Мировые поверхности струн в пространствах с компактными фактор-многообразиями

Г. С. ШАРОВ, А. Е. МИЛОВИДОВ
Тверской государственный университет
e-mail: german.sharov@mail.ru

УДК 514.82

Ключевые слова: замкнутая струна, компактное многообразие, ротационные состояния, устойчивость.

Аннотация

Замкнутая струна с точечными массами как модель адрона рассмотрена в D-мерном пространстве $\mathcal{M} = R^{1,3} \times T^{D-4}$ — прямом произведении пространства Минковского и компактного многообразия $T^{D-4} = S^1 \times \ldots \times S^1$ (тор размерности $D-4$). Найдены точные решения динамических уравнений, которые в частном случае ротационных состояний описывают равномерное вращение системы. Для этих состояний проведена классификация, исследованы физические характеристики, построены траектории Редже. Центральные и линейные ротационные состояния исследованы на устойчивость относительно малых возмущений. Выявлена неустойчивость центральных состояний с пороговым эффектом.

Abstract

G. S. Sharov, A. E. Milovidov, String world surfaces in spaces with compact factor-manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 171—177.

The closed string with point-like masses as the string hadron model is considered in the D-dimensional space $\mathcal{M} = R^{1,3} \times T^{D-4}$, which is the direct product of the Minkowski space and the compact manifold $T^{D-4} = S^1 \times \cdots \times S^1$ (($D-4$)-dimensional torus). Exact solutions of dynamical equations are obtained; in a particular case of rotational states, they describe a uniform rotation of the system. These rotational states are classified, their physical properties are studied, and Regge trajectories are determined. Central and linear rotational states are tested for stability with respect to small disturbances. It is shown that the central rotational states are not stable if the central mass it less than some threshold value.

В теории струн необходимость сокращения квантовых аномалий требует критической размерности D пространственно-временного многообразия $\mathcal{M} = \mathcal{M}^D$ [1]. В частности, $D = 10$ для струны с фермионными степенями свободы. Известный подход к решению проблемы лишних измерений основан на их компактификации — трансформации исходного D-мерного псевдоевклидова пространства $R^{1,D-1}$ в многообразие $\mathcal{M} = R^{1,3} \times K$, где K — компактное многообразие размерности $D-4$, характерный размер которого мал $[1,2]$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 171—177.

Взяв в качестве компакта K тор $K = T^{D-4} = S^1 \times \ldots \times S^1$ размерности $D-4$, рассмотрим в пространстве $\mathcal{M} = R^{1,3} \times K$ замкнутую струну с n точечными массами m_j (гомеоморфную окружности с n выделенными точками). Такая струна моделирует барионы и экзотические адроны, в частности глюболы [5]. Наличие компакта T^{D-4} усложняет динамику замкнутой струны из-за нетривиальной фундаментальной группы многообразия $\mathcal{M}$, а также модифицирует известные в $R^{1,3}$ точные решения динамических уравнений, описывающие равномерное вращение системы (ротационное состояние).

Действие для замкнутой струны с массами $m_1, \ldots, m_n$ имеет вид [2, 5]

$$S = -\gamma \int\limits_{\Omega} \sqrt{-g}\, d\tau\, d\sigma - \sum_{j=1}^{n} m_j \int \sqrt{\dot{x}_j^2(\tau)}\, d\tau. \tag{1}$$

Здесь γ — натяжение струны, g — определитель индуцированной метрики $g_{ab} = G_{\mu\nu}(X)\,\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$ на мировой поверхности струны $X^\mu(\tau,\sigma)$, погружённой в $\mathcal{M}$, $G_{\mu\nu}(X)$ — метрика на $\mathcal{M}$, $c = 1$ — скорость света.

