Три-ткани, определяемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений

А. А. ДУЮНОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: duyunova_anna@mail.ru

УДК 514.763.7

Ключевые слова: многомерная три-ткань, система обыкновенных дифференциальных уравнений, аффинная связность.

Аннотация

Рассматривается три-ткань $W(1,n,1)$, образованная на гладком многообразии размерности $n+1$ двумя n-параметрическими семействами кривых и однопараметрическим семейством гиперповерхностей. Для таких тканей определено семейство адаптированных реперов, найдена система структурных уравнений, исследованы дифференциально-геометрические объекты, возникающие в дифференциальной окрестности до третьего порядка. Показано, что всякая система обыкновенных дифференциальных уравнений однозначно определяет некоторую три-ткань $W(1,n,1)$. Это даёт возможность описывать свойства системы обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах соответствующей три-ткани. В частности, найдено условие автономности системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Abstract

A. A. Duyunova, Three-webs defined by a system of ordinary differential equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 13—31.

We consider a three-web $W(1,n,1)$ formed by two n-parametric family of curves and one-parameter family of hypersurfaces on a smooth $(n+1)$-dimensional manifold. For such webs, the family of adapted frames is defined and the structure equations are found, geometric objects arising in the third-order differential neighborhood are investigated. It is showed that every system of ordinary differential equations uniquely defines a three-web $W(1,n,1)$. Thus, there is a possibility to describe some properties of a system of ordinary differential equations in terms of the corresponding three-web $W(1,n,1)$. In particular, autonomous systems of ordinary differential equations are characterized.

Классическую геометрию три-тканей, образованных слоениями одинаковых размерностей, начал развивать в своих работах В. Бляшке в двадцатых годах прошлого века. Современная теория тканей создавалась М. А. Акивисом, его учениками и коллегами начиная с 1960-х годов. Основные результаты этой теории содержатся в [4,15].

Теорией тканей, образованных слоями разных размерностей, занимались М. А. Акивис [2—4, 15], В. В. Гольдберг [2, 3, 9], ученики А. М. Васильева

Н. Х. Азизова [1, 13, 14], Ю. А. Апресян [5—8], Нгуен Зоан Туан [11, 12] и Г. А. Толстихина (см. [4, гл. 9]).

В настоящей статье рассматривается три-ткань $W(1,n,1)$, образованная двумя семействами кривых и одним семейством гиперповерхностей. Найдены структурные уравнения такой ткани, их первое и второе дифференциальные продолжения, структурные тензоры ткани, условия, при которых на ткани $W(1,n,1)$ возникает аффинная связность. Показано, что с системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $\dot{x} = (x,t)$ связана три-ткань $W(1,n,1)$. Компоненты тензоров ткани вычислены через функции, определяющие эту систему. Показано, что к системе естественным образом присоединяется аффинная связность, которая названа канонической. В терминах ткани найдено условие автономности системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Пусть M — гладкое многообразие размерности $n+1$. Рассмотрим на нём три-ткань $W(1,n,1)$, заданную двумя семействами кривых λ_1, λ_3 и одним семейством гиперповерхностей λ_2. Обозначим $T_p(M)$ касательное пространство к многообразию M в точке p, а $T_p(\mathcal{F}_\alpha)$, $\alpha = 1,2,3,$ — касательные пространства к слоям $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W в этой точке. Рассмотрим в точке p многообразие реперов e_a, $a,b,\ldots = 1,2,\ldots,n+1$, первые n векторов которых лежат в $T_p(\mathcal{F}_2)$, вектор e_{n+1} — в $T_p(\mathcal{F}_1)$, а вектор $e_n - e_{n+1}$ — в $T_p(\mathcal{F}_3)$. Пусть ω^a — двойственный корепер, т. е.

$$\omega^a(e_b) = \delta^a_b,$$

где δ^a_b — символ Кронекера. Тогда для любого вектора ξ из T_p имеем

$$\xi = \omega^a(\xi)e_a, \tag{1}$$

а значит, семейства λ_1 и λ_2 этой ткани задаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\lambda_1\colon\ \omega^i = 0, \quad \lambda_2\colon\ \omega^{n+1} = 0 \quad (i,j,\ldots = 1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

Чтобы записать уравнения третьего семейства, рассмотрим произвольный вектор ξ из $T_p(\mathcal{F}_3)$:

$$\xi = \omega(\xi)(e_n - e_{n+1}). \tag{3}$$

Сравнивая равенства (1) и (3), находим уравнения третьего семейства ткани:

$$\lambda_3\colon\ \omega^u = 0, \quad \omega^n + \omega^{n+1} = 0 \quad (u,v,\ldots = 1,2,\ldots,n-1). \tag{4}$$

Заметим, что базис кольца дифференциальных форм на M образуют как формы ω^u, ω^n, ω^{n+1}, так и формы ω^u, ω^n (или ω^{n+1}), $\omega^n + \omega^{n+1}$. При этом базисные формы определены с точностью до преобразований

$$\tilde{\omega}^u = a^u_v\omega^v, \quad \tilde{\omega}^n = a^n_v\omega^v + a\omega^n, \quad \tilde{\omega}^{n+1} = a\omega^{n+1}, \quad \det(a^u_v) \neq 0, \quad a^n_v \neq 0, \quad a \neq 0,$$

сохраняющих вид уравнений (2) и (4). Базисные векторы e_u, e_n, e_{n+1} преобразуются также согласованно:

$$\tilde{e}_u = a^v_u e_v + a^n_u e_n, \quad \tilde{e}_n = ae_n, \quad \tilde{e}_{n+1} = ae_{n+1}.$$

Таким образом, группа допустимых преобразований репера e_a пространства $T_p(M)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Эти преобразования образуют группу Ли G — подгруппу полной линейной группы $\mathbf{GL}(n+1,\mathbb{R})$. Таким образом, с тканью $W(1,n,1)$ связана G-структура [10].

Системы форм, определяющие слоения ткани, должны быть вполне интегрируемыми. Согласно теореме Фробениуса условия полной интегрируемости слоений λ_1 и λ_2 (см. (2)) имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega^{n+1} = \omega^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^{n+1}, \tag{5}$$

где ω_j^i, ω_{n+1}^{n+1} — дифференциальные формы, содержащие дифференциалы параметров, определяющих положение репера e_u, e_n, e_{n+1}. Разобьём уравнения (5) на три части:

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega_v^u + \omega^n \wedge \omega_n^u, \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \omega_u^n + \omega^n \wedge \omega_n^n, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^{n+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) выводим следующие выражения для форм ω^u и $\omega^n + \omega^{n+1}$, задающих третье семейство ткани:

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega_v^u + (\omega^n + \omega^{n+1}) \wedge \omega_n^u - \omega^{n+1} \wedge \omega_n^u, \\ d(\omega^n + \omega^{n+1}) &= \omega^u \wedge \omega_u^n + (\omega^n + \omega^{n+1}) \wedge \omega_n^n + \omega^{n+1} \wedge (\omega_{n+1}^{n+1} - \omega_n^n). \end{aligned} \tag{7}$$

Система форм ω^u, $\omega^n + \omega^{n+1}$, определяющая кривые третьего семейства, должна быть вполне интегрируемой. Пользуясь теоремой Фробениуса, из (7) получим

$$\omega^{n+1} \wedge \omega_n^u = 0, \quad \omega^{n+1} \wedge (\omega_{n+1}^{n+1} - \omega_n^n) = 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$\omega_n^u = \mu^u \omega^{n+1}, \quad \omega_{n+1}^{n+1} - \omega_n^n = \mu \omega^{n+1}. \tag{8}$$

