Об одном классе три-тканей с частично-симметричным тензором кривизны

М. А. ШЕСТАКОВА
Тверской государственный университет
e-mail: shest_margo@mail.ru

УДК 514.763.7

Ключевые слова: шестиугольная три-ткань, тензор кривизны.

Аннотация

Проведена классификация шестимерных тканей H_s по типу ассоциированной алгебры Ли. Рассмотрено два подхода к исследованию геометрии нетривиальных классов тканей H_s.

Abstract

M. A. Shestakova, On one class of three-webs with partially symmetric curvature tensor, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 1, pp. 179—188.

A classification of six-dimensional webs H_s by type of the associated Lie algebra is carried out. Two approaches to the investigation of geometry of nontrivial class of webs H_s are considered.

В большинстве работ, посвящённых геометрическим и алгебраическим аспектам теории тканей, рассматриваются специальные классы тканей. Каждый класс тканей характеризуется прежде всего особым типом канонически присоединённой аффинной связности Черна. В настоящей работе рассматриваются шестиугольные три-ткани с постулируемой заранее частичной симметрией тензора кривизны связности Черна — класс тканей, достаточно близкий по своим свойствам к групповым тканям, определяемым группами Ли. Многомерные шестиугольные ткани (ткани H) впервые были рассмотрены в [8]. В [4] доказано, что G-структура, определяемая тканью H, является замкнутой, а многомерные ткани H минимальной размерности, т. е. четырёхмерные, являются алгебраизуемыми [2].

1. Пусть три-ткань $W(3,r)$, заданная на аналитическом многообразии M размерности $2r$, образована тремя гладкими слоениями λ_α $(\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3)$ коразмерности r, находящимися в общем положении. Каждое слоение λ_α задаётся на M вполне интегрируемой системой форм Пфаффа $\underset{\alpha}{\omega}^i$, где $i,j,k = 1,\dots,r$. Уравнения структуры три-ткани имеют вид [1]

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{1}$$

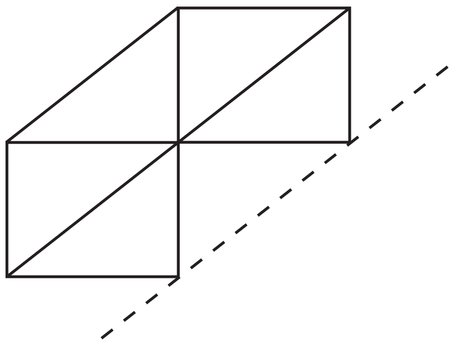
$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \tag{2}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 1, с. 179—188.

Величины a^i_{jk} образуют кососимметричный по нижним индексам тензор, называемый тензором кручения ткани $W(3,r)$, а величины b^i_{jkl} образуют тензор, который называется тензором кривизны ткани $W(3,2,r)$. Тензоры кручения и кривизны три-ткани $W(3,2,r)$ связаны конечными и дифференциальными соотношениями, получающимися при дифференцировании уравнений (1) и (2):

$$\begin{aligned} b^i_{[jkl]} &= 2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]}, \\ \nabla a^i_{jk} &= b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega}^l, \\ \nabla b^i_{jkl} &= \bar{C}^i_{jklm}\underset{1}{\omega}^m + \tilde{C}^i_{jklm}\underset{2}{\omega}^m. \end{aligned}$$

Здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в связности Γ, структурные уравнения которой есть уравнения (1), (2).



Три-ткань W называется шестиугольной, если на ней замыкаются шестиугольные конфигурации, изображенные на рисунке. Каждому условию замыкания конфигураций на ткани W соответствует выполнение вполне определённого алгебраического тождества в координатных лупах этой ткани. С этой точки зрения шестиугольные ткани — это такие ткани, все координатные лупы которых моноассоциативны.

Алгебраическая характеристика тканей H состоит в следующем. Их координатные лупы допускают максимальное количество однопараметрических подлуп, которые являются группами. Согласно [1] ткани H характеризуются тензорным равенством

$$b^i_{(jkl)} = 0.$$

2. Рассмотрим шестиугольные три-ткани, у которых тензор кривизны симметричен по последним двум нижним индексам, т. е. удовлетворяет условию

$$b^i_{j[kl]} = 0.$$

Обозначим такие ткани H_s.

