

Теоремы исчезновения некоторых классов многообразий Римана—Картана

И. А. ГОРДЕЕВА

Владимирский государственный
гуманитарный университет
e-mail: igordeeva@list.ru

УДК 514.764.2

Ключевые слова: многообразие Римана—Картана, тензор кручения, несимметрическая метрическая связность.

Аннотация

В работе приводится классификация многообразий Римана—Картана на основании ортогонального разложения тензора кручения $\bar{S}$. Рассмотрены вопросы существования двух классов $\wp_3$ и $\wp_1 \oplus \wp_2$ пространств Римана—Картана.

Abstract

I. A. Gordeeva, Vanishing theorems for some classes of Riemann—Cartan manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 7—12.

In this paper, a classification of Riemann—Cartan manifolds based on the orthogonal decomposition of the torsion tensor is given. Problems on the existence of two classes $\wp_1 \oplus \wp_2$ and $\wp_3$ of Riemann—Cartan spaces are discussed.

1. Многообразие Римана—Картана

Многообразием Римана—Картана называется триплет $(M, g, \bar{\nabla})$, где (M, g) — (псевдо)риманово n -мерное ($n \geq 2$) многообразие с линейной связностью $\bar{\nabla}$, обладающей ненулевым кручением $\bar{S}$, такой что $\bar{\nabla}g = 0$.

Э. Картан (см. [5—7]) первым рассмотрел связность $\bar{\nabla}$ вместо связности Леви-Чивита ∇ в 20-х годах прошлого века. При этом пространство-время в рамках общей теории относительности получило в дополнение к кривизне ещё и кручение. В начале 60-х годов прошлого века Т. Кибл и Д. Сцияма независимо друг от друга установили связь между кручением $\bar{S}$ связности $\bar{\nabla}$ и спин-тензором материи. Были обнаружены и другие физические приложения понятия кручения (см. [9]). Новая теория была названа *теорией гравитации Эйнштейна—Картана* (см. [12]). К настоящему времени количество работ, написанных в рамках этой теории, исчисляется десятками. Опубликованные результаты имеют в большей степени физический характер (см., например, [8—10, 12]). Вместе

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 7—12.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

с тем очень мало изучена геометрия псевдоримановых многообразий с несимметрической метрической связностью, или, в принятой современной физикой терминологии, *многообразий (пространств) Римана—Картана*.

Поскольку на многообразии Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$, помимо связности $\bar{\nabla}$, существует связность Леви-Чивита ∇ , однозначно присоединяемая к метрике g , то на $(M, g, \bar{\nabla})$ однозначно определяется тензорное поле $\bar{\nabla} = \nabla + T$, которое является гладким сечением тензорного расслоения $TM \otimes \Lambda^2 M$, поскольку согласно предположению

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) = -g(T(X, Y), Z) - g(T(X, Z), Y) = 0.$$

Из формулы непосредственно выводим, что

$$g(T(Y, Z), X) = g(S(X, Y), Z) + g(S(X, Z), Y) - g(S(Y, Z), X) \quad (1.1)$$

для тензора кручения

$$\bar{S}(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) - T(Y, X)). \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем X, Y, Z — произвольные гладкие векторные поля на M . Из (1.2) следует, что $2 \operatorname{trace} \bar{S} = \operatorname{trace} T$, где

$$(\operatorname{trace} \bar{S})X := g(\bar{S}(e_i, X), e_i), \quad (\operatorname{trace} T)X := T(e_i, X, e_i)$$

для ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ касательного пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$.

