $B_l(p,q,q)$ задаются уравнениями вида (4.4). Величины $\{\mu^{\alpha}_{u\beta}, \mu^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$ образуют тензор кручения ткани, а $\{b^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}, b^{u}_{v\alpha\beta}, b^{u}_{\alpha\beta\gamma}\}$ — тензор кривизны, причём

$$b^{\alpha}_{\beta(\gamma\delta)} = 0, \quad b^{u}_{v(\beta\gamma)} = 0, \quad b^{u}_{\alpha(\beta\gamma)} = 0.$$

Примеры три-тканей $B_l(2,3,3)$ даны в [12].

Отметим, что исследованием квазигрупп преобразований и их физическими приложениями занимались А. И. Баталин [20], А. И. Нестеров [9] и другие (см. [6, 10]). Обобщение теории групп Ли преобразований для луп Муфанг и

Бола начато в работах П. О. Михеева [8, 21], который рассматривал квазигруппу преобразований как семейство преобразований гладкого многообразия, не замкнутое, вообще говоря, относительно композиции. Мы определили квазигруппу Бола преобразований как *действие* локальной гладкой квазигруппы Бола на гладком многообразии, что позволило привлечь методы теории три-тканей, в том числе метод внешних форм, к изучению квазигрупп Бола преобразований.

Три-ткань $W(p, q, r)$ представляет собой геометрический аналог гладкой функции двух переменных общего вида

$$f\colon X \times Y \to Z, \quad z = f(x, y).$$

Поэтому методы и результаты теории (p, q, r)-тканей могут применяться в разных разделах математики и физики.

Литература

[1] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1969. — Т. 2. — С. 7—31.

[2] Акивис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // ДАН СССР. — 1972. — Т. 203, № 2. — С. 263—266.

[3] Гольдберг В. В. О $(n + 1)$-тканях многомерных поверхностей // ДАН СССР. — 1973. — Т. 210, № 4. — С. 756—759.

[4] Гольдберг В. В. Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей // Сб. статей по дифферен. геом. — Калинин, 1974. — С. 52—64.

[5] Гольдберг В. В. О приводимых, групповых и $(2n + 2)$-эдричных $(n + 1)$-тканях многомерных поверхностей // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 1. — С. 44—57.

[6] Лыхмус Я., Паал Э., Соргсепп Л. Неассоциативность в математике и физике // Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике (Тр. Института физики, Тарту). — 1990. — Т. 66. — С. 8—22.

[7] Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // ДАН СССР. — 1972. — Т. 206, № 5. — С. 1056—1058.

[8] Михеев П. О. О лупах преобразований. — Деп. в ВИНИТИ, 1985; № 4531-85.

[9] Нестеров А. И. Квазигрупповые идеи в физике // Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике (Тр. Института физики, Тарту). — 1990. — Т. 66. — С. 107—120.

[10] Толстихина Г. А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2005. — Т. 32. — С. 29—116.

[11] Толстихина Г. А. К геометрии гладких отображений $R^q \times R^p \to R^\lambda$, обобщающих группы // Вестн. Тверского гос. ун-та. Сер. Прикладная математика. Вып. 5. — 2007. — № 11 (39). — С. 19—38.

[12] Толстихина Г. А. О локально симметрической структуре, связанной с обобщённой левой три-тканью Бола $B_l(p, q, q)$ // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Інст. мат. НАН України. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 247—255.

[13] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О три-тканях $W(p,q,p+q-1)$, на которых замыкаются обобщённые конфигурации Рейдемейстера. — Деп. в ВИНИТИ 13.08.2001; № 1869-B2001.

[14] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Обобщённая ассоциативность в гладких группоидах // Докл. РАН. — 2002. — Т. 383, № 1. — С. 32—33.

[15] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Три-ткани, определяемые группами преобразований // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 4. — С. 1—3.

[16] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Вложение три-ткани, определяемой группой преобразований, в групповую три-ткань. — Деп. в ВИНИТИ 2003; № 880–B2003.

[17] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О квазигруппах Бола преобразований // Докл. РАН. — 2005. — Т. 401, № 2. — С. 166—168.

[18] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2005. — № 5 (516). — С. 56—62.

[19] Akivis M. A., Shelekhov A. M. Algebra and Geometry of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

[20] Batalin I. A. Quasigroup construction and first class constraints // J. Math. Phys. — 1981. — Vol. 22, no. 9. — P. 1837—1849.

[21] Miheev P. O. Quasigroups of transformations // Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике (Тр. Института физики, Тарту). — 1990. — Т. 66. — С. 54—66.

[22] Tolstikhina G. A. On associative smooth monoids // Webs and Quasigroups. — Tver, 2002. — P. 53—59.