Подставив (8) в (6), получим первую серию структурных уравнений рассматриваемой ткани W:

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega_v^u + \mu^u \omega^n \wedge \omega^{n+1}, \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \omega_u^n + \omega^n \wedge \omega_n^n, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \omega_n^n. \end{aligned} \tag{9}$$

2. Найдём дифференциальное продолжение уравнений (9). Дифференцируя внешним образом первое уравнение, с учётом этого же уравнения получим

$$(d\mu^u + \mu^v \omega_v^u - 2\mu^u \omega_n^n) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} - (d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u - \mu^u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^v = 0.$$

Введём обозначения

$$\nabla\mu^u = d\mu^u + \mu^v\omega_v^u - 2\mu^u\omega_n^n, \tag{10}$$

$$\Omega_v^u = d\omega_v^u - \omega_v^w \wedge \omega_w^u. \tag{11}$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$(\Omega_v^u - \mu^u\omega_v^n \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^v - \nabla\mu^u \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0. \tag{12}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (9) и обозначая

$$\Omega_u^n = d\omega_u^n - \omega_u^v \wedge \omega_v^n - \omega_u^n \wedge \omega_n^n, \tag{13}$$

придём к уравнению

$$\Omega_u^n \wedge \omega^u + (d\omega_n^n - \mu^u\omega^{n+1} \wedge \omega_u^n) \wedge \omega^n = 0. \tag{14}$$

Дифференцирование третьего уравнения (9) даёт

$$d\omega_n^n \wedge \omega^{n+1} = 0. \tag{15}$$

Итак, внешнее дифференцирование уравнений структуры (9) приводит к уравнениям (12), (14), (15).

Решим эти уравнения. Из уравнения (15) по обобщённой лемме Картана выводим, что

$$d\omega_n^n = \theta \wedge \omega^{n+1}, \tag{16}$$

где θ — некоторая 1-форма. Подставив (16) в уравнение (14), получим

$$\Omega_u^n \wedge \omega^u - (\theta + \mu^u\omega_u^n) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0. \tag{17}$$

Запишем формы $\theta + \mu^u\omega_u^n$, Ω_u^n в виде

$$\begin{aligned}
&\theta + \mu^u\omega_u^n = t_u\omega^u + t_n\omega^n + t_{n+1}\omega^{n+1} + \vartheta,\\
&\Omega_u^n = h_{uvw}^n\omega^v \wedge \omega^w + h_{uvn}^n\omega^v \wedge \omega^n + h_{uv\,n+1}^n\omega^v \wedge \omega^{n+1} +\\
&\quad + h_{un\,n+1}^n\omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_{uv}^n \wedge \omega^v + \vartheta_{un}^n \wedge \omega^n + \vartheta_{u\,n+1}^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_u^n,
\end{aligned} \tag{18}$$

где ϑ, ϑ_{uv}^n, ϑ_{un}^n и $\vartheta_{u\,n+1}^n$ — некоторые 1-формы, не зависящие от базисных форм ω^u, ω^n и ω^{n+1}, а ϑ_u^n — некоторая 2-форма, не содержащая базисных форм и форм ϑ_{uv}^n, ϑ_{un}^n и $\vartheta_{u\,n+1}^n$. Подставив (18) в уравнение (17), получим

$$\begin{aligned}
&(h_{un\,n+1}^n - t_u)\omega^u \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + h_{[uvw]}^n\omega^v \wedge \omega^w \wedge \omega^u +\\
&\quad + h_{[uv]n}^n\omega^v \wedge \omega^n \wedge \omega^u + h_{[uv]\,n+1}^n\omega^v \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^u + \vartheta_{[uv]}^n \wedge \omega^v \wedge \omega^u +\\
&\quad + \vartheta_{un}^n \wedge \omega^n \wedge \omega^u + \vartheta_{u\,n+1}^n \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^u + \vartheta_u^n \wedge \omega^u - \vartheta \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Так как все слагаемые, входящие в это тождество, линейно независимы между собой, то каждое из них должно быть равно нулю в отдельности, поэтому

$$\begin{gathered}
h_{un\,n+1}^n - t_u = 0, \quad \vartheta_{un}^n = 0, \quad \vartheta_{u\,n+1}^n = 0, \quad \vartheta_u^n = 0, \qquad \vartheta = 0,\\
\vartheta_{[uv]}^n = 0, \quad h_{[uv]n}^n = h_{[uv]\,n+1}^n = h_{[uvw]}^n = 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

В результате уравнения (18) примут вид

$$\begin{aligned} &\theta + \mu^u \omega_u^n = t_u \omega^u + t_n \omega^n + t_{n+1}\omega^{n+1}, \\ &\Omega_u^n = h_{uvw}^n \omega^v \wedge \omega^w + h_{uvn}^n \omega^v \wedge \omega^n + h_{uv\,n+1}^n \omega^v \wedge \omega^{n+1} + \\ &\quad + t_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_{uv}^n \wedge \omega^v, \end{aligned} \tag{20}$$

причём входящие сюда величины удовлетворяют условиям (19). Согласно первому уравнению (20) уравнение (16) имеет вид

$$d\omega_n^n = t_u \omega^u \wedge \omega^{n+1} + \mu^u \omega^{n+1} \wedge \omega_u^n + t_n \omega^n \wedge \omega^{n+1}. \tag{21}$$

Обозначим

$$\omega_{uv}^n = \vartheta_{uv}^n - h_{uvw}^n \omega^w - h_{uvn}^n \omega^n - h_{uv\,n+1}^n \omega^{n+1}.$$

Тогда второе уравнение (20) примет вид

$$\Omega_u^n = t_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega_{uv}^n \wedge \omega^v, \tag{22}$$

при этом согласно соотношениям (19) будут выполняться условия

$$\omega_{uv}^n = \omega_{vu}^n. \tag{23}$$

Наконец, решим уравнение (12). Запишем формы $\nabla \mu^u$, $\Omega_v^u - \mu^u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1}$ в виде

$$\begin{aligned} &\nabla \mu^u = k_v^u \omega^v + k_n^u \omega^n + k_{n+1}^u \omega^{n+1} + \vartheta^u, \\ &\Omega_v^u - \mu^u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1} = r_{vws}^u \omega^w \wedge \omega^s + r_{vwn}^u \omega^w \wedge \omega^n + r_{vw\,n+1}^u \omega^w \wedge \omega^{n+1} + \\ &\quad + r_{vn\,n+1}^u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_{vw}^u \wedge \omega^w + \vartheta_{vn}^u \wedge \omega^n + \vartheta_{v\,n+1}^u \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_v^u, \end{aligned} \tag{24}$$