Отметим наиболее интересные из найденных в [5] конечных соотношений, связывающих тензоры кручения и кривизны ткани H_s:

$$a^m_{[jk}a^i_{|m|l]} = 0, \tag{3}$$

$$b^i_{jkl} = \frac{2}{3}\big(b^i_{[jk]l} + b^i_{[jl]k}\big). \tag{4}$$

Соотношение (3) — тождество Якоби для алгебры с умножением $[xy]^i = a^i_{jk}x^jy^k$. Следовательно, локальные алгебры ткани H_s являются алгебрами Ли относительно бинарной операции, определяемой тензором кручения этой три-ткани. Из (4) видно, что тензор кривизны ткани H_s вполне определяется своей кососимметричной компонентой $b^i_{[jk]l}$.

Тензоры $\bar{C}^i_{jklm}$, $\tilde{C}^i_{jklm}$ связаны соотношениями

$$\bar{C}^i_{jklm} = -\tilde{C}^i_{jklm} = \frac{2}{3}\big(b^i_{jpl}a^p_{km} - b^i_{jpk}a^p_{ml} + 2b^i_{kpm}a^p_{lj} + b^i_{kpj}a^p_{ml} - \\ - b^i_{lpj}a^p_{mk} - 2b^i_{lpk}a^p_{jm} - b^i_{mpk}a^p_{jl} + b^i_{mpl}a^p_{kj}\big).$$

Последнее означает, что тензоры $\bar{C}^i_{jklm}$, $\tilde{C}^i_{jklm}$ ткани H_s выражаются только через тензоры кручения и кривизны три-ткани. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *G-структура ткани H_s является замкнутой структурой третьего порядка в смысле М. Акивиса.*

Это утверждение дополняет более общий результат, полученный в 1986 году А. М. Шелеховым: G-структура шестиугольных тканей является замкнутой структурой четвёртого порядка.

3. Пусть рассматриваемая ткань H_s является шестимерной, т. е. $r = 3$, $i, j, k = 1, 2, 3$. В этом случае любой кососимметричный тензор t_{kl} с помощью относительного дискриминантного тензора ε_{ijk} может быть заменён тензором валентности на единицу меньше:

$$t_{kl} = \varepsilon_{klm}t^m.$$

Поэтому тензор кручения и тензор кривизны шестимерной три-ткани H_s можно представить следующим образом:

$$a^i_{kl} = \varepsilon_{klm}a^{im},$$

$$b^i_{jkl} = \frac{2}{3}(\varepsilon_{jkm}b^{im}_l + \varepsilon_{jlm}b^{im}_k),$$

где a^{ij} и b^{im}_k — некоторые относительные тензоры. В результате структурные уравнения (1) и (2) ткани H_s принимают следующий вид:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + \varepsilon_{jkm}a^{im}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - \varepsilon_{jkm}a^{im}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{5}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \frac{2}{3}(\varepsilon_{jkm}b^{im}_l + \varepsilon_{jlm}b^{im}_k)\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \tag{6}$$

$$\nabla a^{ij} = b^{ij}_m(\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{\omega}^m) + a^{ij}\omega^m_m, \tag{7}$$

$$\nabla b_l^{im} = \frac{2}{3}(b_l^{im}a^{pr}\varepsilon_{pqr} + b_l^{ip}a^{mr}\varepsilon_{qpr} + b_p^{im}a^{pr}\varepsilon_{lqr} + b_l^{ir}a^{pm}\varepsilon_{pqr} + \\ + b_p^{ik}\delta_l^m a^{pr}\varepsilon_{qkr} + b_q^{ir}a^{pm}\varepsilon_{plr})(\underset{1}{\omega}^q - \underset{2}{\omega}^q) + b_l^{im}\omega_p^p. \tag{8}$$

Тензор a^{ij} имеет $r^2 = 9$ компонент, столько же, сколько форм ω_i^j, поэтому, вообще говоря, за счёт выбора репера можно величины a^{ij} сделать постоянными на всем многообразии ткани. Такой репер определяется уравнениями

$$a^{ik}\omega_k^j + a^{kj}\omega_k^i - a^{ij}\omega_m^m = b_m^{ij}(\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{\omega}^m).$$

В этом репере величины a^{ij}, а значит, и тензор кручения a_{jk}^i будут постоянными. Тензор кручения, как отмечено выше, удовлетворяет тождеству Якоби. Следовательно, локальные W-алгебры рассматриваемых три-тканей являются алгебрами Ли. Это позволило связать классификацию рассматриваемых шестимерных три-тканей H_s с классификацией вещественных трёхмерных алгебр Ли.

