# Тензор неабсолютных перенесений на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей

**О. О. БЕЛОВА**
*Российский государственный университет им. И. Канта*
e-mail: olgaobelova@mail.ru

УДК 514.75

**Ключевые слова:** проективное пространство, грассманоподобное многообразие, центрированная плоскость, фундаментальный объект первого порядка, главное расслоение, объект групповой связности, объект кривизны, тензор неабсолютных перенесений, нормализация Нордена.

**Аннотация**

Для грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей в проективном пространстве построен объект, являющийся тензором неабсолютных перенесений. При обращении этого тензора в нуль параллельные перенесения оснащающих плоскостей являются абсолютными.

**Abstract**

*O. O. Belova, Tensor of nonabsolute displacements on Grassman-like manifold of centered planes*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 3—5.

For the Grassman-like manifold of centered planes in a projective space, we construct an object, which is the tensor of nonabsolute displacements. If this tensor vanishes, then parallel displacements of clothing planes are absolute.

Отнесём $n$-мерное проективное пространство $P_n$ к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

причём формы Пфаффа $\omega^I$, $\omega_J^I$, $\omega_I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $\mathrm{GP}(n)$:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J.$$

В пространстве $P_n$ исследуется грассманоподобное многообразие $\mathrm{Gr}^*(m, n)$ центрированных плоскостей размерности $m$, которое задаётся уравнениями [1]

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha \quad (a, \ldots = \overline{1, m};\ \alpha, \ldots = \overline{m+1, n}),$$

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2010, том 16, № 2, с. 3—5.

причём компоненты фундаментального объекта первого порядка $\Lambda = \{\Lambda^a_\alpha,\, \Lambda^{ab}_\alpha\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha\omega_b + \omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b, \quad \Delta\Lambda^{ab}_\alpha = \bar\Lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta + \Lambda^{abc}_{\alpha\beta}\omega^\beta_c.$$

Над многообразием $\mathrm{Gr}^*(m,n)$ возникает главное расслоение $G^*\big(\mathrm{Gr}^*(m,n)\big)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности $G^*$ центрированной плоскости $L^*_m$. В главном расслоении задаётся связность по Г. Ф. Лаптеву [3] с помощью объекта связности

$$\Gamma = \{\Gamma^a_{b\alpha},\, L^{ac}_{b\alpha},\, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma},\, L^{\alpha a}_{\beta\gamma},\, \Gamma^a_{\alpha\beta},\, L^{ab}_{\alpha\beta},\, L_{a\alpha},\, \Pi^b_{a\alpha},\, L_{\alpha\beta},\, \Pi^a_{\alpha\beta}\}.$$

Осуществлён аналог сильной нормализации Нордена [4] данного многообразия, состоящий из полей плоскостей

$$C_{n-m-1}\colon L^*_m \cap C_{n-m-1} = \varnothing, \quad N_{m-1}\colon A \notin N_{m-1} \subset L^*_m,$$

определяемых оснащающим квазитензором $\lambda = \{\lambda_a,\, \lambda^a_\alpha,\, \lambda_\alpha\}$ (см. [1]). Найдены ковариантные производные и ковариантные дифференциалы компонент оснащающего квазитензора $\lambda$ относительно групповой связности $\Gamma$.

Внешние дифференциалы от компонент ковариантного дифференциала квазитензора $\lambda$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&D\nabla\lambda_a = -\nabla\lambda_b \wedge \tilde\omega^b_a + T_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + T^b_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta_b + T^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\alpha_b \wedge \omega^\beta_c,\\
&D\nabla\lambda^a_\alpha = \nabla\lambda^b_\alpha \wedge \tilde\omega^a_b - \nabla\lambda^a_\beta \wedge \tilde\omega^\beta_\alpha + T^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + T^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_b + T^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_b \wedge \omega^\gamma_c,\\
&D\nabla\lambda_\alpha = \nabla\lambda^a_\alpha \wedge \tilde\omega_a - \nabla\lambda_\beta \wedge \tilde\omega^\beta_\alpha + T_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \bar T^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + \bar T^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta_a \wedge \omega^\gamma_b,
\end{aligned}$$

где коэффициенты при внешних произведениях базисных форм образуют объект

$$T = \{T_{a\alpha\beta},\, T^b_{a\alpha\beta},\, T^{bc}_{a\alpha\beta},\, T^a_{\alpha\beta\gamma},\, T^{ab}_{\alpha\beta\gamma},\, T^{abc}_{\alpha\beta\gamma},\, T_{\alpha\beta\gamma},\, \bar T^a_{\alpha\beta\gamma},\, \bar T^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\},$$