Тензор кручения $\bar{S}$ связности $\bar{\nabla}$ многообразия Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ является гладким сечением тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes TM$. Для тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes T^* M$ имеет место (см. [3, доклад XVI]) поточечно $O(q)$ -неприводимое разложение

$$\Lambda^2 M \otimes T^* M \cong \wp_1(M) \oplus \wp_2(M) \oplus \wp_3(M),$$

при этом ортогональные проекции на компоненты этого разложения определяются равенствами

$$^{(1)}S(X, Y, Z) = 3^{-1}(S^b(X, Y, Z) + S^b(Y, Z, X) + S^b(Z, X, Y)),$$

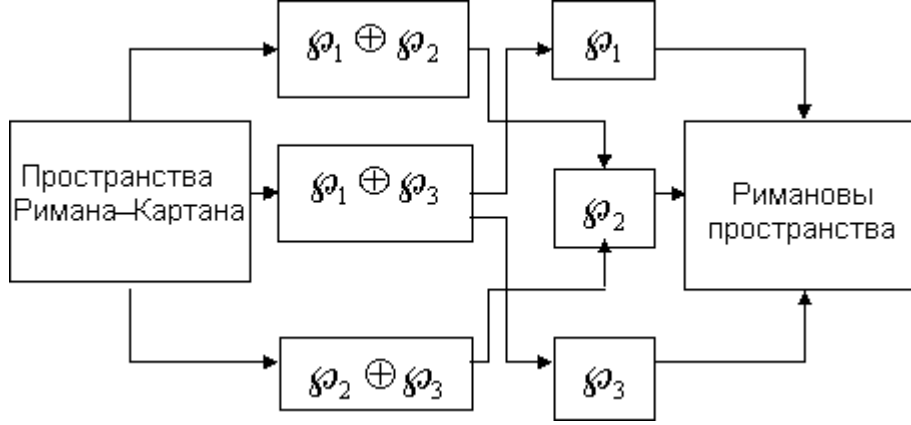
$$^{(2)}S^b(X, Y, Z) = g(X, Z)\theta(Y) - g(X, Y)\theta(Z),$$

$$^{(3)}S(X, Y, Z) = (S^b(X, Y, Z) - ^{(1)}S(X, Y, Z) - ^{(2)}S^b(X, Y, Z))$$

(см., например, [11]), где

$$S^b(X, Y, Z) := g(\bar{S}(X, Y), Z), \quad \theta := (n-1)^{-1} \operatorname{trace} \bar{S}.$$

В [4] полагают, что пространство Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$, как и его присоединённая связность $\bar{\nabla}$, принадлежат классу $\wp_1$, $\wp_2$ или $\wp_3$, если тензор S является сечением соответствующего тензорного расслоения $\wp_1(M)$, $\wp_2(M)$ или $\wp_3(M)$. Дополним эти три класса классами $\wp_1 \oplus \wp_2$, $\wp_1 \oplus \wp_3$ и $\wp_2 \oplus \wp_3$ и составим классификационную диаграмму включений.



Тензор кривизны $\bar{R}$ связности $\bar{\nabla}$ в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ произвольной карты (U, φ) многообразия M связности $\bar{\nabla}$ имеет следующие компоненты (см. [2, с. 130]):

$$\bar{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l - \nabla_i T_{jk}{}^l + \nabla_j T_{ik}{}^l + T_{im}{}^l T_{jk}{}^m - T_{jm}{}^l T_{ik}{}^m,$$

где $R_{ijk}{}^l$ и $T_{jk}{}^l$ — локальные компоненты тензоров кривизны связности Леви-Чивита ∇ и деформации $T = \bar{\nabla} - \nabla$ и $i, j, k, l, m = 1, \dots, n$.

Тензор Риччи $\bar{r}$ связности $\bar{\nabla}$ имеет следующие компоненты (см. [2, с. 151])

$$\bar{r}_{ij} := r_{ij} + \nabla_k T_{ij}{}^k - \nabla_i T_{kj}{}^k + T_{kl}{}^k T_{ij}{}^l - T_{ik}{}^l T_{lj}{}^k, \quad (1.3)$$

где r_{ij} — локальные компоненты тензора Риччи связности Леви-Чивита ∇ .