Как известно, существуют всего четыре (неэквивалентные) разрешимые и две (неэквивалентные) неразрешимые трёхмерные вещественные алгебры Ли. Их уравнения в некотором репере могут быть записаны следующим образом [3]:

$$\begin{aligned}
&1)\quad [e_1,e_2]=0, \quad [e_1,e_3]=0, \quad [e_2,e_3]=0,\\
&2)\quad [e_1,e_2]=0, \quad [e_1,e_3]=0, \quad [e_2,e_3]=e_1,\\
&3)\quad [e_1,e_2]=0, \quad [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=qe_2 \quad (q\in R),\\
&4)\quad [e_1,e_2]=0, \quad [e_1,e_3]=e_2, \quad [e_2,e_3]=-e_1+qe_2 \quad (q\in[0,2])
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&1)\quad [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_2,e_3]=e_1, \quad [e_3,e_1]=e_2,\\
&2)\quad [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_2,e_3]=-e_1, \quad [e_3,e_1]=e_2
\end{aligned}$$

соответственно.

Рассмотрим шесть типов тканей, соответствующих этим алгебрам Ли. В случае коммутативной алгебры Ли получаем, что ткань является параллелизуемой.

Второму типу соответствует неабелева алгебра Ли с одномерным коммутантом. Соответствующая этой алгебре ткань (ткань H_s^1) определяется следующей замкнутой системой внешних уравнений [6]:

$$H_s^1\colon\quad \begin{cases}
d\underset{1}{\omega}^1 = 3\underset{1}{\omega}^1\wedge\omega_2^2 + \underset{1}{\omega}^2\wedge\omega_2^1 + \underset{1}{\omega}^3\wedge\omega_3^1 + 2\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{1}{\omega}^3,\\
d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^2\wedge\omega_2^2, \quad d\underset{1}{\omega}^3 = \underset{1}{\omega}^3\wedge\omega_2^2,\\
d\underset{2}{\omega}^1 = 3\underset{2}{\omega}^1\wedge\omega_2^2 + \underset{2}{\omega}^2\wedge\omega_2^1 + \underset{2}{\omega}^3\wedge\omega_3^1 - 2\underset{2}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^3,\\
d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^2\wedge\omega_2^2, \quad d\underset{2}{\omega}^3 = \underset{2}{\omega}^3\wedge\omega_2^2,\\
d\omega_2^1 = 2\omega_2^1\wedge\omega_2^2 + \dfrac{2}{3}\big(\underset{1}{\omega}^3\wedge\underset{2}{\omega}^2 + \underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^3\big),\\
d\omega_3^1 = 2\omega_3^1\wedge\omega_2^2 - \dfrac{4}{3}\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^2,
\end{cases} \tag{9}$$

где форма ω_2^2 даётся равенством

$$\omega_2^2 = \underset{1}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2.$$

Проинтегрировав эту систему, найдём конечные уравнения ткани:

$$\begin{aligned} z^1 &= u^1 + v^1 + (u^2 + v^2)(u^3 v^2 - u^2 v^3), \\ z^2 &= u^2 + v^2, \\ z^3 &= u^3 + v^3. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь u^i и v^i — некоторые локальные координаты. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Существует единственная негрупповая шестимерная шестиугольная три-ткань H_s^1 с частично-симметричным тензором кривизны, локальная алгебра Ли которой неабелева с одномерным коммутантом. В некоторых локальных координатах конечные уравнения такой ткани имеют вид* (10).