Область

$$\Omega = \{(\tau,\sigma)\colon \tau \in R,\ \sigma_0(\tau) < \sigma < \sigma_n(\tau)\},$$

отображается в трубкообразную мировую поверхность замкнутой струны, которая разделена на n мировых листов мировыми линиями массивных точек $\sigma = \sigma_j(\tau)$ или

$$x_j^\mu(\tau) = X^\mu\bigl(\tau, \sigma_j(\tau)\bigr), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Две из этих функций, $x_0^\mu(\tau)$ и $x_n^\mu(\tau)$, описывают одну и ту же траекторию n-й точки, что равносильно условию замыкания струны, которое мы приведём ниже.

С помощью варьирования действия (1) получаем уравнения движения струны, которые без потери общности можно свести к виду

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(X)\left(\frac{\partial X^\lambda}{\partial\tau}\,\frac{\partial X^\nu}{\partial\tau} - \frac{\partial X^\lambda}{\partial\sigma}\,\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma}\right) = 0 \tag{2}$$

($\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ — символы Кристоффеля в $\mathcal{M}$), если выбрать параметры τ и σ так, чтобы были выполнены условия ортонормальности

$$(\partial_\tau X \pm \partial_\sigma X)^2 = 0, \tag{3}$$

а также условия

$$\sigma_0(\tau) = 0, \quad \sigma_n(\tau) = 2\pi. \tag{4}$$

Мы использовали инвариантность действия (1) относительно невырожденных репараметризаций $\tau = \tau(\tilde\tau, \tilde\sigma)$, $\sigma = \sigma(\tilde\tau, \tilde\sigma)$. Скалярный квадрат в условиях (3) определён скалярным произведением $(\xi, \zeta) = G_{\mu\nu}\xi^\mu\zeta^\nu$.

Введём координаты x^μ на $\mathcal{M} = R^{1,3} \times T^{D-4}$ так, чтобы x^0, x^1, x^2, x^3 описывали $R^{1,3}$, а остальные координаты x^k при $k \geqslant 4$ относились к тору T^{D-4} и были циклическими с периодом ℓ_k. Точки с координатами x^k и $x^k + N\ell_k$ отождествлены [1]:

$$x^k \cong x^k + N\ell_k, \quad k = 4, 5, \ldots, \quad N \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Если при этом задана плоская метрика $G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1; -1; \ldots; -1)$, то уравнение (2) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial\sigma^2} = 0. \tag{6}$$

В случае (4) и (5) упомянутое выше условие замыкания принимает вид

$$X^\mu(\tau^*(\tau), 2\pi) = X^\mu(\tau, 0) + \sum_{k>3} N_k \ell_k \delta^\mu_k. \tag{7}$$

Здесь два, вообще говоря различных, параметра τ и τ^*, связанные соотношением $\tau^* = \tau^*(\tau)$, параметризуют одну и ту же траекторию массивной точки m_n [6], δ^μ_k — символ Кронекера.

Уравнения на траекториях массивных точек (краевые условия) при условиях (3)—(5) имеют вид

$$m_j \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}^\mu_j(\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2_j(\tau)}} - \gamma[X'^\mu + \dot{\sigma}_j(\tau)\dot{X}^\mu]\big|_{\sigma=\sigma_j+0} + \gamma[X'^\mu + \dot{\sigma}_j \dot{X}^\mu]\big|_{\sigma=\sigma_j-0} = 0, \tag{8}$$

$$m_n \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}^\mu_0(\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2_0(\tau)}} + \gamma[X'^\mu(\tau^*, \sigma_n) - X'^\mu(\tau, 0)] = 0. \tag{9}$$

Здесь $\dot{X}^\mu \equiv \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu \equiv \partial_\sigma X^\mu$.

Система уравнений (3)—(9) полностью описывает движение замкнутой струны с n точечными массами в пространстве $\mathcal{M}$.