Используя формулу (1.1) связи компонентов тензора деформации и тензора кручения, из равенства (1.3) получаем

$$\begin{aligned} \bar{r}_{ij} = r_{ij} + \nabla_k (\bar{S}_{ij}{}^k - \bar{S}_i{}^k{}_j - \bar{S}_j{}^k{}_i) - \\ - 2\nabla_i S_j + 2S_l (\bar{S}_{ij}{}^k - \bar{S}_i{}^k{}_j - \bar{S}_j{}^k{}_i) - 2S_{lkj} S_i{}^{lk} - S_{lkj} S^{kl}{}_i. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим многообразие Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ с положительно определённым метрическим тензором g . Взяв за основу тензор кривизны $\bar{R}$ несимметрической метрической связности $\bar{\nabla}$ многообразия Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$, построим скалярный инвариант

$$\bar{s} = \sum_{i,j=1}^n g(\bar{R}(e_i, e_j)e_j, e_i),$$

который по аналогии со скалярной кривизной s риманова многообразия (M, g) (см. [1, с. 65]) назовём *скалярной кривизной многообразия Римана—Картана* $(M, g, \bar{\nabla})$.

По (1.4) получаем

$$\bar{s} = s - 4 \operatorname{div}(\operatorname{trace} \bar{S})^\# - 4 \|\operatorname{trace} \bar{S}\|^2 + \|\bar{S}\|^2 - 2 \sum_{i,j,k=1}^n \bar{S}(e_i, e_j, e_k) \bar{S}(e_j, e_k, e_i).$$

Учитывая, что

$$\|\operatorname{trace} \bar{S}\|^2 = 2^{-1}(n-1) \|(2)\bar{S}\|^2$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^n \bar{S}(e_i, e_j, e_k) \bar{S}(e_j, e_k, e_i) &= \\ &= \frac{3}{2} \|(1)\bar{S}\|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{S}\|^2 = \|(1)\bar{S}\|^2 - \frac{1}{2} \|(2)\bar{S}\|^2 - \frac{1}{2} \|(3)\bar{S}\|^2, \end{aligned}$$

приходим к следующей лемме.

Лемма 1. Скалярные кривизны $\bar{s}$ и s многообразия Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ и риманова многообразия (M, g) связаны равенством

$$\bar{s} = s - \|(1)\bar{S}\|^2 - 2(n-2) \|(2)\bar{S}\|^2 + 2 \|(3)\bar{S}\|^2 - 4 \operatorname{div}(\operatorname{trace} \bar{S})^\# \quad (1.5)$$

с неприводимыми компонентами $(1)\bar{S}$, $(2)\bar{S}$ и $(3)\bar{S}$ тензора $\bar{S}$.

Полной скалярной кривизной компактного риманова многообразия (M, g) (см. [1, с. 161]) называется число

$$s(M) := \int_M \bar{s} dv.$$

Считая теперь многообразие Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ компактным, определим его полную скалярную кривизну как число

$$\bar{s}(M) = \int_M \bar{s} dv$$

по аналогии с полной скалярной кривизной риманова многообразия. Зависимость между полными скалярными кривизнами $s(M)$ и $\bar{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ описывается следующей теоремой, которая является следствием леммы 1 и теоремы Грина.

Теорема 1. Полные скалярные кривизны $s(M)$ и $\bar{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ связаны равенством

$$\bar{s}(M) = s(M) - \int_M (\|(1)\bar{S}\|^2 + 2(n-2) \|(2)\bar{S}\|^2 - 2 \|(3)\bar{S}\|^2) dv. \quad (1.6)$$

2. Условия препятствия для существования двух классов многообразий Римана—Картана

Рассмотрим многообразие Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$, которое характеризуется условием ${}^{(3)}\bar{S} = 0$ или равносильным ему условием

$$\bar{S}_{ijk} + \bar{S}_{ikj} = \frac{1}{(n-1)}(2g_{kij}\bar{S}_j - g_{ij}\bar{S}_k - g_{kj}\bar{S}_i).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Полные скалярные кривизны $\bar{s}(M)$ и $s(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ связаны неравенством $\bar{s}(M) \leq s(M)$. Для $\dim M \geq 3$ равенство возможно, когда связность $\bar{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g , а для случая $\dim M = 2$ — когда связность $\bar{\nabla}$ будет полусимметрической.

