О геометрии слабо косимплектических многообразий

В. Ф. КИРИЧЕНКО
Московский педагогический государственный университет
e-mail: highgeom@yandex.ru

Е. В. КУСОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: sofuslee@mail.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: геометрия, многообразие, тензор, слабо косимплектическая структура.

Аннотация

В статье рассмотрены классы слабо косимплектических многообразий, тензор Римана—Кристоффеля которых удовлетворяет контактным аналогам тождеств Римана—Кристоффеля. Также найдены дополнительные свойства симметрии тензора Римана—Кристоффеля, на основе которых введена классификация слабо косимплектических многообразий.

Abstract

V. F. Kirichenko, E. V. Kusova, On geometry of weakly cosymplectic manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 33—42.

We consider classes of weakly cosymplectic manifolds whose Riemannian curvature tensors satisfy contact analogs of the Riemannian–Christoffel identities. Additional properties of the Riemannian curvature tensor symmetry are found and a classification of weakly cosymplectic manifolds is obtained.

Слабо косимплектические структуры впервые, по-видимому, были рассмотрены Х. Проппе [16], а затем систематически изучались сначала Д. Блэром [10], а затем Д. Блэром и Д. Шоуэрсом [11], которые впервые ввели понятие точнейше косимплектической структуры. Также эти структуры изучались В. Ф. Кириченко [3, 14]. Слабо косимплектические структуры — одно из наиболее интересных обобщений косимплектических структур. Они являются контактными аналогами приближённо кэлеровых структур в эрмитовой геометрии.

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n+1$ выше трёх, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M, $\mathfrak{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M, d — оператор внешнего дифференцирования алгебры Грассмана $\Lambda(M)$ гладкого многообразия M, ∇ — риманова связность. Все многообразия, тензорные поля и подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Тензорные поля на M будем называть просто тензорами.

Определение 1. *Контактной структурой* на многообразии M называется такая дифференциальная 1-форма η на M, что в каждой точке многообразия

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n} \neq 0.$$

Многообразие с фиксированной на нём контактной структурой называется *контактным многообразием* [3]. Если на многообразии определена тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей, где η — дифференциальная 1-форма из $\Lambda(M)$, называемая *контактной формой структуры*, ξ — векторное поле, называемое *характеристическим*, а Φ — эндоморфизм модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, и при этом выполняются условия

$$\Phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \Phi = 0, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \Phi^2 = -\mathrm{id} + \xi \otimes \eta,$$

где id — тождественное преобразование, то такую тройку называют *почти контактной структурой*. Если на M дополнительно фиксирована риманова структура $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и выполняется условие

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in M,$$

то четвёрка (η, ξ, Φ, g) называется *почти контактной метрической структурой*, а многообразие, на котором фиксирована такая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием*.

Определение 2. *Слабо косимплектической* структурой называется почти контактная метрическая структура $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$, для которой верно равенство

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Многообразие, на котором фиксирована слабо косимплектическая структура, называется *слабо косимплектическим многообразием*.

Определение 3. Слабо косимплектическая структура называется *косимплектической*, если $\nabla_X(\Phi)Y = 0$.

Определение 4. Слабо косимплектическая структура называется *точнейше косимплектической*, если $d\eta = 0$.

Пусть M — слабо косимплектическое многообразие. Модуль $\mathfrak{X}(M)$ распадается в прямую сумму распределений $\mathfrak{M} = \operatorname{Im}\mathfrak{m} = \operatorname{Ker}\Phi$ и $\mathfrak{L} = \operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Ker}\eta$:

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{L};$$

$\mathfrak{L}$ называется первым, а $\mathfrak{M}$ — вторым фундаментальным распределением. Распределения $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ инвариантны относительно эндоморфизма Φ и взаимно ортогональны. При этом

$$\check{\Phi}^2 = -\mathrm{id}, \quad \langle \check{\Phi} X, \check{\Phi} Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{L},$$

где $\check{\Phi} = \Phi|_{\mathfrak{L}}$. Это означает, что на распределении $\mathfrak{L}$ пара $\{\check{\Phi}, \check{g}\}$, где $\check{g} = g|_{\mathfrak{L}}$, определяет эрмитову структуру с метрикой

$$h(X,Y) = \langle X,Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X, \Phi Y\rangle.$$