причём, как и выше, формы ϑ^u, ϑ_{vw}^u, ϑ_{vn}^u и $\vartheta_{v\,n+1}^u$ не содержат базисных форм ω^u, ω^n и ω^{n+1}, а формы ϑ_v^u не содержат базисных форм и форм ϑ_{vw}^u, ϑ_{vn}^u и $\vartheta_{v\,n+1}^u$. Внося эти разложения в уравнения (12), получим

$$\begin{aligned} &r_{[vws]}^u \omega^w \wedge \omega^s \wedge \omega^v + r_{[vw]n}^u \omega^w \wedge \omega^n \wedge \omega^v + r_{[vw]\,n+1}^u \omega^w \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^v + \\ &\quad + r_{vn\,n+1}^u \omega^n \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^v + \vartheta_{[vw]}^u \wedge \omega^w \wedge \omega^v + \vartheta_{vn}^u \wedge \omega^n \wedge \omega^v + \\ &\quad + \vartheta_{v\,n+1}^u \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^v + \vartheta_v^u \wedge \omega^v - k_v^u \omega^v \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} - \vartheta^u \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку все слагаемые, входящие в это тождество, линейно независимы между собой, то каждое из них должно быть равно нулю:

$$\begin{gathered} r_{vn\,n+1}^u - k_v^u = 0, \quad \vartheta_{vn}^u = 0, \quad \vartheta_{v\,n+1}^u = 0, \quad \vartheta_v^u = 0, \quad \vartheta^u = 0, \\ \vartheta_{[vw]}^u = 0, \quad r_{[vw]n}^u = r_{[vw]\,n+1}^u = r_{[vws]}^u = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

В результате уравнения (24) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &\nabla \mu^u = k_v^u \omega^v + k_n^u \omega^n + k_{n+1}^u \omega^{n+1}, \\ &\Omega_v^u = \mu^u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1} + k_v^u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega_{vw}^u \wedge \omega^w, \end{aligned} \tag{26}$$

где использовано обозначение

$$\omega_{vw}^u = \vartheta_{vw}^u - r_{vws}^u \omega^s - r_{vwn}^u \omega^n - r_{vw\,n+1}^u \omega^{n+1},$$

причём в силу (25) справедливы равенства

$$\omega^u_{vw} = \omega^u_{wv}. \tag{27}$$

Итак, первое дифференциальное продолжение уравнений структуры (9) имеет вид (21), (22), (26), или

$$\begin{aligned} d\omega^u_v &= \omega^w_v \wedge \omega^u_w + \mu^u \omega^n_v \wedge \omega^{n+1} + k^u_v \omega^n \wedge \omega^{n+1} - \omega^w \wedge \omega^u_{vw}, \\ d\omega^n_u &= \omega^v_u \wedge \omega^n_v + \omega^n_u \wedge \omega^n_n + t_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} - \omega^v \wedge \omega^n_{uv}, \\ d\omega^n_n &= \mu^u \omega^{n+1} \wedge \omega^n_u + t_u \omega^u \wedge \omega^{n+1} + t_n \omega^n \wedge \omega^{n+1}, \end{aligned} \tag{28}$$

и

$$d\mu^u = -\mu^v \omega^u_v + 2\mu^u \omega^n_n + k^u_v \omega^v + k^u_n \omega^n + k^u_{n+1} \omega^{n+1}, \tag{29}$$

причём формы ω^n_{uv} и ω^u_{vw} симметричны по нижним индексам.

3. Формы ω^a, ω^a_b $(a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1)$, входящие в структурные уравнения, зависят от главных параметров — локальных координат на многообразии M — и от вторичных параметров, определяющих положение репера e_a в касательном пространстве. Зафиксируем главные параметры, определяющие положение точки p на M, положив $\omega^a = 0$. Получим формы $\pi^a_b = \omega^a_b|_{\omega_c = 0}$, определяющие инфинитезимальное перемещение репера в пространстве T_p:

$$\delta e_a = \pi^b_a e_b,$$

где символ δ означает дифференцирование по вторичным параметрам. Тогда из уравнений (28) и (29) получим

$$\begin{aligned} &\delta\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w, \\ &\delta\pi^n_u = \pi^v_u \wedge \pi^n_v + \pi^n_u \wedge \pi^n_n, \\ &\delta\pi^n_n = 0, \\ &\delta\mu^u + \mu^v \pi^u_v - 2\mu^u \pi^n_n = 0. \end{aligned}$$

Первые три уравнения являются уравнениями Маурера—Картана группы G допустимых преобразований репера в точке p многообразия M. Последнее уравнение этой системы показывает, что величины μ^u образуют тензор. Следуя [3], назовём этот тензор первым структурным тензором G-структуры, определяемой тканью $W(1, n, 1)$, или, короче, первым структурным тензором этой три-ткани.

Известно (см., например, [10]), что если на многообразии M задана аффинная связность, то формы Пфаффа θ^a, θ^a_b, $a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1$, определяющие эту связность, удовлетворяют уравнениям вида

$$\begin{aligned} d\theta^a &= \theta^b \wedge \theta^a_b + R^a_{bc}\, \theta^b \wedge \theta^c, \\ d\theta^a_b &= \theta^c_b \wedge \theta^a_c + R^a_{bcd}\, \theta^c \wedge \theta^d, \end{aligned}$$

где R^a_{bc}, R^a_{bcd} — тензоры кручения и кривизны этой связности соответственно, а квадратичные формы $\Omega^a = R^a_{bc}\, \theta^b \wedge \theta^c$ и $\Omega^a_b = R^a_{bcd}\, \theta^c \wedge \theta^d$ — формы кручения и кривизны этой связности. Как видно из уравнений (9) и (28), они не являются структурными уравнениями аффинной связности. Однако если в этих уравнениях обозначить

$$\theta^a = (\omega^u, \omega^n, \omega^{n+1}), \quad \theta^a_b = \begin{pmatrix} \theta^u_v & \theta^u_n & \theta^u_{n+1} \\ \theta^n_u & \theta^n_n & \theta^n_{n+1} \\ \theta^{n+1}_u & \theta^{n+1}_n & \theta^{n+1}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^u_v & \mu^u \omega^{n+1} & 0 \\ \omega^n_u & \omega^n_n & 0 \\ 0 & 0 & \omega^n_n \end{pmatrix},$$

мы получим следующую теорему.

Теорема 1. *Уравнения* (9) *и* (28) *определяют на M аффинную связность без кручения в том и только том случае, если формы ω^n_{uv} и ω^u_{vw} выражаются через базисные формы ω^u, ω^n и ω^{n+1}.*

В частности, если эти формы равны нулю, то существенные компоненты тензора кривизны выражаются через компоненты тензора $\{k^u_v, t_u, t_n\}$.