Многообразие ткани H_s^1 представляет собой однородные пространства с весьма сложной структурой. Структурные уравнения (7) определяют G-структуру, ассоциированную с три-тканью H_s^1 на 8-мерном многообразии R адаптированных реперов этой ткани. Система (7) содержит, помимо форм, только постоянные коэффициенты и замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Поэтому она представляет собой уравнения Маурера—Картана некоторой 8-мерной группы Ли G_1 с инвариантными формами

$$\underset{1}{\omega}^1, \quad \underset{1}{\omega}^2, \quad \underset{1}{\omega}^3, \quad \underset{2}{\omega}^1, \quad \underset{2}{\omega}^2, \quad \underset{2}{\omega}^3, \quad \omega_2^1, \quad \omega_3^1.$$

Системы

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad i = \overline{1,3},$$

определяют на G_1 три пятимерные подгруппы G_1^α $(\alpha = 1, 2, 3)$, пересекающиеся по двумерной подгруппе H_1, уравнения которой имеют вид

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая три-ткань H_s^1 реализуется на 6-мерном однородном пространстве $M = G_1/H_1$. Стационарная подгруппа H_1, как видно из уравнений (9), является двумерной абелевой подгруппой группы G_1. Слоения ткани — фактор-множества gG_1^α/gH_1, где gG_1^α, gH_1, как обычно, обозначают левые смежные классы.

Третьему типу соответствует неабелева алгебра Ли, коммутант которой является идеалом. Соответствующая этой алгебре ткань (ткань H_s^2) определяется следующей замкнутой системой внешних уравнений [11]:

$$
H_s^2\colon\quad \begin{cases} d\underset{1}{\omega}^1 = -\underset{1}{\omega}^1\wedge\underset{1}{\omega}^3 + \underset{1}{\omega}^1\wedge\underset{2}{\omega}^3 - \dfrac{2}{3}a\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^2 - \dfrac{2}{3}b\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{1}{\omega}^3 - \\ \qquad - \dfrac{2}{3}b\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^3 + \underset{1}{\omega}^3\wedge\omega_3^1 + 2\underset{1}{\omega}^1\wedge\underset{1}{\omega}^3, \\ d\underset{1}{\omega}^2 = -\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{1}{\omega}^3, \quad d\underset{1}{\omega}^3 = 0, \\ d\underset{2}{\omega}^1 = -\underset{2}{\omega}^1\wedge\underset{1}{\omega}^3 + \underset{2}{\omega}^1\wedge\underset{2}{\omega}^3 + \dfrac{2}{3}a\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^2 + \dfrac{2}{3}b\underset{1}{\omega}^3\wedge\underset{2}{\omega}^2 - \\ \qquad - \dfrac{2}{3}b\underset{2}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^3 + \underset{2}{\omega}^3\wedge\omega_3^1 - 2\underset{2}{\omega}^1\wedge\underset{2}{\omega}^3, \\ d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^3, \quad d\underset{2}{\omega}^3 = 0, \\ d\omega_3^1 = \underset{1}{\omega}^3\wedge\omega_3^1 - \underset{2}{\omega}^3\wedge\omega_3^1 - \dfrac{2}{3}\Big(2a\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^2 + b\big(\underset{1}{\omega}^2\wedge\underset{2}{\omega}^3 + \underset{1}{\omega}^3\wedge\underset{2}{\omega}^2\big)\Big). \end{cases} \tag{11}
$$

Проинтегрировав эту систему, найдём конечные уравнения ткани:

$$
\begin{aligned} z^1 &= u^1e^{-v^3} + v^1e^{u^3} - 2ae^{u^3}u^2v^2 - 2be^{u^3}(u^2+v^2) + 2be^{-v^3+u^3}u^2 + 2bv^2, \\ z^2 &= u^2 + v^2e^{-u^3}, \\ z^3 &= u^3 + v^3. \end{aligned} \tag{12}
$$

Здесь u^i и v^i — некоторые локальные координаты. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Существует единственная негрупповая шестимерная шестиугольная три-ткань H_s^2 с частично-симметричным тензором кривизны, локальная алгебра Ли которой неабелева с двумерным коммутантом. В некоторых локальных координатах конечные уравнения такой ткани имеют вид* (12).