Решения системы уравнений (3)—(9), удовлетворяющие ограничениям

$$\sigma_j = \mathrm{const}, \quad \tau^*(\tau) = \tau + 2\pi\theta, \quad \theta = \mathrm{const}, \quad \frac{\gamma\sqrt{\dot{x}^2_j}}{m_j} = Q_j = \mathrm{const}, \tag{10}$$

могут быть найдены в виде рядов Фурье вида [2]

$$X^\mu(\tau, \sigma) = e^\mu_0 a_0(\tau - \theta\sigma) + \sum_{k\geqslant 3} e^\mu_k (a_k\tau + b_k\sigma) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^\mu_m(\sigma) e^{-i\omega_m\tau}.$$

Среди решений указанного вида выделим одночастотные

$$X^\mu(\tau, \sigma) = e^\mu_0 a_0(\tau - \theta\sigma) + \sum_{k>3} e^\mu_k \frac{\ell_k N_k}{2\pi}\sigma + u(\sigma)e^\mu(\tau) + \tilde{u}(\sigma)\acute{e}^\mu(\tau), \tag{11}$$

содержащие слагаемое с единственной частотой $\omega \equiv \omega_m > 0$ и описывающие равномерное вращение системы (ротационное состояние). Здесь $e_0, e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированный базис в $R^{1,3} \times T^{D-4}$,

$$e^\mu(\tau) = e^\mu_1 \cos\omega\tau + e^\mu_2 \sin\omega\tau, \quad \acute{e}^\mu(\tau) = -e^\mu_1 \sin\omega\tau + e^\mu_2 \cos\omega\tau \,—$$

подвижный базис в плоскости вращения,

$$u(\sigma) = A_j \cos\omega\sigma + B_j \sin\omega\sigma, \quad \tilde{u}(\sigma) = \tilde{A}_j \cos\omega\sigma + \tilde{B}_j \sin\omega\sigma, \quad \sigma \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j].$$

Константы ω, θ, a_0, $b_k = \ell_k N_k/(2\pi)$, σ_j, $h_j = \omega/Q_j$ связаны соотношениями (здесь для $n = 2$) [2,5]

$$\begin{gathered}
2(\cos 2\pi\theta\omega - \cos 2\pi\omega) + (h_1 + h_2)\omega \sin 2\pi\omega = h_1 h_2 \sin\omega\sigma_1 \cdot \sin\omega(2\pi - \sigma_1),\\
\sigma_1 = \pi + \frac{\pi l}{2\omega}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad a_0^2\theta = \omega^2(\tilde{A}_j B_j - A_j \tilde{B}_j),\\
a_0^2(1+\theta^2) = \omega^2(A_j^2 + B_j^2 + \tilde{A}_j^2 + \tilde{B}_j^2) + \sum_{k>3} b_k^2, \quad j = 1, 2,
\end{gathered} \tag{12}$$

следующими из условий (3)—(9).

При выполнении этих условий выражение (11) описывает равномерное вращение замкнутой струны с массивными точками. Форма струны (сечение $t \equiv x^0 = \mathrm{const}$ мировой поверхности) при выполнении условия $b_k = N_k = 0$ $(k > 3)$ является объединением отрезков гипоциклоиды, соединённых под ненулевыми углами в массивных точках. Гипоциклоида — траектория точки окружности радиуса r, катящейся внутри неподвижной окружности большего радиуса R. В случае ротационных состояний (11)

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - |\theta|}{2}.$$

При этом $|\theta| < 1$.

Данная система вращается в плоскости e_1, e_2 с угловой скоростью $\Omega = \omega/a_0$. Массивные точки движутся со скоростями v_j по окружностям радиусов v_j/Ω. Указанные параметры связаны соотношениями, следующими из равенств (10):

$$a_0 = \frac{m_1 Q_1}{\gamma\sqrt{1 - v_1^2}} = \ldots = \frac{m_n Q_n}{\gamma\sqrt{1 - v_n^2}}. \tag{13}$$

Вращающаяся гипоциклоида может иметь точки возврата, которые движутся со скоростью света. Мировая поверхность имеет в этих точках особенности метрики $\dot{X}^2 = X'^2 = 0$ [6]. Однако в случае $b_k \neq 0$ или $N_k \neq 0$, что соответствует нетривиальному гомотопическому классу замкнутой струны на многообразии $\mathcal{M}$, особенности $\dot{X}^2 = X'^2 = 0$ отсутствуют. Решение (11) при $N_k \neq 0$ описывает вращающуюся пространственную кривую, не имеющую точек возврата. Проекция этой кривой на плоскость e_1, e_2 отлична от гипоциклоиды, но стремится к ней при $b_k \to 0$. Заметим, что если размеры компакта T^{D-4} (числа ℓ_k) много меньше характерного размера струны a_0, то форма струны очень мало отличается от гипоциклоиды.

