О геометрии тензора конгармонической кривизны приближённо кэлеровых многообразий

В. Ф. КИРИЧЕНКО
Московский педагогический государственный университет
e-mail: highgeom@yandex.ru

А. А. ШИХАБ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: ali.abd82@yahoo.com

УДК 514.76

Ключевые слова: приближённо кэлерово многообразие, тензор конгармонической кривизны.

Аннотация

Изучаются дополнительные свойства симметрии тензора конгармонической кривизны приближённо кэлеровых многообразий. Получено исчерпывающее описание конгармонически-паракэлеровых и конгармонически-плоских приближённо кэлеровых многообразий.

Abstract

V. F. Kirichenko, A. A. Shihab, On the geometry of conharmonic curvature tensor for nearly Kähler manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 43—54.

We study additional symmetry properties for harmonic curvature tensor of nearly Kähler manifold. An exhaustive description for conharmonically para-Kählerian, nearly Kählerian manifolds and conharmonically flat, nearly Kählerian manifolds is obtained.

Конформные преобразования римановой структуры являются важным объектом изучения в дифференциальной геометрии. Значительный интерес представляет специальный тип конформных преобразований — конгармонические преобразования, т. е. конформные преобразования, сохраняющие свойство гармоничности гладких функций. Этот тип преобразований был предложен Иши [7] в 1957 году и в настоящее время изучается с различных точек зрения. Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант, так называемый тензор конгармонической кривизны. Легко проверить, что этот тензор является алгебраическим тензором кривизны, т. е. обладает классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны. Пополнение римановой структуры до почти эрмитовой позволяет обнаружить дополнительные свойства симметрии

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 43—54.

тензора конгармонической кривизны. В настоящей работе изучается геометрический смысл этих свойств симметрии в случае приближённо кэлеровых многообразий.

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n$, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M, $\mathfrak{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии M, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, ∇ — риманова связность метрики g на M, d — оператор внешнего дифференцирования. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1 [1, с. 326]. *Почти эрмитовой структурой* (или *$A\mathcal{H}$-структурой*) *на многообразии* M называется пара (J, g), где J — почти комплексная структура ($J^2 = -\mathrm{id}$) на M, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — (псевдо) риманова метрика на M. При этом

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Эндоморфизм J называется *структурным эндоморфизмом*. Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется *почти эрмитовым многообразием* (или *$A\mathcal{H}$-многообразием*) и обозначается $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ или просто M. Задание почти эрмитовой структуры на многообразии M равносильно заданию G-структуры над M со структурной группой $U(n)$, элементы пространства которой называются *A-реперами* [1, с. 327]. Эта G-структура называется *присоединённой*.

Определение 2 [1, с. 339]. Почти эрмитова структура (J, g) на многообразии M называется *приближённо кэлеровой структурой* (или *$N\mathcal{K}$ структурой*), если на M выполняется тождество

$$\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Интегрируемая приближённо кэлерова структура называется *кэлеровой структурой* (или *$\mathcal{K}$-структурой*). Хорошо известно [12], что кэлерова структура характеризуется тождеством

$$\nabla_X(J)Y = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Приближённо кэлерова структура, отличная от кэлеровой, называется *собственной*. Примером собственной $N\mathcal{K}$-структуры является каноническая $N\mathcal{K}$-структура, индуцированная 3-векторным произведением на шестимерной сфере, естественно вложенной в алгебру октав Гревса—Кэли [3].

Пусть (M, J, g) — $2n$-мерное $A\mathcal{H}$-многообразие. Обозначим θ форму римановой связности ∇ на M, а ω — форму смещения. Условимся, что индексы $i, j, k, \ldots$ пробегают значения от 1 до $2n$, а индексы $a, b, c, d, \ldots$ — значения от 1 до n. Положим $\hat{a} = a + n$.