Рассмотрим модуль $\mathfrak{L}^C$, являющийся комплексификацией контактного распределения. Тогда любой элемент $\mathfrak{L}^C$ можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{N} z_k X^k = \{z_1X_1, \dots, z_1X_N\},$$

где $z_k \in \mathbb{C}$, $X_k \in \mathfrak{L}$ и $N \in \mathbb{N}$. В распределении $\mathfrak{L}$ естественным образом определён оператор комплексного сопряжения по формуле

$$\tau(X) = \tau\biggl(\sum_{k=1}^{n} z_k X_k\biggr) = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k X_k.$$

Пусть $\Phi^{\mathbb{C}}$ — комплексификация эндоморфизма Φ, т. е. $\Phi^{\mathbb{C}} = \mathrm{id}^{\mathbb{C}} \otimes \Phi$. Помимо оператора τ, в модуле $\mathfrak{L}^C$ естественным образом определяются ещё два взаимно-дополнительных проектора

$$\sigma = \frac{1}{2}\bigl(\mathrm{id} - \sqrt{-1}\Phi^{\mathbb{C}}\bigr), \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}\bigl(\mathrm{id} + \sqrt{-1}\Phi^{\mathbb{C}}\bigr),$$

причём, очевидно, $\bar{\sigma} = \tau \circ \sigma$. Более того, сам модуль распадается в прямую сумму подмодулей $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ — образов проекторов σ и $\bar{\sigma}$ соответственно:

$$\mathfrak{L}^C = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}.$$

Тогда комплексификация модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$ распадается в прямую сумму трёх подмодулей:

$$\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M) = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{0}.$$

Пусть ω — форма смещения, φ — форма римановой связности ∇ на пространстве G-структуры.

Имеют место структурные уравнения Картана (или первая группа структурных уравнений связности ∇) [3, с. 209]:

$$d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j.$$

Задание почти контактной метрической структуры равносильно заданию G-структуры со структурной группой. Элементами этой G-структуры являются так называемые А-реперы, однозначно характеризуемые тем, что матрицы оператора Φ и метрического тензора в таком репере имеют вид соответственно

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Условимся считать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 0 до $2n$. Остальные индексы, т. е. $a, b, c, \dots$, пробегают значения от 1 до n. Альтернацию будем обозначать $[a, b]$, а симметризацию (a, b). Введём обозначения $\hat{a} = a + n$. Если почти контактная метрическая структура является слабо косимплектической, то на пространстве присоединённой G-структуры имеют место структурные уравнения

$$
\begin{aligned}
d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \frac{3}{2}C^{ab}\omega_b \wedge \omega, \\
d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{3}{2}C_{ab}\omega^b \wedge \omega, \\
d\omega &= C^{bc}\omega_b \wedge \omega_c + C_{bc}\omega^b \wedge \omega^c, \\
d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b + \left[\mathcal{A}^{ad}_{bc} - 2B^{adh}B_{hbc} + \frac{3}{2}C^{ad}C_{bc}\right]\omega^c \wedge \omega_d,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$, $\{C^{ab}\}$, $\{C_{ab}\}$ — системы функций, заданные на пространстве присоединённой G-структуры следующим образом:

$$
B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}, \quad C^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat{b}}, \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}, \quad C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}.
$$

Эти системы функций определяют тензоры B и C, называемые *первым* и *вторым структурным тензором*. Из определения слабо косимплектических структур следует, что $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$, $\{C^{ab}\}$, $\{C_{ab}\}$ кососимметричны. $A = \{A^{ad}_{bc}\}$ — тензор, называемый *структурным тензором третьего рода* или *тензором голоморфной секционной кривизны*. Отметим, что на пространстве расслоения реперов имеют место структурные уравнения связности

$$
d\omega^i_j = \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,
$$

где R^i_{jkl} — компоненты тензора кривизны римановой связности, называемого *тензором Римана—Кристоффеля*.