4. Найдём дифференциальное продолжение уравнений (28), (29). Дифференцируя внешним образом первое уравнение (28), с учётом уравнений (9), (28), (29) получим

$$\begin{aligned}(dk^u_v + k^w_v\omega^u_w - k^u_w\omega^w_v - k^u_n\omega^n_v - 2k^u_v\omega^n_n - \mu^w\omega^u_{vw}) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} +\\ + (d\omega^u_{vw} + \omega^u_s \wedge \omega^s_{vw} - \omega^s_v \wedge \omega^u_{sw} - \omega^s_w \wedge \omega^u_{vs} + k^u_w\omega^n_v \wedge \omega^{n+1} -\\ - \mu^u\omega^n_{vw} \wedge \omega^{n+1} + k^u_v\omega^n_w \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^w = 0.\end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\nabla k^u_v = dk^u_v + k^w_v\omega^u_w - k^u_w\omega^w_v - k^u_n\omega^n_v - 2k^u_v\omega^n_n, \tag{30}$$

$$\Omega^u_{vw} = d\omega^u_{vw} + \omega^u_s \wedge \omega^s_{vw} - \omega^s_v \wedge \omega^u_{sw} - \omega^s_w \wedge \omega^u_{vs} - \mu^u\omega^n_{vw} \wedge \omega^{n+1}. \tag{31}$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$(\nabla k^u_v - \mu^w\omega^u_{vw}) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + (\Omega^u_{vw} + k^u_w\omega^n_v \wedge \omega^{n+1} + k^u_v\omega^n_w \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^w = 0. \tag{32}$$

Дифференцируя внешним образом второе уравнение (28), с учётом уравнений (9) и (28) имеем

$$\begin{aligned}(dt_u + k^v_u\omega^n_v - t_v\omega^v_u - t_n\omega^n_u - t_u\omega^n_n - \mu^v\omega^n_{uv}) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + (d\omega^n_{uv} - \omega^w_{uv} \wedge \omega^n_w -\\ - \omega^w_u \wedge \omega^n_{wv} - \omega^n_{uv} \wedge \omega^n_n + t_v\omega^n_u \wedge \omega^{n+1} + t_u\omega^n_v \wedge \omega^{n+1} + \omega^n_{uw} \wedge \omega^w_v) \wedge \omega^v = 0,\end{aligned}$$

или

$$(\nabla t_u + k^v_u\omega^n_v - \mu^v\omega^n_{uv}) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + (\Omega^n_{uv} + t_v\omega^n_u \wedge \omega^{n+1} + t_u\omega^n_v \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^v = 0, \tag{33}$$

где обозначено

$$\nabla t_u = dt_u - t_v\omega^v_u - t_u\omega^n_n - t_n\omega^n_u, \tag{34}$$

$$\Omega^n_{uv} = d\omega^n_{uv} - \omega^w_{uv} \wedge \omega^n_w - \omega^w_u \wedge \omega^n_{wv} - \omega^n_{uv} \wedge \omega^n_n + \omega^n_{uw} \wedge \omega^w_v. \tag{35}$$

Дифференцируя третье уравнение (28) и обозначая

$$\nabla t_n = dt_n - 2t_n\omega_n^n, \tag{36}$$

придём к уравнению

$$(\nabla t_u + k_u^v\omega_v^n - \mu^v\omega_{vu}^n)\wedge\omega^u\wedge\omega^{n+1} + (\nabla t_n + k_n^u\omega_u^n)\wedge\omega^n\wedge\omega^{n+1} = 0. \tag{37}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (29), с учётом (9), (28) и (29) получим

$$\begin{aligned}(dk_v^u + k_v^w\omega_w^u - \mu^w\omega_{wv}^u - k_n^u\omega_v^n - k_w^u\omega_v^w - 2k_v^u\omega_n^n)\wedge\omega^v +\\ + (dk_n^u + k_n^v\omega_v^u - 3k_n^u\omega_n^n)\wedge\omega^n +\\ + (dk_{n+1}^u + k_{n+1}^v\omega_v^u - 3k_{n+1}^u\omega_n^n - 3\mu^u\mu^v\omega_v^n)\wedge\omega^{n+1} +\\ + 2\mu^u t_v\omega^v\wedge\omega^{n+1} + 2\mu^u t_n\omega^n\wedge\omega^{n+1} = 0.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\nabla k_n^u = dk_n^u + k_n^v\omega_v^u - 3k_n^u\omega_n^n, \tag{38}$$

$$\nabla k_{n+1}^u = dk_{n+1}^u + k_{n+1}^v\omega_v^u - 3k_{n+1}^u\omega_n^n. \tag{39}$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\begin{aligned}(\nabla k_v^u - \mu^w\omega_{wv}^u)\wedge\omega^v + \nabla k_n^u\wedge\omega^n +\\ + (\nabla k_{n+1}^u - 3\mu^u\mu^v\omega_v^n + 2\mu^u t_v\omega^v + 2\mu^u t_n\omega^n)\wedge\omega^{n+1} = 0.\end{aligned} \tag{40}$$

Таким образом, дифференцирование второй серии структурных уравнений (28), (29) приводит к уравнениям (32), (33), (37) и (40).

Решим эти уравнения. Из уравнения (40), пользуясь леммой Картана, получаем

$$\nabla k_v^u - \mu^w\omega_{wv}^u = h_{vw}^u\omega^w + h_{vn}^u\omega^n + h_{v\,n+1}^u\omega^{n+1}, \tag{41}$$

$$\nabla k_n^u = h_{nv}^u\omega^v + h_{nn}^u\omega^n + h_{n\,n+1}^u\omega^{n+1}, \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\nabla k_{n+1}^u - 3\mu^u\mu^v\omega_v^n + 2\mu^u t_v\omega^v + 2\mu^u t_n\omega^n =\\ = h_{n+1\,v}^u\omega^v + h_{n+1\,n}^u\omega^n + h_{n+1\,n+1}^u\omega^{n+1},\end{aligned} \tag{43}$$

где $h_{vw}^u = h_{wv}^u$, $h_{vn}^u = h_{nv}^u$, $h_{v\,n+1}^u = h_{n+1\,v}^u$, $h_{n\,n+1}^u = h_{n+1\,n}^u$. Подставив (41) в уравнение (32), придём к соотношениям

$$h_{vw}^u\omega^w\wedge\omega^n\wedge\omega^{n+1} + (\Omega_{vw}^u + k_w^u\omega_v^n\wedge\omega^{n+1} + k_v^u\omega_w^n\wedge\omega^{n+1})\wedge\omega^w = 0.$$

Запишем формы $\Omega_{vw}^u + k_w^u\omega_v^n\wedge\omega^{n+1} + k_v^u\omega_w^n\wedge\omega^{n+1}$ в виде

$$\begin{aligned}\Omega_{vw}^u + k_w^u\omega_v^n\wedge\omega^{n+1} + k_v^u\omega_w^n\wedge\omega^{n+1} =\\ = r_{vwsp}^u\omega^s\wedge\omega^p + r_{vwsn}^u\omega^s\wedge\omega^n + r_{vws\,n+1}^u\omega^s\wedge\omega^{n+1} +\\ + r_{vwn\,n+1}^u\omega^n\wedge\omega^{n+1} + \vartheta_{vws}^u\wedge\omega^s + \vartheta_{vwn}^u\wedge\omega^n + \vartheta_{vw\,n+1}^u\wedge\omega^{n+1} + \vartheta_{vw}^u,\end{aligned} \tag{44}$$

где ϑ^u_{vws}, ϑ^u_{vwn} и $\vartheta^u_{vw\,n+1}$ — некоторые 1-формы, не содержащие базисных форм ω^u, ω^n и ω^{n+1}, а ϑ^u_{vw} — некоторая 2-форма не содержащая базисных форм и форм ϑ^u_{vws}, ϑ^u_{vwn} и $\vartheta^u_{vw\,n+1}$. Подставив эти разложения в предыдущие уравнения, получим

$$\begin{aligned}(h^u_{vw} + r^u_{vwn\,n+1})\omega^w \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + r^u_{v[wsp]}\omega^s \wedge \omega^p \wedge \omega^w +\\ + r^u_{v[ws]n}\omega^s \wedge \omega^n \wedge \omega^w + r^u_{v[ws]\,n+1}\omega^s \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^w + \vartheta^u_{v[ws]} \wedge \omega^s \wedge \omega^w +\\ + \vartheta^u_{vwn} \wedge \omega^n \wedge \omega^w + \vartheta^u_{vw\,n+1} \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^w + \vartheta^u_{vw} \wedge \omega^w = 0.\end{aligned}$$