Ткань H_s^2 реализуется на однородном пространстве $M = G_2/H_2$, где G_2 — семимерная группа Ли с инвариантными формами

$$\underset{1}{\omega}^1,\ \underset{1}{\omega}^2,\ \underset{1}{\omega}^3,\ \underset{2}{\omega}^1,\ \underset{2}{\omega}^2,\ \underset{2}{\omega}^3,\ \omega_3^1.$$

Стационарная подгруппа H_2 является одномерной абелевой подгруппой группы G_2 и выделяется из G_2 вполне интегрируемой подсистемой

$$\underset{1}{\omega}^i = 0,\ \underset{2}{\omega}^i = 0,\quad i = \overline{1,3}.$$

Четвёртому типу соответствует неабелева алгебра Ли с двумерным коммутантом, базис которой выбран так, что структурный тензор имеет три существенных компоненты

$$a_{13}^2 = 1,\ \ a_{23}^1 = -1,\ \ a_{23}^2 = q,\quad q\in[0;2].$$

Замыкая систему структурных уравнений (5), (6), получим, что все компоненты тензора b_k^{ij}, а следовательно и тензора кривизны b_{jkl}^i, равны нулю и соответствующая три-ткань H_s является групповой. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Негрупповых шестимерных шестиугольных три-тканей H_s, соответствующих разрешимой алгебре Ли четвёртого типа, не существует.*

Рассмотрим три-ткани, которым соответствует неразрешимая вещественная алгебра Ли с трёхмерным коммутантом типа пять и шесть. Найдя для каждой алгебры ненулевые компоненты тензора a^{ij} и воспользовавшись выражением для ковариантного дифференциала тензора b_l^{im}, получим, что все компоненты тензора b_k^{ij} равны нулю. Это означает, что и все компоненты тензора кривизны b^i_{jkl} равны нулю, а рассматриваемая три-ткань является групповой. Итак справедлива следующая теорема.

Теорема. *Негрупповых шестимерных шестиугольных три-тканей H_s, соответствующих неразрешимой алгебре Ли, не существует.*

4. На примере нетривиальных шестимерных шестиугольных три-тканей (H_s^1 и H_s^2) рассмотрим два различных подхода к изучению свойств три-тканей.

а) Опишем действие группы автоморфизмов G_1 ткани H_s^1 на слоениях ткани. В некоторых локальных координатах его можно записать следующим образом [11]:

$$\begin{aligned}
x^1 &= (a)^3\bar{x}^1 + \alpha_2\bar{x}^2 + \alpha_3\bar{x}^3 + \alpha_{23}\bar{x}^2\bar{x}^3 + \alpha_{22}(\bar{x}^2)^2 + \alpha,\\
x^2 &= a\overline{x}^2 + b,\\
x^3 &= a\overline{x}^3 + b^3_1,\\
y^1 &= (a)^3\bar{y}^1 + \beta_2\bar{y}^2 + \beta_3\bar{y}^3 + \beta_{23}\bar{y}^2\bar{y}^3 + \beta_{22}(\bar{y}^2)^2 + \beta,\\
y^2 &= a\bar{x}^2 - b,\\
y^3 &= a\bar{y}^3 + b^3_2,\\
z^1 &= (a)^3\bar{z}^1 + \gamma_2\bar{z}^2 + \gamma_3\bar{z}^3 + \gamma_{23}\bar{z}^2\bar{z}^3 + \gamma_{22}(\bar{z}^2)^2 + \gamma,\\
z^2 &= a\bar{z}^2,\\
z^3 &= a\bar{z}^3 + \bar{b}.
\end{aligned}$$

Здесь x^i, y^i, z^i — параметры на базах слоений ткани. Как видно из этих уравнений, на всех слоениях группа G_1 действует транзитивно. Под действием группы G_1 слоения ткани переходят в слоения ткани. Следовательно, группа G_1 является группой автоморфизмов ткани H_s^1. Так как переменные $\bar{x}^i$, $\bar{y}^i$, $\bar{z}^i$ под действием группы преобразуются соответственно в переменные x^i, y^i, z^i, то каждое слоение ткани представляет собой трёхмерное однородное пространство, на котором действует группа G_1.

б) Охарактеризуем однородное пространство ткани H_s^2 в терминах соответствующей семимерной алгебры Ли [9].