На пространстве присоединённой G-структуры имеют место следующие соотношения [1, с. 328]:

$$\begin{gathered}\theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c}\omega^c + \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}}\omega_c, \quad \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,c}\omega^c - \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}\omega_c,\\ J^a_{b,k} = 0, \quad J^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Поскольку ∇ — риманова связность метрики g, то $\nabla g = 0$, т. е.

$$dg_{ij} - g_{kj}\theta^k_j - g_{ik}\theta^k_j = 0.$$

На пространстве присоединённой G-структуры эти соотношения примут вид [1, с. 329]

$$\theta^b_a + \theta^{\hat{a}}_{\hat{b}} = 0, \quad \theta^b_{\hat{a}} + \theta^a_{\hat{b}} = 0, \quad \theta^{\hat{b}}_a + \theta^{\hat{a}}_b = 0. \tag{2}$$

С учётом (1) и (2) первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединённой G-структуры запишется в форме

$$\begin{aligned} d\omega^a &= -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c,\\ d\omega_a &= \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c \end{aligned} \tag{3}$$

(см. [1, с. 329]), где

$$\begin{gathered}\omega_a = \omega^{\hat{a}}, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},c}, \quad B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}, \quad \overline{B^{ab}{}_c} = B_{ab}{}^c,\\ B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}, \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{[b,c]}, \quad \overline{B^{abc}} = B_{abc}.\end{gathered}$$

Уравнения (3) называются *первой группой структурных уравнений $A\mathcal{H}$-структуры*. Если ввести обозначения

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2} J^a_{\hat{b},\hat{c}}, \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} J^{\hat{a}}_{b,c}$$

(см. [1, с. 329]), то первые два соотношения (1) примут вид

$$\theta^a_{\hat{b}} = -B^{ab}{}_c\omega^c + C^{abc}\omega_c, \quad \theta^{\hat{a}}_b = C_{abc}\omega^c - B_{ab}{}^c\omega_c.$$

Легко показать [1, с. 330, 331], что системы функций $\tilde{B} = \{B^{ab}{}_c, B_{ab}{}^c\}$ и $\tilde{C} = \{C^{abc}, C_{abc}\}$ на пространстве присоединённой G-структуры глобально определяют тензоры типа $(2,1)$ на многообразии M. Явные выражения этих тензоров имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde{B}(X,Y) = -\frac{1}{4}\big(\nabla_{JY}(J)(X) - \nabla_Y(J)(JX)\big),\\ \tilde{C}(X,Y) = -\frac{1}{4}\big(\nabla_{JY}(J)(X) + \nabla_Y(J)(JX)\big), \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M)\end{gathered}$$

(см. [1, с. 332, 333]).

Тензор $\tilde{B}$ называется (*полным*) *виртуальным тензором*. Этот вещественный тензор является суммой,

$$\tilde{B} = \sigma \circ \tilde{B} + \bar{\sigma} \circ \tilde{B},$$

двух комплексно-сопряжённых тензоров, которые называются *виртуальными тензорами первого и второго рода* и имеют на пространстве присоединённой G-структуры ненулевые компоненты $\{B^{ab}{}_c\}$ и $\{B_{ab}{}^c\}$ соответственно [1, с. 333]. Здесь $\sigma = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - \sqrt{-1}J)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \sqrt{-1}J)$ — естественные проекторы на собственные распределения структурного эндоморфизма J [1, с. 296].

Тензор $\tilde{C}$ называется (*полным*) *структурным тензором*. Этот тензор также является суммой,

$$\tilde{C} = \sigma \circ \tilde{C} + \bar{\sigma} \circ \tilde{C},$$

двух комплексно-сопряжённых тензоров, которые называются *структурными тензорами первого и второго рода* и имеют на пространстве присоединённой G-структуры ненулевые компоненты $\{C^{abc}\}$ и $\{C_{abc}\}$ соответственно. Тензор

$$\mathrm{Alt}\,\tilde{C} = \frac{1}{2}\{\tilde{C}(X,Y) - \tilde{C}(Y,X)\}$$

с компонентами $\{B^{abc}, B_{abc}\}$ называется *альтернированным структурным тензором*. Этот вещественный тензор является суммой,

$$\mathrm{Alt}\,\tilde{C} = \sigma \circ \mathrm{Alt}\,\tilde{C} + \bar{\sigma} \circ \mathrm{Alt}\,\tilde{C},$$

двух комплексно-сопряжённых тензоров, которые называются *альтернированными структурными тензорами первого и второго рода* и имеют на пространстве присоединённой G-структуры ненулевые компоненты $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$ соответственно [1, с. 333].