Так как все слагаемые входящие в это тождество линейно независимы между собой, то каждое из них должно равняться нулю:

$$\begin{gathered} h^u_{vw} + r^u_{vwn\,n+1} = 0, \quad \vartheta^u_{vwn} = 0, \quad \vartheta^u_{vw\,n+1} = 0, \quad \vartheta^u_{vw} = 0,\\ \vartheta^u_{v[ws]} = 0, \quad r^u_{v[wsp]} = r^u_{v[ws]n} = r^u_{v[ws]\,n+1} = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Учитывая эти соотношения, получаем, что (44) примет вид

$$\Omega^u_{vw} + k^u_w\omega^n_v \wedge \omega^{n+1} + k^u_v\omega^n_w \wedge \omega^{n+1} = -h^u_{vw}\omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega^u_{vws} \wedge \omega^s, \tag{46}$$

где используется обозначение

$$\omega^u_{vws} = \vartheta^u_{vws} - r^u_{vwsp}\omega^p - r^u_{vwsn}\omega^n - r^u_{vws\,n+1}\omega^{n+1},$$

причём в силу (45) справедливы равенства

$$\omega^u_{vws} = \omega^u_{vsw}. \tag{47}$$

Рассмотрим уравнение (37). Запишем формы $\nabla t_u + k^v_u\omega^n_v - \mu^v\omega^n_{vu}$ и $\nabla t_n + k^u_n\omega^n_u$ в виде

$$\begin{aligned}\nabla t_u + k^v_u\omega^n_v - \mu^v\omega^n_{vu} &= m_{uv}\omega^v + m_{un}\omega^n + m_{u\,n+1}\omega^{n+1} + \vartheta_u,\\ \nabla t_n + k^u_n\omega^n_u &= m_{nu}\omega^u + m_{nn}\omega^n + m_{n\,n+1}\omega^{n+1} + \vartheta_n,\end{aligned}$$

где ϑ_u и ϑ_n — некоторые 1-формы, не содержащие базисных форм. Подставив эти разложения в уравнения (37), получим

$$\begin{aligned}m_{[uv]}\omega^v \wedge \omega^u \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_u \wedge \omega^u \wedge \omega^{n+1} +&\\ + (m_{nu} - m_{un})\omega^u \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_n \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} &= 0.\end{aligned}$$

Так как все слагаемые, входящие в это тожество, линейно независимы, имеем

$$m_{nu} = m_{un}, \quad m_{[uv]} = 0, \quad \vartheta_u = 0, \quad \vartheta_n = 0,$$

поэтому формы $\nabla t_u + k^v_u\omega^n_v - \mu^v\omega^n_{vu}$ и $\nabla t_n + k^u_n\omega^n_u$ примут вид

$$\nabla t_u + k^v_u\omega^n_v - \mu^v\omega^n_{vu} = m_{uv}\omega^v + m_{un}\omega^n + m_{u\,n+1}\omega^{n+1}, \tag{48}$$

$$\nabla t_n + k^u_n\omega^n_u = m_{un}\omega^u + m_{nn}\omega^n + m_{n(n+1)}\omega^{n+1}, \tag{49}$$

причём справедливы равенства

$$m_{uv} = m_{vu}. \tag{50}$$

Решим уравнение (33). С учётом (48) его можно записать в виде

$$m_{uv}\omega^v \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + (\Omega^n_{uv} + t_v\omega^n_u \wedge \omega^{n+1} + t_u\omega^n_v \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^v = 0.$$

Формы $\Omega^n_{uv} + t_v\omega^n_u \wedge \omega^{n+1} + t_u\omega^n_v \wedge \omega^{n+1}$ запишем в виде

$$\begin{aligned}\Omega^n_{uv} + t_v\omega^n_u \wedge \omega^{n+1} + t_u\omega^n_v \wedge \omega^{n+1} = l^n_{uvws}\omega^w \wedge \omega^s + l^n_{uvwn}\omega^w \wedge \omega^n +\\ + l^n_{uvw\,n+1}\omega^w \wedge \omega^{n+1} + l^n_{uvn\,n+1}\omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta^n_{uvw} \wedge \omega^w +\\ + \vartheta^n_{uvn} \wedge \omega^n + \vartheta^n_{uv\,n+1} \wedge \omega^{n+1} + \vartheta^n_{uv},\end{aligned} \tag{51}$$

где ϑ^n_{uvw}, ϑ^n_{uvn}, $\vartheta^n_{uv\,n+1}$ — некоторые 1-формы, не содержащие базисных форм ω^u, ω^n и ω^{n+1}, а ϑ^n_{uv} — некоторые 2-формы, не содержащие базисных форм и форм ϑ^n_{uvw}, ϑ^n_{uvn}, $\vartheta^n_{uv\,n+1}$. Подставив это выражение в предыдущее уравнение, получим

$$\begin{aligned}(m_{uv} + l^n_{uvn\,n+1})\omega^v \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + l^n_{u[vws]}\omega^w \wedge \omega^s \wedge \omega^v + l^n_{u[vw]n}\omega^w \wedge \omega^n \wedge \omega^v +\\ + l^n_{u[vw]\,n+1}\omega^w \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^v + \vartheta^n_{u[vw]} \wedge \omega^w \wedge \omega^v + \vartheta^n_{uvn} \wedge \omega^n \wedge \omega^v +\\ + \vartheta^n_{uv\,n+1} \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^v + \vartheta^n_{uv} \wedge \omega^v = 0.\end{aligned}$$

Так как все слагаемые в этом тождестве линейно независимы, имеем

$$\begin{gathered}m_{uv} + l^n_{uvn\,n+1} = 0, \quad \vartheta^n_{uvn} = 0, \quad \vartheta^n_{uv\,n+1} = 0, \quad \vartheta^n_{uv} = 0,\\ \vartheta^n_{u[vw]} = 0, \quad l^n_{u[vw]n} = l^n_{u[vw]\,n+1} = l^n_{u[vws]} = 0.\end{gathered} \tag{52}$$

С учётом этих соотношений выражение (51) может быть записано в виде

$$\Omega^n_{uv} + t_v\omega^n_u \wedge \omega^{n+1} + t_u\omega^n_v \wedge \omega^{n+1} = -m_{uv}\omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega^n_{uvw} \wedge \omega^w, \tag{53}$$

где

$$\omega^n_{uvw} = \vartheta^n_{uvw} - l^n_{uvws}\omega^s - l^n_{uvwn}\omega^n - l^n_{uvw\,n+1}\omega^{n+1},$$