Для слабо косимплектических структур компоненты этого тензора имеют вид

$$
\begin{aligned}
R_{\hat{a}bcd} &= 0, \\
R_{abcd} &= -2B_{ab[cd]}, \\
R_{\hat{a}\hat{b}cd} &= -2B^{abh}B_{hcd}, \\
R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} &= -2B^{ab[cd]}, \\
R_{\hat{a}0b0} &= C^{ac}C_{bc}, \\
R_{\hat{a}bc\hat{d}} &= \mathcal{A}^{ad}_{bc} - B^{adh}B_{hbc} - \frac{5}{3}C^{ad}C_{bc}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Замечание. Остальные компоненты тензора Римана—Кристоффеля получаются с учётом стандартных свойств симметрии и вещественности этого тензора или равны нулю.

Если риманову структуру многообразия достроить до почти контактной метрической, то возникают дополнительные свойства симметрии этого тензора, которые нередко играют важную роль в геометрии таких структур:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CR}_1\colon\quad & \langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi Z,\Phi W\rangle,\\
\mathrm{CR}_2\colon\quad & \langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi Z,\Phi W\rangle +\\
& \quad + \langle R(\Phi^2 X,\Phi Y)\Phi^2 Z,\Phi W\rangle + \langle R(\Phi^2 X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi^2 W\rangle,\\
\mathrm{CR}_3\colon\quad & \langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi^2 Z,\Phi^2 W\rangle.
\end{aligned}$$

Тождества CR_1—CR_3 имеют большое значение в изучении строения почти контактных структур. Назовём их *классическими*.

На пространстве присоединённой G-структуры тождества CR_1—CR_3 эквивалентны следующим соотношениям [3]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CR}_1 &\iff R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0,\\
\mathrm{CR}_2 &\iff R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = 0,\\
\mathrm{CR}_3 &\iff R_{\hat{a}bcd} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Слабо косимплектические структуры, тензор Римана—Кристоффеля которых удовлетворяет тождеству CR_i, называются *структурами класса* CR_i. Если Υ — какой-либо подкласс слабо косимплектических структур, то обозначим $\Upsilon_i = \Upsilon \cap \mathrm{CR}_i$, $i = 1, 2, 3$. С учётом формул (3) очевидно включение

$$\mathrm{CR}_1 \subset \mathrm{CR}_2 \subset \mathrm{CR}_3.$$

Теорема 1. *Всякое слабо косимплектическое многообразие является многообразием класса* CR_3.

Доказательство. Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ — слабо косимплектическая структура. Согласно тождествам (2) для неё верно тождество $R_{\hat{a}bcd} = 0$. Это означает, что S — структура класса CR_3. □

Теорема 2. *Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ — слабо косимплектическая структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *S — структура класса CR_2;*
2) *на пространстве присоединённой G-структуры справедливы тождества $R_{abcd} = 0$;*
3) *первый структурный тензор параллелен в первой канонической связности.*

Доказательство. Согласно формулам (3) слабо косимплектическая структура S — структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединённой G-структуры компоненты тензора Римана—Кристоффеля вида R_{abcd} равны нулю. Из формул (2) следует, что $R_{abcd} = 0$ в том и только том случае, когда $\mathcal{B}_{abcd} = 0$. Продифференцируем внешним образом первую группу структурных уравнений (1):

$$dB_{abc} + B_{dcb}\omega_a^d + B_{abd}\omega_c^d + B_{adc}\omega_b^d = B_{abcd}\omega^d.$$

Пусть $\tilde{\nabla}$ — первая каноническая связность [16, с. 368]. Тогда $\tilde{\nabla} B_{abc} = B_{abcd}\omega^d$. Таким образом, $B_{abcd} = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\nabla} B_{abc} = 0$. Согласно [8, с. 122] тензор параллелен в соответствующей связности тогда и только тогда, когда его ковариантная производная равна нулю. □

Рассмотрим условия, при которых компоненты тензора Римана—Кристоффеля вида $R_{\hat{a}\hat{b}cd}$ равны нулю. С учётом равенств (2) получаем, что это имеет место в том и только том случае, когда

$$B^{abh}B_{hcd} = 0.$$

Свернём это тождество по парам индексов a и c, b и d. Получим

$$B_{abc}B^{abc} = 0.$$

Так как B^{abh} и B_{hcd} кососимметричны, то с учётом операции поднятия и опускания индексов получим, что

$$\sum_{a,b,c} |B_{abc}|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $B_{abc} = 0$. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Слабо косимплектическое многообразие M является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда его первый структурный тензор тождественно равен нулю.* □