На практике гораздо удобнее иметь дело с модифицированными виртуальным и структурным тензорами, определяемыми по формулам

$$B(X,Y) = -2\tilde{B}(Y,X), \quad C(X,Y) = -2\tilde{C}(Y,X) \tag{4}$$

(см. [1, с. 334]) или (в более явной записи)

$$\tilde{B}(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\nabla_{JX}(J)(Y) - \nabla_X(J)(JY)\big),$$

$$\tilde{C}(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\nabla_{JX}(J)(Y) + \nabla_X(J)(JY)\big), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

С учётом (4) имеем следующие соотношения (см. [1, с. 334]):

$$B^{ab}{}_c = -\frac{1}{2}B(\varepsilon_c, \varepsilon_{\hat{b}})^a, \quad C^{abc} = -\frac{1}{2}C(\varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_{\hat{b}})^a,$$

$$B^{abc} = \frac{1}{4}\{C(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_{\hat{c}}) - C(\varepsilon_{\hat{c}}, \varepsilon_{\hat{b}})\}^a = C^{a[bc]}.$$

Основные свойства этих тензоров описываются следующей теоремой.

Теорема 1 [1, с. 334]. *Тензоры B и C обладают следующими свойствами:*

1) $J \circ B(X,Y) = B(JX,Y) = -B(X,JY)$,

2) $\langle\langle B(X,Y), Z\rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, B(X,Z)\rangle\rangle} = 0$,

3) $J \circ C(X,Y) = -C(JX,Y) = -C(X,JY)$,

4) $\langle\langle C(X,Y), Z\rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, C(X,Z)\rangle\rangle} = 0$,

где $\langle\langle X,Y\rangle\rangle = \langle X,Y\rangle + \sqrt{-1}\langle X,JY\rangle$ — *эрмитова метрика модуля* $\mathfrak{X}(M)$, *рассматриваемого как* $\mathbb{C}\otimes C^\infty(M)$-*модуль* (см. [1, с. 321]).

Следствие 1 [1, с. 335]. *Модифицированный виртуальный тензор* $\mathbb{C}$-*линеен по первому и* $\mathbb{C}$-*антилинеен по второму аргументам. Модифицированный структурный тензор* $\mathbb{C}$-*антилинеен по обоим аргументам.*

Следствие 2 [1, с. 335]. *На пространстве присоединённой* G-*структуры справедливы соотношения*

$$B^{ab}{}_c + B^{ba}{}_c = 0, \quad C^{abc} + C^{bac} = 0.$$

Пусть (M,J,g) — $A\mathcal{H}$-многообразие. Напомним, что тензор K конгармонической кривизны был введён Иши [7] как тензор типа $(4,0)$ на n-мерном римановом многообразии, определённый формулой

$$K(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) -$$
$$-\frac{1}{n-2}[g(X,W)S(Y,Z) - g(X,Z)S(Y,W) + g(Y,Z)S(X,W) - g(Y,W)S(X,Z)],$$

где R — тензор римановой кривизны, S — тензор Риччи. Этот тензор инвариантен при конгармонических преобразованиях, т. е. при конформных преобразованиях пространства, сохраняющих гармоничность функций.