причём в силу соотношений (52) будут выполняться условия

$$\omega^n_{uvw} = \omega^n_{uwv}. \tag{54}$$

Итак, дифференциальное продолжение второй серии структурных уравнений (28), (29) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&d\omega^u_{vw} + \omega^u_s \wedge \omega^s_{vw} - \omega^s_v \wedge \omega^u_{sw} - \omega^s_w \wedge \omega^u_{vs} - \mu^u \omega^n_{vw} \wedge \omega^{n+1} = \\
&\quad = -k^u_w \omega^n_v \wedge \omega^{n+1} - k^u_v \omega^n_w \wedge \omega^{n+1} - h^u_{vw} \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega^u_{vws} \wedge \omega^s, \\
&d\omega^n_{uv} - \omega^w_{uv} \wedge \omega^n_w - \omega^w_u \wedge \omega^n_{wv} - \omega^n_{uv} \wedge \omega^n_n + \omega^n_{uw} \wedge \omega^w_v = \\
&\quad = -t_v \omega^n_u \wedge \omega^{n+1} - t_u \omega^n_v \wedge \omega^{n+1} - m_{uv} \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega^n_{uvw} \wedge \omega^w, \\
&dt_u - t_v \omega^v_u - t_u \omega^n_n - t_n \omega^n_u + k^v_u \omega^n_v = m_{uv} \omega^v + m_{un} \omega^n + m_{u\,n+1} \omega^{n+1} + \mu^v \omega^n_{vu}, \\
&dt_n - 2t_n \omega^n_n + k^u_n \omega^n_u = m_{un} \omega^u + m_{nn} \omega^n + m_{n(n+1)} \omega^{n+1}, \\
&dk^u_v + k^w_v \omega^u_w - k^u_w \omega^w_v - k^u_n \omega^n_v - 2k^u_v \omega^n_n = h^u_{vw} \omega^w + h^u_{vn} \omega^n + h^u_{v\,n+1} \omega^{n+1} + \mu^w \omega^u_{wv}, \\
&dk^u_n + k^v_n \omega^u_v - 3k^u_n \omega^n_n = h^u_{vn} \omega^v + h^u_{nn} \omega^n + h^u_{n\,n+1} \omega^{n+1}, \\
&dk^u_{n+1} + k^v_{n+1} \omega^u_v - 3k^u_{n+1} \omega^n_n = \\
&\quad = 3\mu^u \mu^v \omega^n_v + (h^u_{v\,n+1} - 2\mu^u t_v)\omega^v + (h^u_{n\,n+1} - 2\mu^u t_n)\omega^n + h^u_{n+1\,n+1} \omega^{n+1},
\end{aligned} \tag{55}
$$

причём справедливы равенства

$$
h^u_{vw} = h^u_{wv}, \quad m_{uv} = m_{vu}, \quad \omega^n_{uvw} = \omega^n_{uwv}, \quad \omega^u_{vws} = \omega^u_{vsw}.
$$

Из (55) видно, что при закреплённой точке $p \in M$

$$
\begin{aligned}
&\delta t_u = t_v \pi^v_u + t_u \pi^n_n + t_n \pi^n_u - k^v_u \pi^n_v + \mu^v \pi^n_{vu}, \\
&\delta t_n = 2t_n \pi^n_n - k^u_n \pi^n_u, \\
&\delta k^u_v = -k^w_v \pi^u_w + k^u_w \pi^w_v + k^u_n \pi^n_v + 2k^u_v \pi^n_n + \mu^w \pi^u_{wv}, \\
&\delta k^u_n = -k^v_n \pi^u_v + 3k^u_n \pi^n_n, \\
&\delta k^u_{n+1} = -k^v_{n+1} \pi^u_v + 3k^u_{n+1} \pi^n_n + 3\mu^u \mu^v \pi^n_v,
\end{aligned}
$$

где $\pi^a_b = \omega^a_b|_{\omega_c=0}$, $\pi^a_{bc} = \omega^a_{bc}|_{\omega_d=0}$ — формы, определяющие инфинитезимальное перемещение репера в пространстве T_p. Эти уравнения означают, что величины $\{k^u_n\}$, $\{t_n, k^u_n\}$, $\{\mu^u, k^u_{n+1}\}$, $\{\mu^u, k^u_v, k^u_n\}$, $\{\mu^u, t_u, t_n, k^u_v, k^u_n\}$ являются тензорами.

5. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^j) \quad (i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n). \tag{56}
$$

С этой системой связана три-ткань $W(1, n, 1)$, заданная на многообразии переменных x^i, t, состоящая из семейств λ_α:

$$
\lambda_1\colon\ x^i = \mathrm{const}, \quad \lambda_2\colon\ t = \mathrm{const}, \quad \lambda_3\colon\ \varphi^i(t) = c^i = \mathrm{const},
$$

причём последнее семейство состоит из интегральных кривых системы уравнений (56).

Исключая из первых $n-1$ уравнений системы (56) dt, получим эквивалентную систему

$$
\begin{aligned}
&f^n dx^u - f^u dx^n = 0, \\
&dx^n - f^n dt = 0,
\end{aligned}
$$

где, как и ранее, $u, v, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим

$$\begin{aligned} \omega^u &= f^n dx^u - f^u dx^n, \\ \omega^n &= \frac{dx^n}{f^n}, \\ \omega^{n+1} &= -dt. \end{aligned} \tag{57}$$

Тогда слоения ткани $W(1, n, 1)$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\lambda_1\colon\ dx^i = 0, \quad \text{или} \quad \omega^i = 0, \\ &\lambda_2\colon\ dt = 0, \quad \text{или} \quad \omega^{n+1} = 0, \\ &\lambda_3\colon\ d\varphi^i(t, x^j) = 0, \quad \text{или} \quad \omega^u = 0, \quad \omega^n + \omega^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, структурные уравнения три-ткани W, связанной с системой обыкновенных дифференциальных уравнений, должны иметь вид (9).

Из (57) находим, что

$$\begin{aligned} dx^u &= (f^n)^{-1}\omega^u + f^u\omega^n, \\ dx^n &= f^n\omega^n, \\ dt &= -\omega^{n+1}. \end{aligned} \tag{58}$$

Так как $d\omega^{n+1} = 0$, то из (9) следует, что

$$\omega^n_n = \lambda\,\omega^{n+1} = -\lambda\,dt.$$

Дифференцируя внешним образом второе равенство (57), имеем

$$d\omega^n = d\left(\frac{dx^n}{f^n}\right) = \frac{-df^n \wedge dx^n}{(f^n)^2} = -\frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^u\right) \wedge dx^n,$$

или, учитывая (58),

$$d\omega^n = \omega^n \wedge \left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt\right) + \omega^u \wedge \left(-\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^n\right).$$

Сравнивая полученное выражение со вторым уравнением (9), находим, что

$$\omega^n_n = \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt, \quad \lambda = -\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}, \tag{59}$$

$$\omega^n_u = -\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^n. \tag{60}$$

Продифференцировав первое равенство (57), получим

$$\begin{aligned} &d\omega^u = df^n \wedge dx^u - df^u \wedge dx^n = \\ &= \frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt \wedge dx^u + \frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^v \wedge dx^u + \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n \wedge dx^u - \frac{\partial f^u}{\partial t}\,dt \wedge dx^n - \frac{\partial f^u}{\partial x^v}\,dx^v \wedge dx^n, \end{aligned}$$

или, учитывая (58),

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt\wedge\omega^u + \frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt\wedge dx^n + \\ &+ \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}(\omega^v\wedge\omega^u + f^v dx^n\wedge\omega^u + f^u\omega^v\wedge dx^n) + \\ &+ \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n\wedge\omega^u - \frac{\partial f^u}{\partial t}\,dt\wedge dx^n - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\,\omega^v\wedge dx^n = \\ &= \omega^v\wedge\left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^u - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\,dx^n - \left(\frac{f^w}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,dx^n + \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n\right)\delta^u_v\right) - \left(f^u\frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n\frac{\partial f^u}{\partial t}\right)\omega^{n+1}\wedge\omega^n. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное равенство с первым уравнением (9), получаем

$$\mu^u = f^u\frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n\frac{\partial f^u}{\partial t}, \tag{61}$$

$$\begin{aligned} \omega^u_v &= \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^u - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\,dx^n - \\ &\quad - \frac{1}{f^n}\,\delta^u_v\left(\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,dx^n + \frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n\right). \end{aligned} \tag{62}$$

Теорема 2. *Система обыкновенных дифференциальных уравнений автономна в том и только том случае, если μ^u и ω^n_n равны нулю.*

Доказательство. Пусть система дифференциальных уравнений автономна, т. е. функции f^i в правой части (56) зависят только от x^j. Тогда из (61) следует, что $\mu^u = 0$, а из (59) получаем, что $\omega^n_n = 0$.