компоненты которого линейно выражаются (см. [2]) через компоненты объекта кривизны

$$\begin{aligned}
R = \{R^a_{b\alpha\beta},\, R^{ac}_{b\alpha\beta},\, R^{acd}_{b\alpha\beta},\, R_{a\alpha\beta},\, K^b_{a\alpha\beta},\, K^{bc}_{a\alpha\beta},\, R^\alpha_{\beta\gamma\mu},\, R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu},\, R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu},&\\
R^a_{\alpha\beta\gamma},\, R^{ab}_{\alpha\beta\gamma},\, R^{abc}_{\alpha\beta\gamma},\, R_{\alpha\beta\gamma},\, K^a_{\alpha\beta\gamma},\, K^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\}&
\end{aligned}$$

групповой связности $\Gamma$:

$$\begin{aligned}
&T_{a\alpha\beta} = R_{a\alpha\beta} - \lambda_b R^b_{a\alpha\beta}, \quad T^b_{a\alpha\beta} = K^b_{a\alpha\beta} - \lambda_c R^{cb}_{a\alpha\beta},\\
&T^{bc}_{a\alpha\beta} = K^{bc}_{a\alpha\beta} - \lambda_d R^{dbc}_{a\alpha\beta}, \quad T^a_{\alpha\beta\gamma} = R^a_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^b_\alpha R^a_{b\beta\gamma} - \lambda^a_\mu R^\mu_{\alpha\beta\gamma},\\
&T^{ab}_{\alpha\beta\gamma} = R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^c_\alpha R^{ab}_{c\beta\gamma} - \lambda^a_\mu R^{\mu b}_{\alpha\beta\gamma}, \quad T^{abc}_{\alpha\beta\gamma} = R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^d_\alpha R^{abc}_{d\beta\gamma} - \lambda^a_\mu R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma},\\
&T_{\alpha\beta\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^a_\alpha R_{a\beta\gamma} - \lambda_\mu R^\mu_{\alpha\beta\gamma}, \quad \bar T^a_{\alpha\beta\gamma} = K^a_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^b_\alpha K^a_{b\beta\gamma} - \lambda_\mu R^{\mu a}_{\alpha\beta\gamma},\\
&\bar T^{ab}_{\alpha\beta\gamma} = K^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \lambda^c_\alpha K^{ab}_{c\beta\gamma} - \lambda_\mu R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned}$$

Для компонент объекта $T$ найдены сравнения по модулю базисных форм $\omega^\alpha$, $\omega_b^\alpha$:

$$\Delta T_{a\alpha\beta} + T^b_{a[\alpha\beta]}\omega_b \equiv 0, \quad \Delta T^b_{a\alpha\beta} + 2T^{bc}_{a\beta\alpha}\omega_c \equiv 0, \quad \Delta T^{bc}_{a\alpha\beta} \equiv 0,$$
$$\Delta T^a_{\alpha\beta\gamma} + T^{ab}_{\alpha[\beta\gamma]}\omega_b \equiv 0, \quad \Delta T^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + 2T^{acb}_{\alpha\beta\gamma}\omega_c \equiv 0, \quad \Delta T^{abc}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0,$$
$$\Delta T_{\alpha\beta\gamma} + T^a_{\alpha\beta\gamma}\omega_a + \bar{T}^a_{\alpha[\beta\gamma]}\omega_a \equiv 0, \quad \Delta\bar{T}^a_{\alpha\beta\gamma} + 2\bar{T}^{ba}_{\alpha\beta\gamma}\omega_b + T^{ba}_{\alpha\beta\gamma}\omega_b \equiv 0,$$
$$\Delta\bar{T}^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + T^{cab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_c \equiv 0.$$

**Теорема.** *Объект неабсолютных перенесений $T$ образует тензор, содержащий два простейших* [5] *подтензора $\{T^{bc}_{a\alpha\beta}\}$ и $\{T^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\}$ и два простых подтензора $\{T^b_{a\alpha\beta}, T^{bc}_{a\alpha\beta}\}$ и $\{T^{ab}_{\alpha\beta\gamma}, T^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\}$.*

Если тензор $T$ обращается в нуль, то из структурных уравнений видно, что дифференциальные уравнения вполне интегрируемы и задают абсолютное параллельное перенесение оснащающих плоскостей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей.

# Литература


[1] Белова О. О. Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей. // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. — 2006. — № 5 (52). — С. 18—20.

[2] Белова О. О. Тензор кривизны связности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2009. — Вып. 40. — С. 18—28.

[3] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — № 9. — С. 5—247.

[4] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

[5] Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. — Калининград, 2000.