Введя обозначения

$$\theta^1 = \underset{1}{\omega}^1,\quad \theta^2 = \underset{1}{\omega}^2,\quad \theta^3 = \underset{1}{\omega}^3,\quad \theta^4 = \underset{2}{\omega}^1,\quad \theta^5 = \underset{2}{\omega}^2,\quad \theta^6 = \underset{2}{\omega}^3,\quad \theta^7 = \omega^1_3$$

для инвариантных форм группы G_2, структурные уравнения (11) запишем в более удобном виде:

$$
\begin{aligned}
&d\theta^1 = \theta^1\wedge\theta^3 + \theta^1\wedge\theta^6 - \frac{2a}{3}\theta^2\wedge\theta^5 - \frac{2b}{3}\theta^2\wedge\theta^3 - \frac{2b}{3}\theta^2\wedge\theta^6 + \theta^3\wedge\theta^7,\\
&d\theta^2 = -\theta^2\wedge\theta^3, \quad d\theta^3 = 0, \quad d\theta^5 = \theta^5\wedge\theta^6, \quad d\theta^6 = 0,\\
&d\theta^4 = -\theta^4\wedge\theta^3 - \theta^4\wedge\theta^6 - \frac{2a}{3}\theta^5\wedge\theta^2 - \frac{2b}{3}\theta^5\wedge\theta^3 - \frac{2b}{3}\theta^5\wedge\theta^6 + \theta^5\wedge\theta^7,\\
&d\theta^7 = -\theta^7\wedge\theta^3 + \theta^7\wedge\theta^6 + \frac{4}{3}a\theta^2\wedge\theta^5 + \frac{2}{3}b\theta^2\wedge\theta^6 - \frac{2}{3}b\theta^3\wedge\theta^5.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Соответствующую этой группе алгебру обозначим $\tilde{A}$. Из уравнений (13) вытекает следующее предложение.

Предложение. *Ненулевые существенные структурные константы алгебры $\tilde{A}$, соответствующей группе G_2, удовлетворяют соотношениям*

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4}{3}a = c^1_{25} = -c^4_{25} = \frac{1}{2}c^7_{25} = -\frac{2}{3}ac^1_{37} = \frac{a}{b}c^1_{26} = -\frac{2}{3}ac^4_{34} = \frac{a}{b}c^7_{35},\\
&c^1_{23} = c^4_{56} = c^1_{26} = -c^4_{35}, \quad c^1_{37} = c^4_{67}, \quad c^7_{35} = c^7_{26},\\
&c^4_{34} = c^7_{37} = c^1_{13} = c^1_{16} = -c^7_{67} = -c^4_{46} = c^5_{56} = -c^2_{23}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Пользуясь уравнениями (14), несложно установить, что алгебра $\tilde{A}$ является разрешимой, но не нильпотентной, обладает коммутативными подалгебрами размерности не выше 4 и рядом других свойств. Её производные алгебры обладают следующими свойствами:

1) $\dim[\tilde{A},\tilde{A}] = \dim\tilde{A}' = 5$;
2) $\dim\tilde{A}'' = 1$;
3) $\dim[\tilde{A}',\tilde{A}''] = 0$.

Укажем некоторые достаточные условия, характеризующие алгебру $\tilde{A}$.

Предложение. *Предположим, что A — произвольная антикоммутативная семимерная алгебра (не обязательно лиева), e_i — некоторый базис алгебры A, c^i_{jk} — её структурный тензор, удовлетворяющая следующим условиям 1—12. Тогда A изоморфна $\tilde{A}$.*

1. $\dim[A,A] = \dim A' = 5$.
2. $\dim A'' = 1$.
3. $\dim[A',A''] = 0$.
4. *В A есть три четырёхмерные подалгебры B_p, $p = 1,2,3$, такие что*

   а) $\dim\bigcap\limits_{p=1}^{3} B_p = 1$, $l = \bigcap\limits_{p=1}^{3} B_p \subset A'$;

   б) $\dim\bar{B}_p = 3$, $\bar{B}_p = B_p\cap A'$, $p = \overline{1,3}$;

   в) $\dim B_\alpha\cap A'' = 0$, $\alpha = 1,2$, $A''\subset B_3$;

   г) $\dim B'_3 = 2$, $l\not\subset B'_3$, $A''\subset B'_3$.