Рассмотрим свойства тензора конгармонической кривизны. Имеем

$$K(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \frac{1}{2(n-1)}[g(X,W)S(Y,Z) - g(X,Z)S(Y,W)] -$$
$$-\frac{1}{2(n-1)}[g(Y,Z)S(X,W) - g(Y,W)S(X,Z)] =$$
$$= -R(Y,X,Z,W) + \frac{1}{2(n-1)}[-g(X,W)S(Y,Z) + g(X,Z)S(Y,W)] +$$
$$+\frac{1}{2(n-1)}[-g(Y,Z)S(X,W) + g(Y,W)S(X,Z)] = -K(Y,X,Z,W).$$

Аналогично доказываются следующие свойства:

$$K(X,Y,Z,W) = -K(X,Y,W,Z),$$
$$K(X,Y,Z,W) = -K(Z,W,X,Y),$$
$$K(X,Y,Z,W) + K(Y,Z,X,W) + K(Z,X,Y,W) = 0.$$

Таким образом, тензор конгармонической кривизны удовлетворяет всем свойствам алгебраического тензора кривизны:

$$K(X,Y,Z,W) = -K(Y,X,Z,W),$$
$$K(X,Y,Z,W) = -K(X,Y,W,Z),$$
$$K(X,Y,Z,W) + K(Y,Z,X,W) + K(Z,X,Y,W) = 0,$$
$$K(X,Y,Z,W) = K(Z,W,X,Y), \quad X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M).$$

Контравариантный тензор конгармонической кривизны имеет вид

$$K(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2(n-1)}\{S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\} - \\ - \frac{1}{2(n-1)}\{g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY\} \quad (5)$$

где Q — эндоморфизм Риччи, определённый тождеством $g(QX,Y) = S(X,Y)$.

В теории почти эрмитовых структур существует принцип классификации таких структур по дифференциально-геометрическим инвариантам второго порядка (свойствам симметрии тензора Римана—Кристоффеля). Он основан на идее, выдвинутой А. Греем и сформулированной в ряде его работ ([3—5] и др.), что ключом к пониманию дифференциально-геометрических свойств кэлеровых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны:

$$\begin{aligned} &R_1\colon\ \langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(JX,JY)Z,W\rangle,\\ &R_2\colon\ \langle R(X,Y)Z,W\rangle = \\ &\qquad = \langle R(JX,JY)Z,W\rangle + \langle R(JX,Y)JZ,W\rangle + \langle R(JX,Y)Z,JW\rangle,\\ &R_3\colon\ \langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(JX,JY)JZ,JW\rangle. \end{aligned}$$

$A\mathcal{H}$-структуры, тензор R которых удовлетворяет тождеству R_i, называются *структурами класса* R_i. Если $\Theta \subset A\mathcal{H}$ — какой-либо подкласс класса $A\mathcal{H}$-структур, то принято обозначение $\Theta \cap R_i = \Theta_i$, $i = 1, 2, 3$ [1].

Хорошо известно, что $\mathcal{K} \subset R_1 \subset R_2 \subset R_3$ [3]. Поэтому естественно ожидать, что среди $A\mathcal{H}$-многообразий по дифференциально-геометрическим и топологическим свойствам наиболее близки к кэлеровым многообразиям многообразия класса R_1, затем многообразия класса R_2 и, наконец, многообразия класса R_3. Многообразия класса R_1 рассматривали Баррос и Рамирес [2], Саваки и Секигава [11], а также Рицца [10] (в [11] эти многообразия назывались F-пространствами, в [10] — паракэлеровыми многообразиями). Многообразия класса R_3, или многообразия с J-инвариантным тензором кривизны, называются также *RK-многообразиями*. Наряду с А. Греем их рассматривали Ванхекке [12, 13], Навейра и Хервелла [9] и другие авторы. Многообразия класса R_2, пока не имеющие специального наименования, были введены в рассмотрение А. Греем в связи с изучением приближённо кэлеровых многообразий ввиду того, что $N\mathcal{K} \subset R_2$, и рассматривались Греем и Ванхекке [6], Уотсоном и Ванхекке [14] и другими авторами.

Пусть (M, J, g) — $A\mathcal{H}$-многообразие размерности $2n$, K — тензор конгармонической кривизны.