Доказательство. Для компактного ориентированного многообразия Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ интегральное равенство (1.6) принимает вид

$$\bar{s}(M) = s(M) - \int_M (\|{}^{(1)}\bar{S}\|^2 + 2(n-2)\|{}^{(2)}\bar{S}\|^2) dv.$$

Очевидно, что в этом случае $\bar{s}(M) \leq s(M)$, причём для $n \geq 3$ равенство возможно, если только ${}^{(1)}\bar{S} = {}^{(2)}\bar{S} = 0$, что означает $\bar{\nabla} = \nabla$. Для $n = 2$ равенство возможно, если только $\bar{S} = {}^{(2)}\bar{S}$, т. е.

$$\bar{S}(X, Y, Z) = g(X, Z)\omega(Y) - g(X, Y)\omega(Z),$$

что характеризует связность $\bar{\nabla}$ как полусимметрическую. $\square$

Зная определение скалярных кривизн $\bar{s}$ и s и учитывая положительную определённость метрики g , мы можем сформулировать следующее утверждение.

Следствие 1. На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с неположительно (отрицательно) определённым тензором кручения Риччи не существует несимметрической метрической связности $\bar{\nabla}$ класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ с положительно (соответственно неотрицательно) определённой квадратичной формой $\bar{r}(X, X)$ для тензора Риччи $\bar{r}$ связности $\bar{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X .

Рассмотрим теперь многообразие Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\wp_3$, которое характеризуется условиями ${}^{(1)}\bar{S} = {}^{(2)}\bar{S} = 0$. Последним можно придать вид следующих равенств:

$$\text{trace } \bar{S} = 0, \quad \bar{S}(X, Y, Z) + \bar{S}(Y, Z, X) + \bar{S}(Z, X, Y) = 0.$$

В этом случае будет справедливой следующая теорема.

Теорема 3. Скалярные кривизны s и $\bar{s}$ многообразий Римана (M, g) и Римана—Картана $(M, g, \bar{\nabla})$ класса $\wp_3$ связаны неравенством $\bar{s} \geq s$. Равенство возможно только тогда, когда присоединённая связность $\bar{\nabla}$ совпадает со связностью Леви—Чивита ∇ метрики g .

Доказательство. При $^{(1)}\bar{S} = ^{(2)}\bar{S} = 0$ равенство (1.5) может быть записано в виде $\bar{s} = s + 2\|^{(3)}\bar{S}\|^2$. Откуда следует, что $\bar{s} \geq s$, причём здесь равенство возможно, если только $\bar{\nabla} = \nabla$. $\square$

Справедливо также следующее утверждение.

Следствие 2. На римановом многообразии (M, g) с неотрицательно (положительно) определённым тензором кручения Риччи не существует несимметрической метрической связности $\bar{\nabla}$ класса $\wp_3$ с отрицательно (соответственно неположительно) определённой квадратичной формой $\bar{r}(X, X)$ для тензора Риччи $\bar{r}$ связности $\bar{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X .

Литература

- [1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.
- [2] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М: Наука, 1976.
- [3] Четырёхмерная риманова геометрия: Семинар Артура Бессе 1978/79. — М.: Мир, 1985.
- [4] Capozziello S., Lambiase G., Stornaiolo C. Geometric classification of the torsion tensor in space-time // Ann. Phys. — 2001. — Vol. 10. — P. 713—727.
- [5] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité. I // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1923. — Vol. 40. — P. 325—412.
- [6] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. I // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1924. — Vol. 41. — P. 1—25.
- [7] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. II // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1925. — Vol. 42. — P. 17—88.
- [8] Hamond R. T. Torsion gravity // Rep. Prog. Phys. — 2002. — Vol. 65. — P. 599—649.
- [9] Penrose R. Spinors and torsion in General Relativity // Found. Phys. — 1983. — Vol. 13. — P. 325—339.
- [10] Puetzfeld D. Prospects of non-Riemannian cosmology // Proc. of the of 22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics at Stanford University (Dec. 13—17, 2004). — Stanford Univ. Press, 2004. — P. 1—5.
- [11] Stepanov S. E. On a conformal Killing 2-form of the electromagnetic field // J. Geom. Phys. — 2000. — Vol. 33. — P. 191—209.
- [12] Trautman A. The Einstein—Cartan theory // Encyclopedia of Mathematical Physics. Vol. II. — Oxford: Elsevier, 2006. — P. 189—195.