Учитывая результаты [14], получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Слабо косимплектическое многообразие M является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно произведению келерова многообразия на пятимерную сферу, снабжённую канонической слабо косимплектической структурой, или прямому произведению келерова многообразия на вещественную прямую.*

На пространстве присоединённой G-структуры согласно (2) выполнено

$$R^0_{\hat{b}cd} = 0.$$

Проведя процедуру восстановления тождества [7], получим

$$\begin{aligned}\eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)(\Phi^2 Z) = \eta \circ R(\Phi X, \Phi Y)(\Phi^2 Z) +\\ + \eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y)(\Phi Z) + \eta \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y)(\Phi Z),\end{aligned}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Назовём это тождество *первым специальным свойством* симметрии тензора Римана—Кристоффеля. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Тензор Римана—Кристоффеля слабо косимплектического многообразия обладает первым специальным свойством:*

$$\eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)(\Phi^2 Z) = \\ = \eta \circ R(\Phi X, \Phi Y)(\Phi^2 Z) + \eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y)(\Phi Z) + \eta \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y)(\Phi Z), \quad (4)$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. □

Аналогично проведём процедуру восстановления тождества для соотношения $R_{\hat{a}0b0} = 0$ и получим

$$\eta \circ R(\Phi^2 X, \xi)\Phi^2 Y + \eta \circ R(\Phi X, \xi)\Phi Y = 0,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Назовём это тождество *вторым специальным свойством* симметрии тензора Римана—Кристоффеля.

Для слабо косимплектических структур введём следующую классификацию:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Y}_1\colon \quad \eta \circ R(\Phi^2 X, \xi)\Phi^2 Y + \eta \circ R(\Phi X, \Phi\xi)Y = 0, \\ &\mathrm{Y}_2\colon \quad \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\rangle, \\ &\mathrm{Y}_3\colon \quad \eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)(\Phi^2 Z) = \\ &\qquad = \eta \circ R(\Phi X, \Phi Y)(\Phi^2 Z) + \eta \circ R(\Phi^2 X, \Phi Y)(\Phi Z) + \eta \circ R(\Phi X, \Phi^2 Y)(\Phi Z), \end{aligned} \quad (5)$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Теорема 6. *Всякая слабо косимплектическая структура является структурой класса* Y_3.

Доказательство. Пусть S — слабо косимплектическая структура. Тогда на пространстве присоединённой G-структуры в силу формул (2)

$$R^0_{\hat{b}cd} = 0,$$

или верно тождество (4). Таким образом, S — слабо косимплектическая структура класса Y_3.

Обратно, если S — слабо косимплектическая структура класса Y_3, то по формулам (5) тензор Римана-Кристоффеля обладает первым специальным тождеством. Значит, на пространстве присоединённой G-структуры верно соотношение $R^0_{\hat{b}cd} = 0$. Согласно формулам (2) это верно для любой слабо косимплектической структуры. □

Теорема 7. S — *структура класса* Y_2 *тогда и только тогда, когда многообразие* M *локально эквивалентно произведению келерова многообразия на пятимерную сферу, снабжённую канонической слабо косимплектической структурой.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. □

Теорема 8. S — *структура класса* Y_1 *тогда и только тогда, когда многообразие* M *локально эквивалентно произведению приближённо келерова многообразия на вещественную прямую.*

Доказательство. Согласно формулам (2) $R_{\hat{a}0b0} = 0$ тогда и только тогда, когда $C^{ac}C_{bc} = 0$. Свернём это тождество по парам индексов a и b. Получим

$$C^{ac}C_{ac} = 0.$$

Так как C^{ac} и C_{bc} кососимметричны, то с учётом операции поднятия и опускания индексов получаем

$$\sum_{a,c} |C^{ac}|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $C^{ac} = 0$. Пусть π — естественная проекция пространства расслоения на его базу [8]. Тогда

$$\pi^* d\eta = d\omega^0 = d\omega = 0.$$

Значит, $d\eta = 0$. По определению M точнейше косимплектическое. С учётом [6] получаем, что M локально эквивалентно прямому произведению приближённо келерова многообразия на вещественную прямую.