Определение 3. Многообразие (M, J, g) называется многообразием класса K_i, если удовлетворяет соответствующему тождеству:

$$\begin{aligned}
K_1\colon\ & \langle K(X,Y)Z,W\rangle = \langle K(X,Y)JZ,JW\rangle,\\
K_2\colon\ & \langle K(X,Y)Z,W\rangle =\\
& \quad = \langle K(JX,JY)Z,W\rangle + \langle K(JX,Y)JZ,W\rangle + \langle K(JX,Y)Z,JW\rangle,\\
K_3\colon\ & \langle K(X,Y)Z,W\rangle = \langle K(JX,JY)JZ,JW\rangle.
\end{aligned}$$

Смысл указанных тождеств кривизны наиболее прозрачно проявляется следующими результатами.

Теорема 2. *Пусть $\Theta = (J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — почти эрмитова структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Θ — структура класса K_3;*
2) *на пространстве присоединённой G-структуры справедливы тождества $K^a_{bcd} = 0$.*

Теорема 3. *Пусть $\Theta = (J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — почти эрмитова структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Θ — структура класса K_2;*
2) *на пространстве присоединённой G-структуры справедливы тождества $K^a_{bcd} = K^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0$.*

Теорема 4. *Пусть $\Theta = (J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — почти эрмитова структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Θ — структура класса K_1;*
2) *на пространстве присоединённой G-структуры справедливы тождества $K^a_{bcd} = K^a_{\hat{b}cd} = K^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0$.*

Доказательство аналогично доказательству теорем 8.1—8.3 в [1, гл. 9]. □

Следствие. *Справедливы следующие включения классов*:

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3.$$

В качестве примера рассмотрим геометрический смысл этих классов в случае приближённо кэлеровых структур (см. определение 2).

Теорема 5 [1]. *Почти эрмитова структура (J,g) на многообразии M является приближённо кэлеровой тогда и только тогда, когда на M справедливы тождества*

$$B(X,Y) = 0, \quad C(X,Y) + C(Y,X) = 0,$$

причём эта структура является кэлеровой тогда и только тогда, когда $B = C = 0$.

На пространстве присоединённой G-структуры условие приближённой кэлеровости равносильно следующим:

$$B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0, \quad B^{[abc]} = B^{abc} = C^{abc}, \quad B_{[abc]} = B_{abc} = C_{abc}.$$

Пусть (M,g) — $N\mathcal{K}$-многообразие размерности $2n$, K — тензор конгармонической кривизны. Напомним [1], что компоненты тензора Римана—Кристоффеля на пространстве присоединённой G-структуры имеют вид

$$
\begin{gathered}
R^a_{bcd} = R^a_{b\hat{c}\hat{d}} = 0, \quad R^a_{bc\hat{d}} = -R^a_{b\hat{d}c} = A^{ad}_{bc} - B^{adh}B_{hbc},\\
R^{\hat{a}}_{\hat{b}cd} = R^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0, \quad R^{\hat{a}}_{\hat{b}c\hat{d}} = -R^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{d}c} = -A^{ad}_{bc} + B^{bdh}B_{hac},\\
R^a_{\hat{b}c\hat{d}} = R^a_{\hat{b}\hat{c}d} = 0, \quad R^a_{\hat{b}cd} = 2B^{abh}B_{hcd}, \quad R^{\hat{a}}_{bcd} = 0,\\
R^{\hat{a}}_{bc\hat{d}} = R^{\hat{a}}_{b\hat{c}d} = 0, \quad R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} = 2B^{cdh}B_{hab}, \quad R^{\hat{a}}_{bcd} = 0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Компоненты тензора Риччи S на пространстве присоединённой G-структуры имеют вид

$$
S_{ab} = 0, \quad S_{\hat{a}\hat{b}} = 0, \quad S_{\hat{a}b} = S_{a\hat{b}} = A^{ac}_{bc} + 3B^{ach}B_{bch}. \tag{7}
$$

Наконец, скалярная кривизна приближённо кэлерова многообразия на пространстве присоединённой G-структуры вычисляется по формуле

$$
\varkappa = 2A^{ab}_{ab} + 6B^{abc}B_{abc}. \tag{8}
$$

Вычислим компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединённой G-структуры для $N\mathcal{K}$-многообразия. В терминах ковариантных компонент формулу (5) запишем в виде

$$
K_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{2n-2}(g_{ik}S_{jl} + g_{jl}S_{ik} - g_{il}S_{jk} - g_{jk}S_{il}). \tag{9}
$$