Существуют различные топологические типы решений (11), различающиеся как гомотопическим классом замкнутой струны (набором чисел N_k, $k > 3$), так и видом проекции струны на плоскость e_1, e_2. В основу классификации решений (11) положим подход, использованный ранее в [5, 6]. А именно, при фиксированных значениях чисел N_k, ℓ_k и параметров γ, a_0 для заданного топологического типа решения (11) рассмотрим предел $m_j \to 0$. Анализ уравнений (8)—(13) [2, 5] показывает, что в пределе $m_j \to 0$ скорости v_j массивных точек стремятся к скорости света ($v_j \to 1$), а значения параметров 2ω и $2\omega\theta$ стремятся к следующим целым числам:

$$n_1 = \Big|\lim_{m_j \to 0} 2\omega\Big|, \quad n_2 = \lim_{m_j \to 0} 2\theta\omega. \tag{14}$$

В силу неравенства $|\theta| < 1$ и условий (12) лишь следующие значения параметров (14) допустимы: $n_1 \geqslant n$, $n_2 = n_1-2, n_1-4, \ldots, 2-n_1$. Набор целых чисел n_1, n_2, N_k и позиции n массивных точек определяют однозначно топологический тип ротационного состояния (11) [2, 5]. При этом ротационные состояния (11) подразделяются на «гипоциклоидальные» (при $\theta \neq 0$), «линейные» ($\theta = n_2 = 0$, $v_j \neq 0$) и «центральные» ($\theta = n_2 = 0$, массивная точка покоится в центре вращения) [3, 5].

Приложения ротационных состояний (11) связаны, в частности, с описанием возбуждений элементарных частиц на траекториях Редже: зависимость углового момента состояний (11) от квадрата их энергии хорошо описывает экспериментальные наблюдения для адронов [5, 6, 8].

В связи с описанием с помощью струнных моделей вида (1) такой физической характеристики адронов, как ширина (вероятность распада), особую актуальность приобретает вопрос об устойчивости классических ротационных состояний (11) относительно малых возмущений.

Для анализа устойчивости, в частности, центральных ротационных состояний (11) с $n = 3$ используем метод, разработанный ранее для других струнных моделей [4, 7, 8]. Рассмотрим общее решение уравнения движения (6) струны

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}[\Psi^\mu_{j+}(\tau+\sigma) + \Psi^\mu_{j-}(\tau-\sigma)], \quad \sigma \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j], \tag{15}$$

где $\Psi^\mu_{j\pm}(\xi)$ — гладкие вектор-функции одного аргумента, мировая поверхность (15) является гладкой между мировыми линиями массивных точек.

Мы обозначим $\underline{\Psi}^\mu_{j\pm}$ функции в выражении (15) для центрального ротационного состояния (11). Производные этих функций имеют вид

$$\begin{gathered}
\underline{\dot{\Psi}}^\mu_{1\pm}(\tau) = a_0[e^\mu_0 \pm e^\mu(\tau)], \quad \underline{\dot{\Psi}}^\mu_{3\pm}(\tau) = a_0[e^\mu_0 - S\acute{e}^\mu(\tau) \pm Ce^\mu(\tau)],\\
\underline{\dot{\Psi}}^\mu_{2\pm}(\tau) = a_0[e^\mu_0 + 2v_1c_1\acute{e}^\mu(\tau) \pm (2v_1^2 - 1)e^\mu(\tau)],\\
c_j = \cos\omega\underline{\sigma}_j, \quad s_j = \sin\omega\underline{\sigma}_j, \quad C = \cos 2\pi\omega, \quad S = \sin 2\pi\omega.
\end{gathered}$$