Обратно, пусть $\mu^u = 0$ и $\omega^n_n = 0$. Тогда из (59) следует, что $\frac{\partial f^n}{\partial t} = 0$, а из (61) получаем, что $\frac{\partial f^u}{\partial t} = 0$, т. е. система дифференциальных уравнений автономна. □

Найдём выражение форм и тензоров ткани следующей дифференциальной окрестности через производные от функций f^i. Дифференцируя (59), получим

$$\begin{aligned} d\omega^n_n &= d\left(\frac{1}{f^n}\right)\frac{\partial f^n}{\partial t}\wedge dt + \frac{1}{f^n}\,d\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)\wedge dt = -\frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^u\wedge dt - \\ &- \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n\wedge dt + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u\partial t}\,dx^u\wedge dt + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial t}\,dx^n\wedge dt, \end{aligned}$$

или, учитывая (58),

$$d\omega_n^n = \left(\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^u} - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t}\right)\omega^u \wedge \omega^{n+1} +$$
$$+\left(f^u\frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n\frac{\partial f^u}{\partial t}\right)\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^n \wedge \omega^{n+1} -$$
$$-\left(\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} + \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n} - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^u}{\partial t}\right)\omega^n \wedge \omega^{n+1}.$$

Сравнивая полученное равенство с последним уравнением (28), находим, что

$$t_u = \frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t} - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t}, \tag{63}$$

$$t_n = \frac{1}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t} + \frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^u}{\partial t} - f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t}\right) - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t}. \tag{64}$$

Дифференцируя внешним образом (60) и подставляя в получившееся выражение (58), получаем

$$d\omega_u^n = \frac{3}{(f^n)^4}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt \wedge dx^n + \frac{3}{(f^n)^5}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\omega^v \wedge dx^n -$$
$$-\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial^2 f^n}{\partial t \partial x^u}\,dt \wedge dx^n - \frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial x^u}\,\omega^v \wedge dx^n.$$

Теперь, поскольку

$$\omega_u^v \wedge \omega_v^n = -\frac{1}{(f^n)^5}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\omega^v \wedge dx^n + \frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt \wedge dx^n,$$
$$\omega_u^n \wedge \omega_n^n = -\frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dx^n \wedge dt,$$

имеем

$$d\omega_u^n - \omega_u^v \wedge \omega_v^n - \omega_u^n \wedge \omega_n^n = \left(\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t} - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial t \partial x^u}\right)\omega^n \wedge \omega^{n+1} +$$
$$+\frac{4}{(f^n)^5}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\omega^v \wedge dx^n - \frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial x^u}\,\omega^v \wedge dx^n.$$

Сравнивая полученный результат со вторым уравнением (28) и учитывая найденные выше выражения для коэффициентов t_u, находим, что

$$\omega_{uv}^n = \frac{1}{(f^n)^4}\left(\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial x^u} - \frac{4}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\right)dx^n. \tag{65}$$

Дифференцирование (61) даёт

$$d\mu^u = \left(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - \frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t} - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t}\right)dx^v +$$
$$+\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} - \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^u}{\partial t} - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t}\right)dx^n + \left(f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial t^2} - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t^2}\right)dt.$$

Так как

$$\mu^v \wedge \omega_v^u = \left(\frac{f^v}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} - \frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\right) dx^u - \left(\frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}\right) dt +$$
$$+ \Big(-\frac{f^v}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + \frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} - \frac{f^u f^v}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + \frac{f^v}{f^n}\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} -$$
$$- \frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n} + \frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\Big) dx^n$$

и

$$\mu^u \omega_n^n = \frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2 dt - \frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}\, dt,$$

то с учётом (58) получаем

$$d\mu^u + \mu^v \wedge \omega_v^u - 2\mu^u \omega_n^n =$$
$$= \left(f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial t^2} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial t^2} + 3\frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2 - 3\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)\omega^{n+1} +$$
$$+ \frac{1}{f^n}\Big(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - \frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t} - f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} +$$
$$+ \frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\delta_v^u - \frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\delta_v^u\Big)\omega^v +$$
$$+ \Big(f^u f^v \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - f^v f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + f^n \frac{\partial f^u}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} -$$
$$- (f^n)^2 \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t} + f^n \frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} - f^u \frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n} - f^u \frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\Big)\omega^n.$$

Сравнивая полученное выражение с уравнением (29), находим, что

$$k_v^u = \frac{1}{f^n}\Big(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - \frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t} -$$
$$- f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + \frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\delta_v^u - \frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\delta_v^u\Big), \tag{66}$$

$$k_n^u = f^u f^v \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - f^v f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + f^u f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} - (f^n)^2 \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t} +$$
$$+ f^n \frac{\partial f^u}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t} + f^n \frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} - f^u \frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n} - f^u \frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}, \tag{67}$$

$$k_{n+1}^u = f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial t^2} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial t^2} + 3\frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2 - 3\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}. \tag{68}$$

Наконец, дифференцируя (61), получаем

$$d\omega^u_v = -\frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + 2\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t\partial x^v} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial t}\,\delta^u_v - f^w\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^w}\,\delta^u_v\right)dx^n\wedge dt -$$
$$- \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^w\wedge dx^u + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\,dx^w\wedge dx^u +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + 2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\,\delta^u_v + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\,\delta^u_v - f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\,\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\,\delta^u_v\right)dx^w\wedge dx^n +$$
$$+ \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\,dt\wedge dx^u - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt\wedge dx^u + \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_v dx^w\wedge dt -$$
$$- \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\,\delta^u_v dx^w\wedge dt + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v}\,dx^n\wedge dx^u - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^n\wedge dx^u.$$

Пользуясь тем, что

$$\omega^w_v\wedge\omega^u_w =$$
$$= \frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,dx^w\wedge dx^u - \frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^w\wedge dx^n + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial x^v}\,dx^u\wedge dx^n\right)$$

и

$$\mu^u\omega^n_v\wedge\omega^{n+1} = \frac{f^u}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^n\wedge dt - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^n\wedge dt,$$