С учётом (6)—(8) находим, что на пространстве присоединённой G-структуры соотношения (9) принимают вид

$$
\begin{gathered}
K_{\hat{a}bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - B^{adh}B_{hbc} - \frac{1}{2(n-1)}(\delta^a_c S^d_b + \delta^d_b S^a_c),\\
K_{ab\hat{c}\hat{d}} = 2B^{cdh}B_{abh} - \frac{1}{2(n-1)}(\delta^c_a S^d_b + \delta^d_b S^c_a - \delta^d_a S^c_b - \delta^c_b S^d_a).
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Имеем также соотношения, полученные с учётом вещественности и свойств симметрии этого тензора как алгебраического тензора кривизны. Остальные компоненты тензора конгармонической кривизны равны нулю.

Из теорем 2—4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *$N\mathcal{K}$-многообразие принадлежит классам K_2 и K_3. Классу K_1 оно принадлежит тогда и только тогда, когда на пространстве присоединённой G-структуры выполнено тождество $K_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$.*

Естественно назвать $A\mathcal{H}$-структуру класса K_1 *конгармонически-паракэлеровой*. Согласно (10) и (6) условие конгармонической паракэлеровости равносильно тому, что

$$
B^{cdh}B_{abh} = \frac{1}{4(n-1)}(\delta^c_a S^d_b + \delta^d_b S^c_a - \delta^d_a S^c_b - \delta^c_b S^d_a). \tag{11}
$$

Свернём это соотношение по индексам b и d:

$$B^{cdh}B_{abh} = \frac{1}{4(n-1)}\{(n-2)S_a^c + \frac{1}{2}\varkappa\delta_a^c\}. \tag{12}$$

Согласно (6)

$$S_{\hat{a}b} = S_{b\hat{a}} = S_b^a = A_{bh}^{ah} + 3B^{adh}B_{bdh}.$$

Поэтому, свёртывая (12), получим, что

$$B = \frac{n-2}{8(n-1)}\varkappa + \frac{n}{8(n-2)}\varkappa = \frac{1}{4}\varkappa.$$

Поскольку $\varkappa = 6B + 2A$, имеем

$$A = -B, \quad \varkappa = 4B. \tag{13}$$

Здесь

$$A_a^b = A_{ac}^{bc}, \quad A = A_{ab}^{ab}, \quad B_a^b = B^{bch}B_{ach}, \quad B = B^{abc}B_{abc} = \sum_{a,b,c=1}^{n} |B_{abc}|^2 \geqslant 0.$$

Заметим, что согласно (12)

$$S_a^c = \frac{4(n-1)}{n-2}B_a^c - \frac{2B}{n-2}\delta_a^c. \tag{14}$$

Известно ([1, с. 398], см. также [8]), что $B = \mathrm{const}$, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Конгармонически-паракэлерово $N\mathcal{K}$-многообразие является многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом оно является многообразием нулевой скалярной кривизны тогда и только тогда, когда оно кэлерово.*

Теорема 8. *Кэлерово многообразие размерности выше четырёх конгармонически-паракэлерово тогда и только тогда, когда оно Риччи-плоско.*

Доказательство. Пусть M — кэлерово конгармонически-паракэлерово многообразие размерности выше четырёх. Согласно (14) $S = 0$, т. е. M Риччи-плоско. Обратно, если M Риччи-плоско, то согласно (10) $K_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$, т. е. M — конгармонически-паракэлерово многообразие. □

Теорема 9. *Четырёхмерное кэлерово многообразие конгармонически-паракэлерово тогда и только тогда, когда оно является многообразием нулевой скалярной кривизны.*

Доказательство. Пусть M — четырёхмерное кэлерово конгармонически-паракэлерово многообразие. Согласно (13) его скалярная кривизна равна нулю. Обратно, пусть $\varkappa = 0$. Тогда $S_c^c = 0$. Поскольку $n = 2$, мы прямым подсчётом убеждаемся, что это соотношение равносильно тождеству

$$\delta_a^c S_b^d + \delta_b^d S_a^b - \delta_a^d S_b^c - \delta_b^c S_a^d = 0,$$

и в силу (10) $K_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$, т. е. M — конгармонически-паракэлерово многообразие. $\square$

Назовём риманово многообразие *конгармонически-плоским*, если его тензор K конгармонической кривизны тождественно равен нулю.