Обратно, если M локально эквивалентно прямому произведению приближённо келерова многообразия на вещественную прямую, то M является точнейше косимплектическим. Тогда $d\eta = 0$. Следовательно, $d\omega = 0$. Согласно (1) $C^{ac} = 0$. С учётом формул (2) и (5) получаем, что слабо косимплектическая структура принадлежит классу Y_1. □

Теорема 9. *S — структура класса $\mathrm{Y}_1 \cap \mathrm{Y}_2$ тогда и только тогда, когда многообразие M локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.*

Доказательство. Если $M \in \mathrm{CR}_1$, то первый структурный тензор равен нулю. Если тензор Римана—Кристоффеля удовлетворяет первому дополнительному свойству симметрии, тогда второй структурный тензор тождественно равен нулю. Значит, на пространстве присоединённой G-структуры $\Phi^i_{j,k} = 0$, или $\nabla_X(\Phi)Y = 0$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$, т. е. M — косимплектическое многообразие. □

Теорема 10. *Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ — слабо косимплектическая структура на многообразии M. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *всякая слабо косимплектическая структура является структурой класса CR_3 и CR_2;*
2) *S — структура класса CR_1 тогда и только тогда, когда многообразие M локально эквивалентно либо произведению келерова многообразия на пятимерную сферу, снабжённую канонической слабо косимплектической структурой, либо прямому произведению приближённо келерова многообразия на вещественную прямую.*

Доказательство. То, что всякая слабо косимплектическая структура является структурой класса CR_3, следует из теоремы 1. Докажем, что всякая слабо косимплектическая структура является структурой класса CR_2. В силу теоремы 2 слабо косимплектическая структура S принадлежит классу CR_2 тогда и только тогда, когда $B_{abcd} = 0$. Действительно, B_{abcd} симметрична по двум последним аргументам и кососимметрична по трём первым [15]:

$$B_{abcd} = B_{abdc} = -B_{adbc} = -B_{adcb} = B_{acdb} = B_{acbd} = -B_{abcd}.$$

Следовательно, $B_{abcd} = 0$. □

Основная теорема. *Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ — слабо косимплектическая структура на многообразии M. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

1) *слабо косимплектическая структура S является структурой класса $\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$*;
2) *слабо косимплектическая структура S является структурой класса CR_1*;
3) *многообразие M локально эквивалентно либо произведению келерова многообразия на пятимерную сферу, снабжённую канонической слабо косимплектической структурой, либо прямому произведению келерова многообразия на вещественную прямую.*

Доказательство. Пусть S — слабо косимплектическая структура класса $\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$. Тогда по теоремам 7, 8 многообразие M, на котором определена такая структура, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на пятимерную сферу, снабжённую канонической слабо косимплектической структурой, либо прямому произведению келерова многообразия на вещественную прямую. Тогда по теореме 4 $S \in \mathrm{CR}_1$. □

Литература

[1] Кириченко В. Ф. K-пространства постоянной голоморфной секционной кривизны // Мат. заметки. — 1976. — Т. 9. — С. 805—814.

[2] Кириченко В. Ф. Методы обобщённой эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1986. — Т. 18. — С. 25—71.

[3] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.

[4] Кириченко В. Ф, Арсеньева О. Е. Введение в современную геометрию. — Тверь: ТГУ, 1997.

[5] Кириченко В. Ф., Борисовский И. П. Интегральные многообразия контактных распределений // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 12. — С. 119—134.

[6] Кириченко В. Ф., Липагина Л. В. Киллинговы f-многообразия постоянного типа // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 127—146.

[7] Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 8. — С. 71—100.

[8] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.

[9] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1981.

[10] Blair D. E. Almost contact manifolds with Killing structure tensors // Pacific J. Math. — 1971. — Vol. 39, no. 2. — P. 285—292.

[11] Blair D. E., Showders D. K. Almost contact manifolds with Killing structure tensors // J. Differential Geom. — 1974. — Vol. 9. — P. 577—582.

[12] Gray A. Nearly Kaahler manifolds // J. Differential Geom. — 1970. — Vol. 4, No. 3. — P. 283—309.

[13] Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math J. — 1976. — Vol. 28. — P. 601—612.

[14] Kirichenko V. F. Sur le géométrie des variétés approximativent cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1982. — Vol. 295. — P. 673—676.

[15] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kählerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geom. Dedicata. — 1994. — Vol. 52. — P. 53—85.

[16] Proppe H. Almost contact hypersurfaces of certain almost complex manifolds: Ph.D. Thesis. — McGill Univ., 1969.