Для описания произвольного малого возмущения, т. е. движения, близкого к ротационному (11), зададим вектор-функции $\Psi^\mu_{j\pm}$, близкие к $\underline{\Psi}^\mu_{j\pm}$, в виде

$$\Psi^\mu_{j\pm}(\tau) = \underline{\Psi}^\mu_{j\pm}(\tau) + \psi^\mu_{j\pm}(\tau), \quad \sigma_j(\tau) = \underline{\sigma}_j + \delta_j(\tau), \quad \tau^*(\tau) = \tau + \delta(\tau). \tag{16}$$

Возмущения $\psi^\mu_{j\pm}$, δ_j, δ считаем малыми, опуская квадратичные по ним слагаемые. В этом случае, подставляя выражения (16) в уравнения (3)—(9), получим линеаризованную систему уравнений относительно $\psi^\mu_{j\pm}$, δ_j, δ:

$$\dot\psi^\mu_{j+}+\dot\psi^\mu_{j-}-\dot\psi^\mu_{j^*+}-\dot\psi^\mu_{j^*-}+2F_j(e^\mu\dot\delta_j+\omega\acute e^\mu\delta_j)=0,$$
$$\dot\psi^\mu_{3+}+\dot\psi^\mu_{3-}-\dot\psi^\mu_{1+}(\tau)-\dot\psi^\mu_{1-}(\tau)+2a_0e^\mu_0\dot\delta=0,$$
$$\frac{d}{d\tau}\{\dot\psi^\mu_{j+}+\dot\psi^\mu_{j-}+F_j(e^\mu\dot\delta_j+\omega\acute e^\mu\delta_j)+G_jg^\mu_j\}=Q_j[\dot\psi^\mu_{j-}-\dot\psi^\mu_{j+}+\dot\psi^\mu_{j^*+}-\dot\psi^\mu_{j^*-}],$$
$$\frac{d}{d\tau}\{\dot\psi^\mu_{1+}(\tau)+\dot\psi^\mu_{1-}(\tau)+[\varphi_{1+}(\tau)-\varphi_{1-}(\tau)]e^\mu_0\}=$$
$$=Q_3[\dot\psi^\mu_{3-}-\dot\psi^\mu_{3+}+\dot\psi^\mu_{1+}(\tau)-\dot\psi^\mu_{1-}(\tau)+2\omega a_0\acute e^\mu\delta].$$

Здесь $j=1,2$, $j^*\equiv j+1$, $\varphi_{j\pm}\equiv(e,\dot\psi_{j\pm})$, $\acute\varphi_{j\pm}\equiv(\acute e,\dot\psi_{j\pm})$, $\dot\psi^\mu_{j\pm}\equiv\dot\psi^\mu_{j\pm}(\tau\pm\sigma_j)$, $\dot\psi^\mu_{j^*\pm}\equiv\dot\psi^\mu_{j^*\pm}(\tau\pm\sigma_j)$, $F_1=2c_1a_0$, $F_2=-2c_3a_0$.

Проекции системы на e_3 или e_k — подсистемы из шести уравнений относительно $\psi^3_{j\pm}\equiv(e_3,\psi_{j\pm})$ или $\psi^k_{j\pm}\equiv(e_k,\psi_{j\pm})$ (здесь $(\pm_j)\equiv(\tau\pm\sigma_j)$):

$$\psi^3_{j+}(+_j)+\psi^3_{j-}(-_j)=\psi^3_{j^*+}(+_j)+\psi^3_{j^*-}(-_j),$$
$$\psi^3_{3+}(+)+\psi^3_{3-}(-)=\psi^3_{1+}(\tau)+\psi^3_{1-}(\tau),$$
$$\dot\psi^3_{j+}(+_j)+\dot\psi^3_{j-}(-_j)=Q_j[\psi^3_{j-}(-_j)-\psi^3_{j+}(+_j)+\psi^3_{j^*+}(+_j)-\psi^3_{j^*-}(-_j)],$$
$$\dot\psi^3_{1+}(\tau)+\dot\psi^3_{1-}(\tau)=Q_3[\psi^3_{3-}(-)-\psi^3_{3+}(+)+\psi^3_{1+}(\tau)-\psi^3_{1-}(\tau)].$$