учитывая (58), получаем

$$d\omega^u_v - \omega^w_v\wedge\omega^u_w - \mu^u\omega^n_v\wedge\omega^{n+1} = \frac{1}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + \frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta^u_v - \right.$$
$$\left. - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial t}\,\delta^u_v - \frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\right)\omega^n\wedge\omega^{n+1} +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^3}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + 2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\,\delta^u_v + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,\delta^u_v - \right.$$
$$- f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\,\delta^u_v - f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\,\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\,\delta^u_v +$$
$$\left. + \frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} - 2\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\omega^w\wedge dx^n +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^3}\left(-\frac{2}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\omega^w\wedge\omega^u + \frac{1}{(f^n)^3}\left(-2\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + \right.$$
$$\left. + f^w\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v} + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial x^v}\right)dx^n\wedge\omega^u +$$

$$+\frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}-\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\right)\omega^u\wedge dt+$$
$$+\frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_v-\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\,\delta^u_v\right)\omega^w\wedge dt.$$

Сравнивая полученный результат с первым уравнением (28) и учитывая найденные ранее выражения для коэффициентов k^u_v, находим, что

$$\omega^u_{vw}=\frac{1}{(f^n)^3}\left(\frac{2}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\omega^u+$$
$$+\frac{1}{(f^n)^2}\left(-\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_w-\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_v+\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\,\delta^u_w+\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\,\delta^u_v\right)dt+$$
$$+\frac{1}{(f^n)^3}\biggl(-\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}-\frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\,\delta^u_v-2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\delta^u_w-$$
$$-\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,\delta^u_v-\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\delta^u_w+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\,\delta^u_v+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^v}\,\delta^u_w+$$
$$+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\,\delta^u_v+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s\partial x^v}\,\delta^u_w+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\,\delta^u_v+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v}\,\delta^u_w+$$
$$+2\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}+f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v}\biggr)dx^n. \tag{69}$$

Формулы (65) и (69) показывают, что трёхиндексные формы ω^n_{uv} и ω^u_{vw} выражаются через базисные формы ω^u, ω^n и ω^{n+1}. Это означает, что к динамической системе $dx^i=f^i(t,x^j)\,dt$ естественным образом присоединяется аффинная связность. Назовём её *канонической связностью* динамической системы.

Ненулевые компоненты тензора кривизны находим из предыдущих соотношений:

$$R^u_{vws}=-\frac{1}{(f^n)^3}\left(\frac{2}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\delta^u_s,$$
$$R^u_{vwn}=-\frac{1}{2(f^n)^2}\biggl(-\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}-\frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\,\delta^u_v-$$
$$-2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\delta^u_w-\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,\delta^u_v-\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\delta^u_w+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\,\delta^u_v+$$
$$+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^v}\,\delta^u_w+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\,\delta^u_v+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s\partial x^v}\,\delta^u_w+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\,\delta^u_v+$$
$$+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v}\,\delta^u_w+2\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}+f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v}\biggr),$$
$$R^u_{vw\,n+1}=\frac{1}{2(f^n)^2}\left(-\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_w-\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_v+\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\,\delta^u_w+\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\,\delta^u_v\right),$$

$$R^u_{vn\,n+1} = \frac{1}{2}k^u_v = \frac{1}{2f^n}\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - \frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + \frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta^u_v - \frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta^u_v\right),$$

$$R^n_{uvn} = -\frac{1}{2(f^n)^3}\left(\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial x^u} - \frac{4}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\right),$$

$$R^n_{un\,n+1} = R^n_{nu\,n+1} = \frac{1}{2}\,t_u = \frac{1}{2(f^n)^2}\left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^u} - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t}\right),$$

$$R^n_{nn\,n+1} = \frac{1}{2}\,t_n = \frac{1}{2f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n} + \frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^u}{\partial t} - f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t}.$$

Вернёмся к автономным системам. Следующее утверждение проясняет геометрический смысл условий, найденных в теореме 1.

Теорема 3. *Условие $\mu^u = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы многообразие M ткани $W(1,n,1)$ расслаивалось на двумерные подмногообразия, несущие слои первого и третьего слоений этой ткани. Поверхности V являются многообразиями абсолютного параллелизма тогда и только тогда, когда выполняются ещё и условия $\omega^n_n = 0$.*

Доказательство. Как видно из первого уравнения системы (9), условие $\mu^u = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы система уравнений $\omega^u = 0$ была вполне интегрируемой. Отсюда следует первая часть теоремы.

Согласно теореме 2 условия автономности системы имеют вид $\mu^u = 0$ и $\omega^n_n = 0$. Первые равенства, как только что было показано, означают, что система $\omega^u = 0$ вполне интегрируема и многообразие ткани расслаивается на двумерные поверхности V. Из выражений для компонент тензора кривизны следует, что ненулевыми являются только R^u_{vws}, R^u_{vwn}, R^n_{uvn}. Поэтому на поверхностях V, определяемых уравнениями $\omega^u = 0$, форма кривизны канонической связности обращается в нуль, т. е. эти поверхности являются поверхностями абсолютного параллелизма относительно этой связности.

Обратно, пусть V — поверхности абсолютного параллелизма относительно канонической связности. Тогда формы кривизны этой связности должны обращаться на поверхности V в нуль. Это требование даёт равенство нулю компонент R^u_{vws}, R^u_{vwn}, R^n_{uvn}, что в свою очередь даёт $\omega^n_n = 0$. □

Литература

[1] Азизова (Селиванова) Н. Х. О тканях из кривых и поверхностей // Ученые записки МГПИ. Вопросы дифференциальной геометрии. — 1970. — Т. 374, № 1. — С. 7—17

[2] Акивис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // ДАН СССР. — 1972. — Т. 203, № 2. — С. 263—266.

[3] Акивис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1973. — Т. 4. — С. 179—204.

[4] Акивис М. А., Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения. — Тверь: Тверской гос. ун-т., 2010.

[5] Апресян Ю. А. О многомерных три-тканях, образованных двумя семействами гиперповерхностей и одним семейством кривых // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1977. — № 4. — С. 132—135.

[6] Апресян Ю. А. Три-ткани из кривых и гиперповерхностей и семейства диффеоморфизмов одномерных многообразий // Дифференциальная геометрия. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1977. — С. 10—12.

[7] Апресян Ю. А. Трёхпараметрическое семейство диффеоморфизмов кривой на кривую, содержащее два линейных комплекса однопараметрических подсемейств специального типа // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1984. — С. 8—15.

[8] Апресян Ю. А. Об одном классе три-тканей на четырёхмерном многообразии и соответствующем дифференциальном уравнении третьего порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1985. — № 1. — С. 3—8.

[9] Гольдберг В. В. Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей // Сборник статей по дифференциальной геометрии. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1974. — С. 52—69.

[10] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: Моск. педагогич. гос. ун-т., 2003.

[11] Нгуен Зоан Туан. О многомерных три-тканях типа $W(P,P,Q)$ // Геометрия погружённых многообразий. — М.: Моск. гос. пед. ин-т, 1986. — С. 101—112.

[12] Нгуен Зоан Туан. Некоторые подклассы три-тканей $W(P,P,Q)$ с постоянными компонентами основного тензора // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Калининский гос. ун-т, 1987. — С. 82—87.

[13] Селиванова (Азизова) Н. Х. Интранзитивные семейства преобразований // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1984. — № 12. — С. 69—71.

[14] Селиванова (Азизова) Н. Х. О три-ткани из кривых и гиперповерхностей и однопараметрическом семействе диффеоморфизмов // Горьковский инж.-строит. ин-т. — Горький, 1988. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 6.06.1988; № 4448-В88.

[15] Akivis M. A., Shelekhov A. M. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.