Теорема 10. *$N\mathcal{K}$-многообразие конгармонически-плоско тогда и только тогда, когда на пространстве присоединённой G-структуры выполнено тождество $K_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что если $N\mathcal{K}$-многообразие M конгармонически-плоско, то $K_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$. Обратно, пусть $K_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$. Из тождества Риччи следует, что в этом случае $K_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$, и согласно (10) $K = 0$, т. е. $N\mathcal{K}$-многообразие M конгармонически-плоско. $\square$

Теорема 11. *$N\mathcal{K}$-многообразие конгармонически-плоско тогда и только тогда, когда*

$$B^{adh} B_{hbc} = \frac{1}{n-1}\big(\delta_{[b}^{[a} S_{c]}^{d]}\big), \quad A_{bc}^{ad} = \frac{1}{n-1}\big(\delta_{(b}^{(a} S_{c)}^{d)}\big).$$

Доказательство. С учётом (10) получаем, что $N\mathcal{K}$-многообразие M конгармонически-плоско тогда и только тогда, когда

$$A_{bc}^{ad} - B^{adh} B_{hbc} = \frac{1}{2(n-1)}(\delta_c^a S_b^d + \delta_b^d S_c^a).$$

Альтернируя и симметризуя это соотношение, получим соответственно

$$B^{adh} B_{hbc} = \frac{1}{n-1}\big(\delta_{[b}^{[a} S_{c]}^{d]}\big), \quad A_{bc}^{ad} = \frac{1}{n-1}\big(\delta_{(b}^{(a} S_{c)}^{d)}\big).$$

Очевидно, эти соотношения равносильны конгармонической плоскости многообразия. $\square$

Следствие. *Конгармонически-плоское кэлерово многообразие M размерности выше четырёх локально голоморфно изометрично комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, снабжённому канонической кэлеровой структурой.*

Доказательство. Утверждение сразу же следует из того, что конгармонически-плоское кэлерово многообразие конгармонически-паракэлерово и по теореме 8 многообразие M Риччи-плоское, т. е. $S = 0$. В силу теоремы 11 $A_{bc}^{ad} = 0$, и по (6) $R = 0$. Следовательно, кэлерово многообразие M локально голоморфно изометрично комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$, снабжённому канонической кэлеровой структурой. $\square$

Пусть, наконец, M — собственное $N\mathcal{K}$-многообразие (с необходимостью размерности больше четырёх). Согласно [1, с. 368] для него справедливо тождество

$$A_a^d B_{bcd} - A_b^d B_{acd} - 4B_c^d B_{abd} = 0. \tag{15}$$

С другой стороны, согласно (7) $A_a^b = S_a^b - 3B_a^b$, и с учётом (14) получаем

$$A_a^b = \frac{n+2}{n-2} B_a^b - \frac{2B}{n-2} \delta_a^b. \tag{16}$$

Подставим (16) в (15):

$$(n+2)(B_a^d B_{bcd} - B_d^b B_{acd}) - 4(n-2) B_c^d B_{abd} = 4 B B_{abc}. \tag{17}$$