Ненулевые решения этой системы в виде гармоник

$$\psi^3_{j\pm}=B^3_{j\pm}\exp(-i\xi\tau) \tag{17}$$

существуют только при равенстве нулю определителя соответствующей алгебраической системы из шести уравнений относительно $B^3_{j\pm}$. Это условие сводится к виду

$$2(\cos2\pi\xi-1)-\xi(Q_1^{-1}+Q_2^{-1}+Q_3^{-1})\sin2\pi\xi+$$
$$+\xi^2\left(\frac{\sin^2\pi\xi}{Q_1Q_2}+\frac{\tilde s_3\sin\sigma_2\xi}{Q_2Q_3}+\frac{\tilde s_{23}\sin\sigma_1\xi}{Q_1Q_3}\right)-\frac{\xi^3\tilde s_3\sin\sigma_1\xi\cdot\sin\pi\xi}{Q_1Q_2Q_3}=0, \tag{18}$$

где $\tilde s_3=\sin(\pi-\sigma_1)\xi$, $\tilde s_{23}=\sin(2\pi-\sigma_1)\xi$.

Анализ показывает [8], что при любых значениях $Q_j>0$ параметров (10) все корни уравнения (18) вещественны, поэтому амплитуды поперечных малых возмущений (17) не растут со временем.

Иначе ведут себя малые возмущения в плоскости вращения. Умножая скалярно шесть линеаризованных уравнений системы на три вектора e_0, $e(\tau)$, $\acute e(\tau)$, получим систему из пятнадцати линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом относительно пятнадцати неизвестных функций $(\psi_{j\pm},e)$, $(\psi_{j\pm},\acute e)$ $(j=1,2,3)$, δ_1, δ_2, δ [8]. Условие существования нетривиальных решений вида (17) этой системы сводится к уравнению, которое имеет комплексные корни $\xi=\xi_1+i\xi_2$ с положительной мнимой частью ξ_2, если центральная масса m_3 не превосходит критического значения

$$m_3<m_{3cr}=E-m_3\equiv2\pi\gamma a_0\left(1-a_0^{-2}\sum_{k>3}b_k^2\right)+\sum_{j=1}^{2}\frac{m_j}{\sqrt{1-v_j^2}}. \tag{19}$$

При этом условии, означающем, что центральная масса меньше энергии струны с остальными массами, амплитуда соответствующего возмущения будет расти экспоненциально:

$$\psi_j = B_j \exp(-i\xi_1\tau) \cdot \exp(\xi_2\tau).$$

Следовательно, в случае (19) исследуемое центральное ротационное состояние неустойчиво, что приводит к определённым физическим последствиям в виде дополнительной ширины адрона [8].

Литература

[1] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. — М.: Мир, 1990.

[2] Миловидов А. Е., Шаров Г. С. Замкнутые релятивистские струны в пространствах с нетривиальной геометрией // Теор. и матем. физ. — 2005. — Т. 142, № 1. — С. 72—82.

[3] Миловидов А. Е., Шаров Г. С. Классификация ротационных состояний замкнутой струны с массивными точками // Вестн. ТвГУ. Сер. Прикл. мат. — 2007. — Т. 27 (55), вып. 7. — С. 131—138.

[4] Шаров Г. С. Возмущённые состояния вращающейся релятивистской струны // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 140, № 2. — С. 256—268.

[5] Шаров Г. С. Струнные модели глюбола, ротационные состояния и траектории Редже // Ядерн. физ. — 2008. — Т. 71, № 3. — С. 598—605.

[6] Sharov G. S. String baryonic model «triangle»: Hypocycloidal solutions and the Regge trajectories // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol. 58, no. 11. — P. 114009.

[7] Sharov G. S. Quasirotational motions and stability problem in dynamics of string hadron models // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 62, no. 9. — P. 094015.

[8] Sharov G. S. Unstable rotational states of string models and width of a hadron // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol. 79, no. 11. — P. 114025.