5. *Положим*

$$F_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} [B_1, B_3'], \quad F_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} [B_2, B_3'], \quad F_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} [B_1, B_2],$$

где B_3' — *производная подалгебра алгебры* B_3. *Тогда* $\dim F_p' = 3$, $\pi \subset F_p \subset A'$, $p = \overline{1,3}$. (*Здесь и далее* $\pi = [l_7, l_1 - l_4]$, $\pi_1 = [l_1, l_7]$, $\pi_2 = [l_2, l_7]$, $\pi_4 = [l_4, l_7]$, $\pi_5 = [l_5, l_7]$ — *инвариантные плоскости.*)

6. $\dim F_\alpha \cap \bar{B}_\alpha = 2$, $\alpha = 1, 2$.
7. F_3 — *трансверсаль для пространств* $\bar{B}_p$.
8. *Линейная оболочка пространств* $F_1 \cap \bar{B}_1$ *и* $F_2 \cap \bar{B}_2$ *является трёхмерной трансверсалью для пространств* $\bar{B}_p$ *и пересекает* B_3' *по одномерному подпространству.*
9. *Существует двумерное пространство* C, *дополнительное к* A', *такое что*
   а) C *является коммутативной подалгеброй в* A;
   б) *линейная оболочка* l *и* C — *трансверсаль для пространств* B_p, $p = 1, 2, 3$.
10. *Существуют две четырёхмерные подалгебры* B_4 *и* B_5 *со следующими свойствами*:
   а) $B_4 \cap B_5 = B_4' \cap B_5'$, $\dim B_4 \cap B_5 = 2$, $\dim B_4' = \dim B_5' = 3$;
   б) *пространство* $B_4' \cap B_5'$ *пересекает каждое из подпространств* π_1, π_4 *и* π *по одномерному подпространству*;
   в) $\dim \pi_2 \cap B_4' = 1$, $\dim \pi_5 \cap B_5' = 1$;
   г) $\dim C \cap B_\beta = 1$, $\beta = 4, 5$, $C \cap B_4 \cap B_5 = \varnothing$.
11. *Одномерная подалгебра* $C \cap B_3 =: W$ *обладает следующими свойствами*:
   а) $\dim[W, B_4] = \dim[W, B_5] = 1$;
   б) *линейная оболочка подпространств* $[W, B_4]$ *и* $[W, B_5]$ *пересекает* B_3';
   в) $[W, B_4] \subset \pi_2 \subset B_1$, $[W, B_5] \subset \pi_5 \subset B_2$.
12. *Существует ещё две двумерные коммутативные подалгебры* D_4 *и* D_5 *со следующими свойствами*:
   а) $D_5 \cap B_2 \equiv [W, B_5]$, $D_4 \cap B_1 \equiv [W, B_4]$;
   б) *подалгебра* D_4 *пересекает линейную оболочку пространств* $\pi_5 \cap B_5'$ *и* $C \cap B_2$, *а подалгебра* D_5 *пересекает линейную оболочку пространств* $\pi_2 \cap B_4'$ *и* $C \cap B_1$;
   в) *линейная оболочка подалгебр* D_4 *и* D_5 *пересекает подпространство* $C \cap B_3$.

Замечание. Найденные условия являются достаточными, но необязательно необходимыми, так как мы не использовали условие, что алгебра A является лиевой.

Литература

[1] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1969. — Т. 2. — С. 7—31.

[2] Боцу В. П. Об изоклинности четырёхмерных шестиугольных три-тканей. — 1984. — Деп. в ВИНИТИ 14.08.84; № 5824-84.

[3] Егоров И. П. Геометрия. — М.: Просвещение, 1979.

[4] Шелехов А. М. О дифференциально-геометрических объектах высших порядков многомерной три-ткани // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1987. — Т. 19. — С. 101—154.

[5] Шестакова М. А. Структурные уравнения шестимерной шестиугольной три-ткани // Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1988. — С. 140—145.

[6] Шестакова М. А. Пример шестиугольной три-ткани с частично симметричным тензором кривизны // Ткани и квазигруппы. — Калинин: КГУ, 1990. — С. 22—29.

[7] Akivis M. A., Shelekhov A. M. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.

[8] Chern S. S. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in $\mathbf{R}_{2r}$ // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1936. — Vol. 11, no. 1-2. — P. 333—358.

[9] Shestakova M. A. Characterization of some hexagonal 3-web in terms of associated Lie algebras // Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 1996-1997. — P. 133—141.

[10] Shestakova M. A. On geometry of a six-dimensional hexagonal three-web H_s^1 // Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 2002. — P. 106—117.

[11] Shestakova M. A. On theory of six-dimensional hexagonal three-webs // Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 2003. — P. 56—62.