Заметим, что из соотношения $\overline{B_{abc}} = B^{abc}$ вытекает, что $\overline{B_a^b} = B_b^a$, а значит, существует A-репер, в котором $B_a^b = B_a \delta_a^b$ для подходящих функций B_a. Заметим также, что, так как $N\mathcal{K}$-структура собственная, найдутся такие a, b, c, что $B_{abc} \neq 0$, поэтому соотношение (17) равносильно следующему:

$$(n+2)(B_a - B_b) - 4(n-2) B_c = 4B. \tag{18}$$

Так как индексы a, b, c равноправны, к соотношениям (18) можно добавить два соотношения, полученные циклическими перестановками этих индексов. Эти три соотношения образуют систему линейных уравнений на неизвестные B_a, B_b, B_c с ненулевым определителем. Заметим, что, поскольку эти неизвестные входят в систему равноправно, $B_a = B_b = B_c$. С учётом (18) находим, что

$$x = B_a = B_b = B_c = \frac{2B}{6-n}. \tag{19}$$

Заметим также, что эрмитова форма $b(X, Y) = B_a^c X^a Y_c$ является положительно полуопределённой, поскольку

$$b(X, X) = B_a^b X^a X_b = B^{bcd} B_{acd} X^a X_b = \sum_{c,d} |B_{acd} X^a|^2 \geqslant 0,$$

а значит, $x \geqslant 0$. Но тогда из (19) вытекает, что $n < 6$. Кроме того, поскольку $N\mathcal{K}$-структура собственная, то $n \geqslant 3$. Следовательно, $n = 5$, или $n = 4$, или $n = 3$. Но поскольку

$$B = \sum_{d=1}^{n} = B_d \geqslant B_a + B_b + B_c = 3x,$$

с учётом (19) получаем, что

$$x = \frac{3B}{6-n} \geqslant \frac{6x}{6-n},$$

откуда следует, что $n < 0$. Полученное противоречие показывает, что собственное $N\mathcal{K}$-многообразие не может быть конгармонически-паракэлеровым.

Соберём полученные данные.

Основная теорема. *Всякое четырёхмерное $N\mathcal{K}$-многообразие конгармонически-паракэлерово тогда и только тогда, когда оно является многообразием нулевой скалярной кривизны. Всякое $N\mathcal{K}$-многообразие размерности выше четырёх конгармонически-паракэлерово тогда и только тогда, когда оно является*

Риччи-плоским кэлеровым многообразием. Всякое $N\mathcal{K}$-многообразие размерности выше четырёх конгармонически-плоско тогда и только тогда, когда оно локально голоморфно изометрично пространству $\mathbb{C}^n$, снабжённому канонической кэлеровой структурой.

Литература

[1] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.

[2] Barros M., Ramirez A. Decomposition of quasi-Kaehler manifolds which satisfy the first curvature condition // Demonstratio Math. — 1978. — Vol. 11, no. 3. — P. 685—694.

[3] Gray A. Nearly Kähler manifolds // J. Differential Geom. — 1970. — Vol. 4, no. 3. — P. 283—309.

[4] Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. — 1976. — Vol. 28, no. 4. — P. 601—612.

[5] Gray A. The structures of nearly Kähler manifolds // Ann. Math. — 1976. — Vol. 223. — P. 233—248.

[6] Gray A., Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // Časopis Pěst. Mat. — 1979. — Vol. 104, no. 2. — P. 170—179.

[7] Ishii Y. On conharmonic transformations // Tensor. — 1957. — Vol. 7, no. 2. — P. 73—80.

[8] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kählerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geom. Dedicata. — 1994. — Vol. 52. — P. 53—85.

[9] Naveira A., Hervella L. M. Quasi-Kaehler manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 49, no. 2. — P. 327—333.

[10] Rizza G.-B. Varietà parakähleriane // Ann. Mat. Pura Appl. — 1974. — Vol. 98, no. 4. — P. 47—61.

[11] Sawaki S., Sekigawa K. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // J. Differential Geom. — 1974. — Vol. 9. — P. 123—134.

[12] Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with J-invariant Riemann curvature tensor // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1975-1976. — Vol. 34. — P. 487—498.

[13] Vanhecke L. Some almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // J. Differential Geom. — 1977. — Vol. 12, no. 4. — P. 461—471.

[14] Watson B., Vanhecke L. K_1-curvatures and almost Hermitian submersions // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1977-1978. — Vol. 36. — P. 205—224.